HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

Hội nghị khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XXI

MỘT SỐ KHÍA CẠNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ NGẪU NHIÊN VÀ ỨNG DỤNG

TS. Phan Thị Hương

Trung tâm Toán ứng dụng và Tin học

Ngày 23 tháng 4 năm 2026

Mục lục

Ví dụ

Bài toán: Tìm mối quan hệ giữa ứng suất (stress) σ và độ biến dạng (strain) ε của một vật liệu.

- **Chất lỏng nhớt**: Theo định luật Newton:

$$\sigma(t) = \eta D\varepsilon(t). \tag{1}$$

  η là hằng số vật liệu $D\varepsilon(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$.

- **Vật rắn đàn hồi**: Theo định luật Hooke:

$$\sigma(t) = \eta_1 D^0\varepsilon(t). \tag{2}$$

  η_1 là hằng số, $D^0\varepsilon(t) := \varepsilon(t)$.

[1] K. Diethelm (2010), *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Lecture Notes in Mathematics, **2004**. Springer-Verlag, Berlin.

Ví dụ

- Xét $\varepsilon(t) = t,\ t \in [0, T]$.
    - Chất lỏng nhớt: $\sigma(t) = \eta$.
    - Vật rắn đàn hồi: $\sigma(t) = \eta_1 t$.

  Đối với vật liệu viscoelastic (như polyme, mô sinh học), kết quả thực nghiệm cho thấy $\sigma(t) = K t^{1-\alpha}$ với $\alpha \in (0, 1)$.
- Định luật Nutting:

$$\sigma(t) = K D^{\alpha} \varepsilon(t) \quad \text{với } \alpha \in (0, 1). \tag{3}$$

[2] P.G. Nutting (1943), A general stress–strain–time formula. *Journal of the Franklin Institute* **235**, 513–524.

Lịch sử đạo hàm phân thứ

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 - 1716, Đức)

Guillaume de L'Hospital
(1661 - 1704, Pháp)

Lịch sử đạo hàm phân thứ

- **Năm 1695**: Trong một lá thư gửi Leibniz, L'Hospital đã hỏi:

$$" \frac{d^n}{dx^n} f(x) \text{ có nghĩa là gì nếu } n = 1/2?"$$

  Đây được xem là dấu mốc khai sinh khái niệm đạo hàm bậc phân thứ.

- **Ý nghĩa**: Mở rộng khái niệm đạo hàm từ bậc nguyên sang bậc không nguyên.

[3] B. Ross (1977), The development of fractional calculus 1695–1900. *Hist. Math.* **4**, 75–89.

Lịch sử đạo hàm phân thứ

Bernhard Riemann
(1826 - 1866, Đức)

Joseph Liouville
(1809 - 1882, Pháp)

Michele Caputo
(Sinh năm 1927, Ý)

Tích phân phân thứ

Cho $\alpha \in (0, 1], [0, T] \subset \mathbb{R}, x : [0, T] \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên $[0, T]$.

- *Tích phân bậc $n \in \mathbb{N}$ của hàm x:*

$$I_{0+}^{n} x(t) = \underbrace{\int_0^t \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2}}_{n \text{ lần}} x(s_1)\, ds_1 \cdots ds_n.$$

- $I_{0+}^{n} x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau)\, d\tau, \quad \Gamma(n) := (n-1)!.$
- *Tích phân Riemann-Liouville cấp α của hàm x:*

$$I_{0+}^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau)\, d\tau, \quad t \in (0, T],$$

ở đây $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$

Đạo hàm phân thứ

- *Đạo hàm bậc $n \in \mathbb{N}$ của hàm x là $D^n x(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$, $t \in (0, T]$.*
- $$\frac{d}{dt} I^1_{0+} x(t) = x(t), \quad I^1_{0+}\left(\frac{d}{dt} x(t)\right) = x(t) - x(0).$$
- *Đạo hàm Riemann-Liouville cấp α của hàm x:*

$$^{RL}D^{\alpha}_{0+} x(t) = \frac{d}{dt}\left[I^{1-\alpha}_{0+} x(t)\right], \quad t \in (0, T].$$

- *Đạo hàm Caputo cấp α của hàm x:*

$$^{C}D^{\alpha}_{0+} x(t) := I^{1-\alpha}_{0+}\left[\frac{d}{dt} x(t)\right]; {}^{C}D^{\alpha}_{0+} x(t) :== \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}_{0+}(x(t) - x(0)), \quad t \in (0, T].$$

Khi $\alpha = 1$ và $x'(t)$ tồn tại trên $(0, T]$ thì $^{C}D^{1}_{0+} x(t) = x'(t)$.

