BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

*

TRẦN THỊ HUYỀN THANH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHIẾU KIỂU THU HẸP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG KHÔNG ĐƠN ĐIỆU

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2024

Công trình được hoàn thành tại Học viện Kỹ thuật Quân sự

Người hướng dẫn khoa học:

1. PGS.TS Bùi Văn Định

2. TS Hy Đức Mạnh

Phản biện 1: GS.TSKH Lê Dũng Mưu

Phản biện 2: PGS.TS Nguyễn Năng Tâm

Phản biện 3: TS Nguyễn Thế Vinh

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng đánh giá luận án cấp Học viện theo quyết định số ..../QĐ-HV, ngày ... tháng ... năm ... của Giám đốc Học viện Kỹ thuật Quân sự, họp tại Học viện Kỹ thuật Quân sự vào hồi ... giờ ... ngày ... tháng ... năm ....

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Bài toán cân bằng (Equilibrium problem), theo cách gọi của các tác giả L.D. Muu và W. Oettli [Nonlinear Anal. TMA., **18** (1992), 1159-1166], E. Blum và W. Oettli [Math. Student, **63** (1994), 127-149], xuất hiện lần đầu trong công trình của Nikaido - Isoda [Pac. J. Math., **5** (1955), 807-815] khi tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác, nó cũng được phát biểu dưới dạng bất đẳng thức minimax bởi K. Fan [Academic Press, (1972), 103-113], đó là bài toán EP(C, f) được phát biểu dưới dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Ở đó C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Banach thực $\mathbb{E}$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng trên C, tức là $f(x, x) = 0 \ \forall x \in C$. Bài toán cân bằng liên kết với EP(C, f) được gọi là bài toán cân bằng Minty, ký hiệu là MEP(C, f) được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } u^* \in C \text{ sao cho } f(y, u^*) \leq 0 \text{ với mọi } y \in C. \tag{1}$$

Trong tóm tắt này, chúng tôi ký hiệu tập nghiệm của bài toán cân bằng EP(C, f) và bài toán cân bằng Minty lần lượt là S và S_M.

Tính đến thời điểm hiện nay, đã có nhiều phương pháp giải bài toán cân bằng trong không gian Hilbert dựa vào tính chất đơn điệu của song hàm f, trong đó có thể kể đến các phương pháp hàm gap, phương pháp nguyên lý bài toán phụ, phương pháp điểm gần kề, phương pháp chiếu kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia... Nhìn chung, kỹ thuật chứng minh dãy lặp $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán hội tụ đến nghiệm của bài toán cân bằng trong trường hợp song hàm cân bằng đơn điệu hoặc đơn điệu suy rộng, bao gồm các bước sau:

- Xây dựng bất đẳng thức $\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|$ với $x^* \in S_M$. Từ đó suy ra dãy $\|x^k - x^*\|$ hội tụ.
- Tồn tại dãy $\{x^{k_l}\} \subset \{x^k\}$ hội tụ yếu đến $\bar{x}$.
- Chỉ ra $\bar{x}$ là nghiệm của EP(C, f).
- Thay $x^* = \bar{x}$ vào bất đẳng thức ở Bước 1 và suy ra dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu đến $\bar{x}$ là nghiệm của EP(C, f).

Trong kỹ thuật chứng minh trên đây, với giả thiết về tính liên tục và đơn điệu (hoặc đơn điệu suy rộng) của song hàm f, thì tập nghiệm của hai bài toán EP(C, f) và MEP(C, f) trùng nhau, tức là $S_M = S$. Do đó, trong Bước 4 của lược đồ chứng minh trên, ta có thể thay $x^* = \bar{x}$ được. Tuy nhiên, trong trường hợp song hàm f không đơn điệu, hai tập nghiệm của hai bài toán này không trùng nhau. Đây chính là một khó khăn trong kỹ thuật chứng minh với bài toán cân bằng không đơn điệu và sẽ được khắc phục trong nội dung luận án này.

Gần đây, bài toán cân bằng được nhiều nhà khoa học mở rộng nghiên cứu phương pháp tìm nghiệm trong không gian Banach. Trong số đó, có nhiều tác giả nghiên cứu tập trung dựa vào tính chất đơn điệu của song hàm f như các tác giả I.V. Konnov và O.V. Pinyagina [Comput. Meth. Appl. Math., **3** (2003), 274-286], tác giả S. Reich và S. Sabach [Contemp. Math., **568** (2012), 225-240]; hoặc tính giả đơn điệu của f như các tác giả A.N. Iusem và V. Mohebbi [Optim., **69(11)** (2020), 2383-2403]. Tuy nhiên, các kết quả này còn chưa nhiều, đặc biệt là các kết quả cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach chưa xuất hiện nhiều. Trong không gian Hilbert sử dụng kỹ thuật chứng minh như trình bày ở trên, để đưa ra được bất đẳng thức ở Bước 1, các tác giả sử dụng

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 = \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^k - x^*\rangle.$$

Tuy nhiên, trong không gian Banach, chúng tôi không đưa ra được khai triển sử dụng tích vô hướng như kiểu này. Đây cũng chính là một khó khăn khi thực hiện giải bài toán cân bằng trong không gian Banach so với không gian Hilbert và không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và sẽ được giải quyết trong nội dung của luận án này. Một trong số những phương pháp tiêu biểu giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach đó là phương pháp chiếu thu hẹp được đề xuất bởi các tác giả D. Rouhani và V. Mohebbi [J. Aust. Math. Soc., **112** (2022), 90-114]. Ưu điểm của phương pháp này là giúp chúng ta tìm được nghiệm của bài toán cân bằng không đơn điệu và không Lipschitz trong không gian Banach. Tuy nhiên, liệu có một thuật toán nào khác với nhiều lựa chọn quy tắc tìm kiếm theo tia để giải bài toán này không? Luận án này sẽ đề xuất một thuật toán khác để trả lời cho câu hỏi này.