[4] G. Vainikko (2016), Which functions are fractionally differentiable? *Z. Anal. Anwend.* **35**(4), 465–487.

So sánh đạo hàm Riemann-Liouville và đạo hàm Caputo

Ví dụ: Xét $x(t) = 1,\ t \in [0, T]$.

- ${}^{C}D_{0+}^{0.5}x(t) = 0$.
- ${}^{RL}D_{0+}^{0.5}x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

Nhận xét:

- Đạo hàm Riemann-Liouville là nền tảng lý thuyết giúp tổng quát hóa phép tích phân lặp sang bậc phân số; khó diễn giải ý nghĩa vật lý và xây dựng điều kiện đầu cho bài toán Cauchy.
- Đạo hàm Caputo cho phép sử dụng các điều kiện ban đầu của đạo hàm bậc nguyên; được sử dụng nhiều trong các bài toán thực tế.

Phương trình vi phân phân thứ (FDE)

Xét FDE bậc $\alpha \in (0, 1]$

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in (0, T], \tag{4}$$

ở đây $T > 0, f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là hàm đo được.

- Cho $x_0 \in \mathbb{R}^d$, hàm $x(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ gọi là nghiệm của (1) với $x(0) = x_0$ nếu $x(0) = x_0$ và
$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in (0, T].$$

Định lý 1.1 (Dạng tích phân của FDE)

Cho $x_0 \in \mathbb{R}^d$, hàm khả tích $x(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}$ là nghiệm của (4) với $x(0) = x_0$ nếu

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Khó khăn khi nghiên cứu FDE

- Tính không địa phương của nghiệm.
- Đạo hàm bậc phân thứ không có giải thích về mặt hình học
- Quy tắc đạo hàm hàm hợp, đạo hàm của tích không còn đúng.
- Xấp xỉ nghiệm thường có khối lượng tính toán lớn. Ví dụ, với phương pháp Euler, để tính nghiệm xấp xỉ $x^{(n)}(t_{k+1})$, ta phải tính tất cả $x^{(n)}(t_j)$, $j = 0, ..., n-1$.

Lược đồ Euler cho FDE

- $x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$
- Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, lược đồ *Euler* $x^{(n)}(\cdot)$ cho bởi $x^{(n)}(0) := x_0$ và với $t \in (0, T]$

$$x^{(n)}(t) \;=\; x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau_n(s), x^{(n)}(\tau_n(s)))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds,$$

ở đây $\tau_n(s) = \frac{kT}{n} =: t_k$ với $s \in \left(\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]$, $k = 0, \dots, n-1$.

- $x^{(n)}(t_{k+1}) = x_0 + \sum_{j=0}^{k} \frac{(k-j+1)^\alpha - (k-j)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_j, x^{(n)}(t_j)) \left(\frac{T}{n}\right)^\alpha .$
- Khi $\alpha = 1$ thì $x^{(n)}(t_{k+1}) = x^{(n)}(t_k) + f(t_k, x^{(n)}(t_k))\, \frac{T}{n}$.

[5] T. S. Doan, P. T. Huong, and P. E. Kloeden (2025), θ-scheme for solving Caputo fractional differential equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. **2025**, No. 05, pp. 1–13.

Phương trình vi phân phân thứ

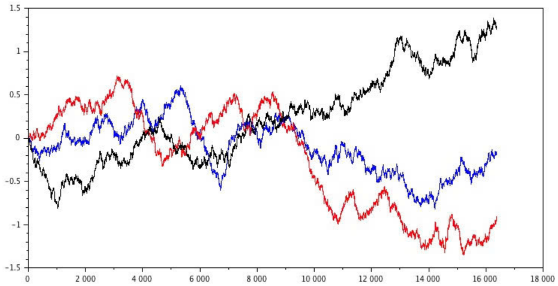
- **Lý thuyết định tính:** Đã được xây dựng nền tảng vững chắc và nghiên cứu tương đối đầy đủ (tính đặt chỉnh, tính ổn định, tập hút, sự phân tách nghiệm,...).
- **Lý thuyết định lượng:** đã được nghiên cứu một cách có hệ thống và đạt được nhiều kết quả quan trọng: ước lượng nghiệm, phương pháp xấp xỉ hiệu quả, xấp xỉ có bậc hội tụ cao,...
- Tại Việt Nam, nhóm nghiên cứu của GS. Nguyễn Đình Công, GS. Đoàn Thái Sơn, PGS. Hoàng Thế Tuấn có nhiều đóng góp quan trọng.