Trong luận án này, bên cạnh việc xét bài toán cân bằng, chúng tôi cũng xét bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ với tích trong $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn tương ứng $\| \cdot \|$. Giả sử C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : C \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục. Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C, F):

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \ \forall y \in C,$$

và bài toán liên kết với VIP(C, F) là bài toán bất đẳng thức biến phân Minty MVIP(C, F) :

$$\text{Tìm } u \in C \text{ sao cho } \langle F(y), u - y \rangle \leq 0, \ \ \forall y \in C.$$

Trong tóm tắt này, ký hiệu tập nghiệm của hai bài toán VIP(C, F) và MVIP(C, F) lần lượt là S_{VIP} và S_{MVIP}. Có rất nhiều phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân và phương pháp chiếu thu hẹp được trình bày ở trên cũng được áp dụng bởi các tác giả M.L. Ye và Y.R. He [Comput. Optim. Appl., **60** (2015), 141-150]. Một ưu điểm của phương pháp này là có thể áp dụng được để tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu. Đây cũng là cơ sở để mở rộng nghiên cứu phương pháp này cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert như trong công trình của các tác giả B.V. Dinh và D.S. Kim [J. Comput. Appl. Math., **302** (2016), 106-117], hay công trình của tác giả J.J. Strodiot và các cộng sự [J. Glob. Optim., **64** (2016), 159-178]. Tuy nhiên, tại mỗi bước lặp thứ $k+1$ để tìm x^{k+1}, ta cần phải giải bài toán tối ưu mà tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc thứ k với nửa không gian H_k (chính là thực hiện một phép chiếu thu hẹp). Điều này dẫn tới chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Vậy liệu có một thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu mà không dùng phương pháp chiếu thu hẹp hay không? Trong luận án này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới giải VIP(C, F) và đáp ứng được hai điều kiện trên. Đặc biệt, chúng tôi xét cả hai trường hợp khi F không là Lipschitz, độ dài bước tìm được bằng cách thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia và trường hợp F là Lipschitz với hệ số L, độ dài bước được chỉ rõ và phụ thuộc vào L.

Với bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert, tác giả J.J. Strodiot và các cộng sự [J. Glob. Optim., **64** (2016), 159-178] đã đề xuất Thuật toán SVN để giải. Ưu điểm của thuật toán này là giúp tìm nghiệm của bài toán cân bằng mà không cần đến giả thiết về tính liên tục của song hàm f. Tuy nhiên, cũng như trong trường hợp bất đẳng thức biến phân, tại mỗi bước lặp, ta phải giải một bài toán tối ưu trên tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc ở bước trước và một siêu phẳng (chính là thực hiện phép chiếu thu hẹp). Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Thêm vào đó, trong thuật toán SVN, các tác giả sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước. Tuy nhiên, trong trường hợp khi song hàm f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz hay f có cấu trúc phức tạp, thì việc thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia gặp khó khăn cũng như chi phí tính toán lớn. Do đó, chúng ta khó có thể áp dụng được thuật toán SVN trong những trường hợp này. Chính vì vậy, chúng tôi đề xuất sửa đổi Thuật toán SVN thành một thuật toán mới giải EP(C, f) mà không cần sử dụng phép chiếu thu hẹp và giả thiết về tính đơn điệu của f trong ba trường hợp: f không thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và hệ số Lipschitz ước lượng được hoặc không ước lượng được.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau:

Nội dung 1. Xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach bằng phương pháp chiếu thu hẹp kết hợp quy tắc tìm kiếm theo tia.

Nội dung 2. Xây dựng thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ bằng phương pháp chiếu kiểu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.

Nội dung 3. Xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu Lipschitz hoặc không Lipschitz trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ bằng phương pháp chiếu kiểu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu.

Phạm vi nghiên cứu: Các phương pháp giải bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, đặc biệt, tập trung vào phương pháp chiếu thu hẹp, phương pháp chiếu kiểu thích nghi. Lớp hàm nghiên cứu là hàm lồi, không đơn điệu, Lipschitz hoặc không Lipschitz.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Để giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu trong không gian Banach, chúng tôi sử dụng phương pháp chiếu thu hẹp kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.
- Để tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, chúng tôi sử dụng phương pháp chiếu kiểu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- *Đề xuất được một thuật toán giải bài toán cân bằng mà không cần yêu cầu giả thiết về tính đơn điệu của song hàm f trong không gian Banach bằng cách kết hợp phương pháp chiếu thu hẹp và các kiểu quy tắc tìm* *kiếm theo tia tương ứng. Chứng minh được dãy lặp sinh bởi thuật toán đó hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng, đồng thời áp dụng thuật toán để giải một ví dụ trong không gian Banach hữu hạn chiều.*

- *Xây dựng được ba thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân $VIP(C, F)$ không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ bằng phương pháp chiếu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia. Chúng tôi cũng đã chứng minh được các định lý hội tụ tới nghiệm của dãy lặp sinh bởi các thuật toán, đồng thời đưa ra một số ví dụ số minh họa cho các thuật toán.*

- *Xây dựng được ba thuật toán giải bài toán cân bằng $EP(C, f)$ không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Trong đó, có một thuật toán kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước, một thuật toán chỉ rõ độ dài bước phụ thuộc vào hệ số kiểu Lipschitz của f (trong trường hợp f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz mà hệ số Lipshitz ước lượng được), và một thuật toán áp dụng khi f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và hệ số Lipschitz không biết hoặc khó ước lượng.*

6. Cấu trúc của luận án

Luận án gồm ba chương.
Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.
Chương 2: Phương pháp chiếu thu hẹp giải bài toán cân bằng không đơn điệu.
Chương 3: Phương pháp chiếu kiểu thích nghi giải bài toán cân bằng không đơn điệu.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các khái niệm cũng như các kết quả bổ trợ cần thiết được sử dụng ở các chương sau.

1.1 Các khái niệm và kết quả cơ bản

Mục này trình bày một số khái niệm cơ bản nhất liên quan đến tập lồi, hàm lồi, đạo hàm và dưới vi phân của hàm lồi, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc, phép chiếu trong không gian Banach và các kết quả liên quan.

1.2 Các trường hợp riêng của bài toán cân bằng

Mục này dành để trình bày về bài toán cân bằng và các trường hợp riêng của bài toán cân bằng.

1.3 Sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu và bài toán cân bằng trong không gian Banach

Các kết quả về sự tồn tại nghiệm, tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng và bài toán tối ưu được trình bày trong mục này.

Chương 2

Phương pháp chiếu thu hẹp giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một thuật toán hội tụ mạnh giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu trong không gian Banach. Thuật toán là sự kết hợp của phương pháp chiếu thu hẹp và phương pháp tìm kiếm theo tia.

Nội dung của Chương 2 đã được công bố trong bài báo [CT1] thuộc Danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

2.1 Mở đầu

Giả sử $\mathbb{E}$ là không gian Banach thực với chuẩn là $\|\cdot\|$ và $\mathbb{E}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathbb{E}$. Trong chương này, chúng tôi nhắc lại định nghĩa hàm $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to [0; +\infty)$ được định nghĩa trong Chương 1 như sau:

$$\varphi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle Jx, y\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

Trong công trình của các tác giả A.N. Iusem và V. Mohebbi [Optim., **69(11)** (2020), 2383-2403], một thuật toán hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ được đề xuất, dưới giả thiết về tính giả đơn điệu, tính liên tục của f và tập nghiệm $S \neq \emptyset$. Một ưu điểm của thuật toán này là song hàm f không yêu cầu thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và ta có thể tìm nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ bằng cách giải một dãy các bài toán tối ưu lồi, mà các bài toán này dễ hơn bài toán gốc. Tuy nhiên, trong thuật toán này vẫn đòi hỏi giả thiết về tính giả đơn điệu trên C của song hàm f. Vậy liệu có thể xây dựng một thuật toán dùng để giải bài toán cân bằng không đơn điệu và không Lipschitz trong không gian Banach hay không? Các tác giả D. Rouhani và B. Mohebbi đã trả lời câu hỏi này trong môt công trình [J. Aust. Math. Soc., **112** (2022), 90-114]. Xuất phát từ thuật toán trên của các tác giả A. N. Iusem và V. Mohebbi, chúng tôi cũng trả lời câu hỏi này bằng cách đề xuất một thuật toán khác với thuật toán của D. Rouhani và B. Mohebbi, dùng để giải bài toán cân bằng trong không gian Banach mà song hàm f không cần một giả thiết nào về tính đơn điệu và tính Lipschitz. Với giả thiết về tính liên tục, tính lồi theo biến thứ hai của song hàm và tính khác rỗng của tập nghiệm bài toán Minty, chúng tôi chỉ ra rằng dãy sinh bởi thuật toán được đề xuất hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$.