Chuyển động Brown

Robert Brown

(1773 – 1858)

"Người đầu tiên quan sát chuyển động hỗn loạn của các hạt vào năm 1827."



Quỹ đạo chuyển động Brown

Định nghĩa chuyển động Brown

Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là một không gian xác suất với lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Quá trình $W = (W_t)_{t\geq 0}$ được gọi là một chuyển động Brown ứng với lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ nếu

- W_t là $\mathcal{F}_t$-đo được với mọi t.
- Với hầu chắc chắn mọi $\omega \in \Omega$, ánh xạ $t \mapsto W_t(\omega)$ liên tục.
- Với mọi $t > s \geq 0$, $W_t - W_s$ có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(0, t-s)$ và $W_t - W_s$ độc lập với $\mathcal{F}_s$.
- Với mọi $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ thì các biến ngẫu nhiên $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$, $k = 1, \ldots, n$, là độc lập.

Tính chất

Với hầu hết $\omega \in \Omega$, quỹ đạo mẫu $W_.(\omega)$ của chuyển động Brown là không đâu khả vi và có biến phân vô hạn trên mỗi khoảng con.

Tích phân ngẫu nhiên Itô

Kiyosi Itô
(1915 – 2008, Nhật Bản)

"Công thức Itô là viên ngọc quý của giải tích ngẫu nhiên hiện đại."

Định nghĩa

Cho $f \in \mathcal{M}^2([0,T])$. Tích phân Itô đối với (W_t) định nghĩa bởi:

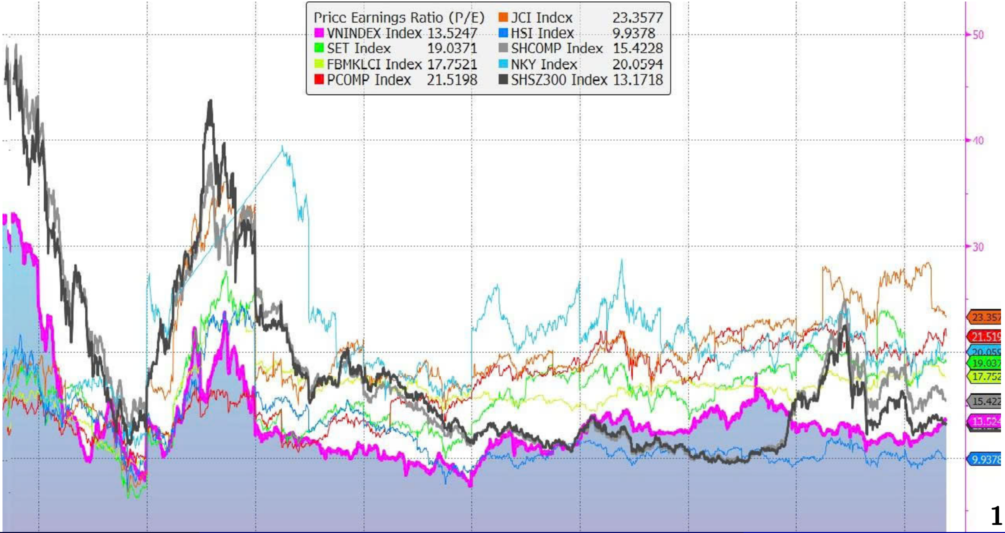
$$\int_0^T f(t)dW_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T g_n(t)dW_t$$

với (g_n) đơn giản sao cho:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |g_n(t) - f(t)|^2 dt\right] = 0.$$

- $\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t)dW_t\right] = 0.$
- $\mathbb{E}\left|\int_0^T f(t)dW_t\right|^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right]$ (Đẳng cự Itô).

Phương trình vi phân ngẫu nhiên



Phương trình vi phân ngẫu nhiên (SDE)

- Xét SDE trên đoạn $[0, T]$

$$DX(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t)) \frac{dW_t}{dt}, \tag{5}$$

$b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được và $(W_t)_{t\in[0,T]}$ là chuyển động Brown trên $(\Omega, \mathcal{F}, F := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Đặt $\mathfrak{X}_t := L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Một quá trình đo được X được gọi là F-tương thích nếu $X(t) \in \mathfrak{X}_t$ với mọi $t \in [0, T]$.
- Với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, một quá trình đo được, F-tương thích X được gọi là nghiệm của (5) với $X(0) = \zeta$ nếu với mọi $t \in [0, T]$

$$X(t) = \zeta + \int_0^t b(\tau, X(\tau))\, d\tau + \int_0^t \sigma(\tau, X(\tau))\, dW_\tau.$$

Phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên (SFDE)