2.2 Thuật toán chiếu thu hẹp kết hợp quy tắc tìm kiếm theo tia

Sau đây, chúng tôi luôn giả thiết rằng $\mathbb{E}$ là không gian Banach trơn đều và lồi đều, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong $\mathbb{E}$. Giả sử $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

($\mathcal{A}_1$) $f(x, .)$ là lồi trên $\mathbb{E}$ với mọi $x \in C$;

($\mathcal{A}_2$) $f(\cdot, \cdot)$ là liên tục trên $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ và đều theo biến thứ hai trên các tập bị chặn;

($\mathcal{A}_3$) $f(x, \cdot)$ là Lipschitz đều (theo x) trên các tập bị chặn, tức là với bất kỳ tập bị chặn $D \subset \mathbb{E}$ nào, tồn tại một số $L > 0$ sao cho $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L\|y - z\|$ với mọi $x, y, z \in D$;

Trong chương này, chúng tôi cần kết quả của các bổ đề sau để sử dụng chứng minh định lý hội tụ của thuật toán:

Bổ đề 2.1. *Giả sử $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ là hai dãy trong không gian Banach thực lồi đều và trơn đều $\mathbb{E}$. Nếu $\varphi(x^k, y^k) \to 0$ và dãy $\{x^k\}$ hoặc dãy $\{y^k\}$ là bị chặn, thì ta có $\|x^k - y^k\| \to 0$ khi $k \to \infty$.*

Bổ đề 2.2. *Giả sử C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Banach phản xạ, lồi chặt và trơn $\mathbb{E}$. Giả sử $\{x^k\}$ là dãy trong $\mathbb{E}$ và $u \in \mathbb{E}$. Nếu $\{x^k\}$ là dãy thỏa mãn điều kiện sau*

$$\omega_w(x^k) = \{x : x^{k_j} \rightharpoonup x\} \subset C,$$

và

$$\varphi(u, x^k) \leq \varphi(u, P_C(u)), \ \forall k, \tag{2.1}$$

thì $\varphi(P_C(u), x^k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Bổ đề 2.3. *Giả sử rằng song hàm f thỏa mãn điều kiện $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_3)$. Nếu $\{x^k\} \subset C$ là dãy bị chặn, $\beta \geq \rho_k \geq \alpha > 0$ và $\{y^k\}$ là dãy thỏa mãn*

$$y^k = \arg\min \Big\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k, y) : \ y \in C \Big\},$$

thì $\{y^k\}$ là dãy bị chặn.

Bây giờ, chúng tôi đề xuất một thuật toán để giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach thực như sau.

Thuật toán 2.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$ và các tham số $\eta, \mu \in (0, 1)$, $0 < \alpha \leq \rho_k \leq \beta$. Đặt $B_0 = C$.

Bước lặp thứ k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min \Big\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k, y) : \ y \in C \Big\}.$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Thực hiện một trong bốn quy tắc tìm kiếm theo tia sau:

Quy tắc tìm kiếm theo tia 1: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 2: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ \langle g^{k,m}, x^k - y^k\rangle \geq \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k) \text{ với } g^{k,m} \in \partial_2 f(z^{k,m}, z^{k,m}). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$, $g^k = g^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 3: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, y^k) \leq -\frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 4: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) + f(x^k, y^k) \geq -\frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Chọn $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$. Tính

$$u^k = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_k,$$
$$H_k = \{x \in E : \langle w^k, x - x^k\rangle + f(z^k, x^k) \leq 0\}.$$

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = P_{B_{k+1}}(x^g),$$

trong đó $B_{k+1} = \{x \in B_k : \varphi(u^k, x) \leq \varphi(x^k, x)\}$ và quay về *Bước lặp thứ k* với k được thay bởi $k+1$.

Bổ đề sau đưa ra kết luận về tính đúng đắn của các quy tắc tìm kiếm theo tia trong thuật toán trên.

Bổ đề 2.4. *Tại mỗi bước lặp thứ k, nếu $y^k \neq x^k$ thì ta có:*

(i) Quy tắc tìm kiếm theo tia 1, 2, 3 và 4 là xác định tốt;

(ii) $f(z^k, x^k) > 0$.

Định lý sau đây thiết lập sự hội tụ mạnh của dãy $\{x^k\}$ tới một nghiệm của bài toán cân bằng EP(C, f).

Định lý 2.1. *Giả sử rằng tập S_M khác rỗng. Khi đó, với các giả thiết $(\mathcal{A}_1) - (\mathcal{A}_3)$, các dãy $\{x^k\}$ và $\{u^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới một nghiệm x^* của bài toán EP(C, f).*

Chương 3

Phương pháp chiếu kiểu thích nghi giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Các phương pháp giải bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ thường đòi hỏi tính lồi theo biến thứ hai và tính đơn điệu hoặc đơn điệu suy rộng của song hàm f. Tính đến nay, đã có một số kết quả đạt được cho lớp bài toán cân bằng lồi và đơn điệu này. Gần đây, một số tác giả đã xây dựng thuật toán kết hợp giữa phương pháp chiếu thu hẹp và quy tắc tìm kiếm theo tia để giải bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu như công trình của các tác giả B.V. Dinh và D.S. Kim [J. Comput. Appl. Math., **302** (2016), 106-117] hay công trình của tác giả J.J. Strodiot cùng các cộng sự [J. Glob. Optim., **64** (2016), 159-178]. Tuy nhiên, tại mỗi bước lặp thứ $k+1$ để tìm x^{k+1}, ta cần phải thực hiện một phép chiếu thu hẹp trên tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc thứ k với một nửa không gian. Điều này dẫn tới chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Vì vậy, trong chương này, chúng tôi đề xuất các thuật toán sử dụng một kiểu chiếu thu hẹp đặc biệt đó là phương pháp chiếu kiểu thích nghi, để giải bài toán không đơn điệu trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. Chương này gồm hai mục, mục thứ nhất dành cho bài toán bất đẳng thức biến phân, mục thứ hai dành cho bài toán tổng quát hơn là bài toán cân bằng.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trong hai bài báo [CT2] và [CT3] thuộc Danh mục các công trình liên quân đến Luận án.