- Xét SFDE bậc $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ trên đoạn $[0, T]$

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\, \frac{dW_t}{dt}, \tag{6} $$

$b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được và $(W_t)_{t\in[0,T]}$ là chuyển động Brown trên $(\Omega, \mathcal{F}, F := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Đặt $\mathfrak{X}_t := L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Với mỗi $\zeta \in \mathfrak{X}_0$, một quá trình đo được, F-tương thích X được gọi là nghiệm của (6) với $X(0) = \zeta$ nếu $X(0) = \zeta$ và với mọi $t \in (0, T]$

$$ \begin{aligned} X(t) = \zeta \quad &+ \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b(\tau, X(\tau))\, d\tau \\ &+ \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sigma(\tau, X(\tau))\, dW_\tau. \end{aligned} $$

Khó khăn khi nghiên cứu SFDE

- Khó khăn như cho FDE ở trên
- Nhân trong phương trình tích phân phụ thuộc thời gian dẫn đến không biểu diễn được nghiệm dưới dạng quá trình Itô; không có tính Markov, tính semimartingale.
- Không thể áp dụng công thức vi phân Itô hay nhiều công cụ trong giải tích ngẫu nhiên.

Kết quả định tính cho SFDE

- Tính đặt chỉnh của nghiệm.
- Tính chính quy của nghiệm.
- Công thức biến thiên hằng số.
- Sự phân tách tiệm cận giữa các nghiệm.
- Dáng điệu tiệm cận nghiệm trong không gian hữu hạn chiều; không gian vô hạn chiều.

[6] T. S. Doan, P. T. Huong, P. E. Kloeden, and H. T. Tuan (2018), Asymptotic separation between solutions of Caputo fractional stochastic differential equations, *Stochastic Analysis and Applications*, **36**(4), 654–664.

Kết quả định lượng cho SFDE

- Lược đồ θ-Euler-Maruyama.
- Lược đồ Carathéodory và sự hội tụ yếu.
- Lược đồ θ- Mittag-Lefler Euler-Maruyama.
- Lược đồ Milstein.
- Lược đồ fast θ-Euler-Maruyama.

[7] P. T. Huong and H. L. Ngo (2026), Asymptotic separation between solutions and fast θ-Euler-Maruyama scheme for singular stochastic Volterra integral equations with jumps, *Computational and Applied Mathematics*, **45**, 318.

Phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên có trễ (SFDDE)

- Xét SFDDE bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên $[-\rho, T]$ có dạng:

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t), X(t-\rho)) + \sigma(t, X(t), X(t-\rho))\,\frac{dW_t}{dt}, t \in [0, T], \quad (7)$$

  ở đây $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ đo được.
- $X_0 = \zeta = \{\zeta(t) : t \in [-\rho, 0]\}$ là biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_0$-đo được trong $C([-\rho, 0], \mathbb{R}^d)$: $\mathbb{E}|\zeta|^2 < \infty$.
- Mô tả các hệ thống mà trạng thái hiện tại phụ thuộc vào lịch sử quá khứ như các mô hình sinh học, hệ động lực có trễ, và các vật liệu viscoelastic,...
- Phân tích độ trễ phản hồi trong robot và xe tự lái.

Phương trình tích phân Volterra ngẫu nhiên có bước nhảy

Xét SVIEJ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$\begin{aligned} X(t) &= \zeta + \int_0^t k(t-u) f(u, X(u))\, du + \int_0^t k_B(t-u) g(u, X(u))\, dB_u \\ &+ \int_0^t k_Z(t-u) h(u, X(u-))\, dZ_u, \end{aligned} \tag{8}$$

$k \in L^1([0, T])$, $k_B, k_Z \in L^2([0, T])$, $X(u-) := \lim_{s \uparrow u} X(s)$, $f, g, h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

- Mô phỏng các cú sốc điện, va chạm cơ học mạnh hoặc biến động áp suất đột ngột.
- Mô tả các hệ thống thay đổi chế độ vận hành tức thì.
- Minh họa sự hình thành vết nứt và sự mỏi vật liệu.

Hướng nghiên cứu tiếp theo

1. Nghiên cứu tính ổn định của nghiệm, bài toán động lực học vật bay trong môi trường nhiễu.
2. Nghiên cứu bài toán điều khiển các hệ nhiều vật: hệ robot, hệ đàn hồi, hệ có ràng buộc đàn hồi/biến dạng,...
3. Nghiên cứu SFDE trong không gian vô hạn chiều; bài toán lan truyền trong môi trường phức hợp.

Xin trân trọng cảm ơn!