3.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân

3.1.1 Mở đầu

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, xét tích trong $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn tương ứng $\| \cdot \|$. Giả sử C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : C \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục. Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C, F) và bài toán bất đẳng thức biến phân Minty MVIP(C, F). Ta đã biết rằng $S_{MVIP} \subset S_{VIP}$ nếu F là liên tục trên C, và $S_{VIP} \subset S_{MVIP}$ nếu F là giả đơn điệu trên C.

Có rất nhiều phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân và một trong những phương pháp đóng vai trò quan trọng đó là phương pháp đạo hàm tăng cường (hay còn gọi là phương pháp chiếu kép). Phương pháp này được đề xuất bởi tác giả G.M. Korpelevich [Matekon., **12** (1976), 747-756] như sau

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y^k = P_C(x^k - \lambda F(x^k)), \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda F(y^k)), \end{cases}$$

trong đó P_C là phép chiếu lên C và $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$ (L hệ số Lipschitz của ánh xạ F). Trong công trình này, tác giả đã chứng minh rằng dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C, F) với giả thiết chính về tính giả đơn điệu và Lipschitz của ánh xạ F trên C. Để tìm được dãy $\{x^k\}$, ta phải thực hiện hai lần chiếu trên C, độ dài bước λ phụ thuộc vào hệ số Lipschitz L. Nếu hệ số L này lớn, thì độ dài bước λ nhỏ và x^{k+1} rất gần x^k, tức là sau mỗi bước lặp, x^{k+1} không cải tiến được nhiều so với x^k. Như vậy, trong trường hợp này và cả trường hợp khi ánh xạ giá F không liên tục Lipschitz hay hệ số Lipschitz không biết, khó ước lượng, thuật toán của tác giả G.M. Korpelevich sẽ kém hiệu quả khi áp dụng trực tiếp. Để khắc phục hạn chế này, các tác giả M.V. Solodov và B.F. Svaiter [SIAM J. Control Optim., **37(3)** (1999), 765-776] đã đề xuất thuật toán sau:

Thuật toán Solodov-Svaiter. Chọn $x^0 \in C$ và hai tham số $\gamma \in (0, 1)$ và $\sigma \in (0, 1)$. Có x^k, tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$, thì dừng thuật toán. Trái lại, tính

$$z^k = x^k - \eta_k r(x^k),$$

trong đó $\eta_k = \gamma^{m_k}$, với m_k là số nguyên không âm nhỏ nhất m thỏa mãn

$$\langle F(x^k - \gamma^m r(x^k)), r(x^k)\rangle \geq \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C\cap H_k}(x^k),$$

trong đó

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle F(z^k), x - z^k\rangle \leq 0\}.$$

Các tác giả đã chỉ ra rằng dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C, F) nếu ánh xạ giá F là giả đơn điệu trên C và tập nghiệm $S_{VIP} \neq \emptyset$. Bước 1 của thuật toán này tính $r(x^k)$ về cơ bản cũng giống như bước 1 của thuật toán đạo hàm tăng cường là tính y^k. Điểm khác nhau chính của hai thuật toán là trong thuật toán đạo hàm tăng cường, độ dài bước λ phụ thuộc vào hệ số Lipschitz L của F, còn thuật toán trên độ dài bước η_k tìm được bằng cách thực hiện một quy tắc tìm kiếm theo tia. Như vậy, ưu điểm của thuật toán này là không cần đến giả thiết về tính Lipschitz của ánh xạ giá F, nhưng vẫn có nhược điểm là cần đến tính giả đơn điệu của F trên C. Chính vì vậy, các tác giả M.L. Ye và Y.R. He [Comput. Optim. Appl., **60** (2015), 141-150] đã đề xuất một thuật toán chiếu thu hẹp kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia như sau:

Thuật toán YH

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và các tham số $\sigma, \gamma \in (0, 1)$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, ...$). Có x^k ta thực hiện các bước sau.

Bước 1. Tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$ thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tính $z^k = x^k - \eta_k r(x^k)$, trong đó $\eta_k = \gamma^{m_k}$, với m_k là số nguyên không âm nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\langle F(x^k) - F(x^k - \gamma^m r(x^k)), r(x^k)\rangle \leq \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Bước 3. Tính $x^{k+1} = P_{C\cap \widehat{H}_k}(x^k)$,

trong đó $\widehat{H}_k := \cap_{j=0}^{j=k} H_j$ với $H_j := \{v : \langle F(z^j), v - z^j\rangle \leq 0\}$,

và quay lại *Bước lặp k* với k được thay bởi $k + 1$.

Các tác giả M.L. Ye và Y.R. He đã chỉ ra rằng nếu F là liên tục và $S_{MVIP} \neq \emptyset$ thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C, F). Một ưu điểm của phương pháp này là ta áp dụng được để tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu. Tuy nhiên, tại mỗi bước lặp thứ $k+1$ để tìm x^{k+1}, ta cần phải giải bài toán tối ưu mà tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc thứ k với nửa không gian H_k. Điều này dẫn tới chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Vậy liệu có một thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu mà không dùng phương pháp chiếu thu hẹp này hay không? Để trả lời cho câu hỏi này, chúng tôi đề xuất sửa đổi Thuật toán Solodov-Svaiter sang một thuật toán mới giải VIP(C, F) và đáp ứng được hai điều kiện trên. Đặc biệt, chúng tôi xét cả hai trường hợp khi F không là Lipschitz, độ dài bước tìm được bằng cách thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia, và trường hợp F là Lipschitz với hệ số L, độ dài bước được chỉ rõ và phụ thuộc vào L.

3.1.2 Một số thuật toán chiếu kiểu thích nghi giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu

Thuật toán 3.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và hai tham số $\eta \in (0, 1)$ và $\sigma \in (0, 1)$, $k = 0$.

Bước lặp $k (k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau.

Bước 1. Tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\langle F(x^k - \eta^m r(x^k)), r(x^k)\rangle \geq \sigma \|r(x^k)\|^2. \tag{3.1}$$

Đặt

$$z^k = x^k - \eta_k r(x^k),$$

với $\eta_k = \eta^{m_k}$.

Bước 3. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.2}$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$
$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\},$$
$$H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z^j), x - z^j \rangle \le 0\},$$

và quay về *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Nhận xét 3.1. *Điểm khác nhau chủ yếu giữa Thuật toán 3.1 và Thuật toán Solodov-Svaiter nằm trong Bước 3. Với Thuật toán 3.1, x^k được chiếu trên $C \cap H_{t_k}$ trong đó H_{t_k} được chọn từ tập $\{H_1, H_2, ..., H_k\}$ sao cho $d(x^k, H_{t_k}) = \max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\}$. Trong khi đó, với thuật toán Solodov-Svaiter, x^k được chiếu trên $C \cap H_k$. Định lý dưới đây chỉ ra rằng Thuật toán 3.1 không chỉ áp dụng được cho lớp bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu mà còn được sử dụng cả trong trường hợp không đơn điệu.*

Định lý 3.1. *Giả sử rằng ánh xạ F là liên tục và tập nghiệm của bài toán Minty S_{MVIP} là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán VIP(C, F).*

Với mỗi $\mu > 0$, bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C, F) tương đương với bài toán sau

$$\langle \mu F(x), y - x \rangle \ge 0, \quad \forall y \in C.$$

Bằng cách đặt $r(x, \mu) = x - P_C(x - \mu F(x))$, chúng tôi đề xuất thuật toán sau.

Thuật toán 3.2

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và bốn tham số $\eta_{-1} > 0$, $\gamma, \sigma \in (0,1), \theta > 1$.

Bước lặp k ($k = 0, 2, ...$). Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $r(x^k, \mu_k) = x^k - P_C(x^k - \mu_k F(x^k))$, trong đó $\mu_k := \min\{\theta\eta_{k-1}, 1\}$. Nếu $r(x^k, \mu_k) = 0$ thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\langle F(x^k - \gamma^m \mu_k r(x^k, \mu_k)), r(x^k, \mu_k) \rangle \ge \frac{\sigma}{\mu_k} \|r(x^k, \mu_k)\|^2. \tag{3.3}$$

Đặt $\eta_k := \gamma^{m_k}.\mu_k$ và $z^k = x^k - \eta_k r(x^k, \mu_k)$.

Bước 3. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.4}$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k};$$
$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\};$$
$$H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z^j), x - z^j\} \leq 0\},$$

và quay lại *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Định lý sau cho ta sự hội tụ của Thuật toán 3.2.

Định lý 3.2. *Giả sử ánh xạ giá F là liên tục và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân Minty S_{MVIP} là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.2 hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C, F).*

Một ưu điểm của Thuật toán 3.1 và Thuật toán 3.2 là có thể áp dụng được cho bài toán bất đẳng thức biến phân mà ánh xạ giá F là không đơn điệu và không thỏa mãn điều kiện Lipschitz. Tuy nhiên, trong *Bước 2* của các thuật toán này, chúng ta phải thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia để xác định độ dài bước. Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều n lớn và F có cấu trúc phức tạp. Vì vậy, chúng tôi đề xuất một thuật toán mà quy tắc tìm kiếm theo tia này có thể loại bỏ được nếu ánh xạ giá F thỏa mãn điều kiện Lipschitz như sau.

Thuật toán 3.3

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và các tham số $\sigma \in (0,1), 0 < \lambda \leq \frac{1-\sigma}{L}$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, ...$). Có x^k ta thực hiện các bước sau.

Bước 1. Tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$ thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tính

$$z^k = x^k - \lambda r(x^k),$$
$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.5}$$

trong đó,

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\},$$
$$H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z^j), x - z^j\rangle \le 0\},$$

và quay lại *Bước lặp* k với k được thay bởi $k+1$.

Bây giờ, chúng ta đi đến định lý sau đây về sự hội tụ của Thuật toán 3.3.

Định lý 3.3. *Giả sử F là liên tục Lipschitz với hệ số L trên C và tập nghiệm S_{MVIP} của bài toán MVIP(C, F) là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.3 hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C, F).*

3.2 Bài toán cân bằng

3.2.1 Mở đầu

Giả sử Ω là một tập con lồi mở trong $\mathbb{R}^n$ và chứa một tập lồi đóng khác rỗng C, và $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$. Chúng tôi bắt đầu phần này bằng việc nhắc lại một thuật toán chiếu (ký hiệu là Thuật toán SVN) giải bài toán cân bằng không đơn điệu được đề xuất bởi nhóm tác giả J. Strodiot [J. Glob. Optim., **64** (2016), 159-178] (cũng như của các tác giả B.V. Dinh và D.S. Kim [J. Comput. Appl. Math., **302** (2016), 106-117]).

Thuật toán SVN.

Bước khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$, chọn các tham số $\eta \in (0, 1), \rho > 0$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho}\|y - x^k\|^2 : y \in C\right\}.$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Sử dụng một trong hai quy tắc tìm kiếm theo tia sau:

Quy tắc tìm kiếm theo tia 1: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \ge \frac{1}{\rho}\|x^k - y^k\|^2. \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 2: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) + f(x^k, y^k) \geq -\frac{1}{\rho}\|x^k - y^k\|^2. \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Chọn

$$w^k \in \partial_2 f(z^k, z^k),$$
$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - z^k\rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.6}$$

trong đó

$$C_k = \cap_{i=0}^k [C \cap H_i],$$

và quay về *Bước lặp* k với k được thay bởi $k+1$.

Nhóm các tác giả J.J. Strodiot đã chỉ ra rằng với giả thiết về tính lồi và tính liên tục của song hàm f, tính khác rỗng của tập nghiệm bài toán Minty S_M, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán SVN hội tụ tới một nghiệm của bài toán cân bằng EP(C, f). Ưu điểm của thuật toán này là giúp tìm nghiệm của bài toán cân bằng mà không cần đến giả thiết về tính liên tục của song hàm f. Tuy nhiên, cũng như trong trường hợp bất đẳng thức biến phân ở mục trước, tại mỗi bước lặp, ta phải giải một bài toán tối ưu trên tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc ở bước trước và một siêu phẳng (chính là thực hiện phép chiếu thu hẹp). Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Thêm vào đó, trong thuật toán SVN, các tác giả sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước. Tuy nhiên, trong trường hợp khi song hàm f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz hay f có cấu trúc phức tạp, thì việc thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia gặp khó khăn cũng như chi phí tính toán lớn. Do đó chúng ta khó có thể áp dụng được thuật toán SVN trong những trường hợp này. Chính vì vậy, chúng tôi đề xuất sửa đổi Thuật toán SVN thành một thuật toán mới giải EP(C, f) mà không cần sử dụng phép chiếu thu hẹp cũng như giả thiết về tính đơn điệu của f trong ba trường hợp: f không thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và hệ số Lipschitz ước lượng được hoặc không ước lượng được.

3.2.2 Một số thuật toán chiếu kiểu thích nghi giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Trong phần này, chúng tôi giả thiết $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện sau:

($\mathcal{B}_1$) $f(x, .)$ là lồi và khả dưới vi phân trên C với mọi $x \in C$;

($\mathcal{B}_2$) $f(\cdot, \cdot)$ là liên tục trên $\Omega \times \Omega$;

($\mathcal{B}_3$) $f(\cdot, \cdot)$ thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C với hệ số $c_1, c_2 > 0$, tức là

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1\|x - y\|^2 - c_2\|y - z\|^2, \ \forall x, y, z \in C.$$

Bây giờ, chúng tôi xét bài toán EP(C, f) trong đó, C là một tập lồi đóng khác rỗng được chứa trong một tập lồi mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng. Giả sử G là hàm khả vi liên tục và lồi mạnh trên C với hệ số $\tau > 0$.

Thuật toán 3.4

Bước khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$, chọn các tham số $\eta, \mu \in (0, 1), \rho > 0$ và đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle\nabla G(x^k), y - x^k\rangle] : y \in C\Big\}.$$

Nếu $f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle\nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle] \geq 0$, thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Thực hiện một trong hai quy tắc tìm kiếm theo tia sau:

Quy tắc tìm kiếm theo tia 1: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 2: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) + f(x^k, y^k) \geq -\frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Chọn

$$w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k),$$

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - x^k \rangle + f(z^k, x^k) \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.9}$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\},$$

và quay về *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Định lý 3.4. *Giả sử rằng f thỏa mãn hai điều kiện $(\mathcal{B}_1), (\mathcal{B}_2)$, G là hàm khả vi liên tục và lồi mạnh trên C với hệ số $\tau > 0$, và tập nghiệm S_M là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.4 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán EP(C, f).*

Một ưu điểm của Thuật toán 3.4 là áp dụng để giải được cho bài toán cân bằng không đơn điệu và không Lipschitz mà không cần sử dụng phương pháp chiếu thu hẹp. Tuy nhiên, trong Bước 2 của thuật toán này, chúng ta cần phải thực hiện một quy tắc tìm kiếm theo tia để xác định độ dài bước. Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian n lớn và f có cấu trúc phức tạp. Do đó, chúng tôi đề xuất thuật toán sau áp dụng khi song hàm f thỏa mãn thêm một giả thiết là điều kiện kiểu Lipschitz với hai hằng số c_1 và c_2. Khi đó, quy tắc tìm kiếm theo tia trong Bước 2 của Thuật toán 3.4 có thể được loại bỏ.

Thuật toán 3.5

Bước khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$, chọn các tham số $\mu \in (0,1)$ và ρ, λ sao cho $0 < \rho < \frac{(1-\mu)\tau}{c_2}$, $0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{(1-\mu)\tau - \rho c_2}{\rho c_1}}$, hoặc $0 < \rho < \frac{\tau\mu}{c_2}, 0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{\tau\mu - \rho c_2}{\rho c_1}}$. Đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k\rangle] : y \in C\right\}.$$

Nếu $f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle] \geq 0$, thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Tính $z^k = (1-\lambda)x^k + \lambda y^k$.

Bước 3. Chọn $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$. Đặt

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - x^k\rangle + f(z^k, x^k) \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\},$$

và quay về *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ của Thuật toán 3.5 trong nội dung định lý sau.

Định lý 3.5. *Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$ - $(\mathcal{B}_3)$ (với các hằng số c_1, c_2 đã xác định được), φ là một hàm khả vi liên tục và lồi mạnh với hệ số $\tau > 0$ và S_M là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.5 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán EP(C, f).*

Ưu điểm của Thuật toán 3.5 là ta có thể áp dụng cho một lớp các bài toán cân bằng không đơn điệu và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, mà không cần thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước. Tuy nhiên, độ dài bước này tỷ lệ nghịch với $\frac{1}{c}$ trong đó $c = \max\{c_1, c_2\}$, vì vậy, khi hệ số kiểu Lipschitz của f là lớn thì độ dài bước nhỏ và thuật toán có thể chậm. Do đó, khi hệ số c của f là chưa biết hoặc là lớn, thì chúng tôi đề xuất một thuật toán có độ dài bước không phụ thuộc vào hệ số Lipschitz của f như sau.

Thuật toán 3.6

Bước khởi tạo. Lấy $x^{-1}, x^0, y^0 \in C$. Chọn các tham số như sau $\rho > 0$, $\theta \in (0, \frac{4\tau}{3\rho})$, $\lambda_{-1} \in (0, \infty)$. Lấy $\{\delta_i\} \subset (0, \infty)$ là một dãy không tăng thỏa mãn $\lim_{i\to\infty} \delta_i = 0$. Đặt $C_0 = C$ và $i = k = 0$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k, y^k, λ_k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lấy $w^k \in \partial_2 f(y^k, x^k)$. Đặt

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - x^k\rangle + f(y^k, x^k) \le 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\}.$$

Bước 2. Nếu

$$\lambda_{k-1}\left(f(x^{k-1}, x^k) - f(x^{k-1}, y^k) - f(y^k, x^k)\right) \le \frac{\theta}{2}(\|x^{k-1} - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2)$$

thì đặt $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ ngược lại đặt $i = i+1$ và $\lambda_k = \delta_i$. Tính

$$y^{k+1} = \arg\min\left\{\lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k\rangle] : y \in C\right\}.$$

Nếu $y^{k+1} = x^k$ thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, chuyển sang Bước lặp k với k được thay bởi $k+1$.

Sau đây, chúng tôi trình bày kết quả hội tụ cho Thuật toán 3.6 thông qua nội dung của định lý sau.

Định lý 3.6. *Giả sử song hàm cân bằng f thỏa mãn các điều kiện $(\mathcal{B}_1)$ - $(\mathcal{B}_3)$ (với hằng số c_1, c_2 chưa biết), G là một hàm khả vi liên tục và lồi mạnh với hệ số $\tau > 0$ và tập nghiệm S_M là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.6 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán cân bằng EP(C, f).*

Trong trường hợp, nếu $f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle$, với $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số L, thì chúng tôi đề xuất thuật toán mới sau để giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu và thỏa mãn điều kiện Lipschitz, trong đó hằng số Lipschitz chưa biết, mà không cần sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước.

Thuật toán 3.7

Bước khởi tạo. Lấy $x^{-1}, x^0, y^0 \in C$. Chọn các tham số $\rho > 0$, $\theta \in (0, \frac{4\tau}{3\rho})$, $\lambda_{-1} \in (0, \infty)$. Chọn $\{\delta_i\} \subset (0, \infty)$ là dãy không tăng thỏa mãn $\lim_{i\to\infty} \delta_i = 0$. Đặt $C_0 = C$, và $i = k = 0$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k, y^k, λ_k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đặt

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(y^k), x - y^k\rangle \le 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\}.$$

Bước 2. Nếu $\lambda_{k-1}\langle F(x^{k-1}) - F(y^k), x^k - y^k\rangle \leq \frac{\theta}{2}(\|x^{k-1} - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2)$ thì đặt $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ ngược lại đặt $i = i + 1$ và $\lambda_k = \delta_i$. Tính

$$y^{k+1} = P_C(x^k - \rho\lambda_k F(x^k)).$$

Nếu $y^{k+1} = x^k$ thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán VIP(C, F). Ngược lại, chuyển sang Bước lặp k với k được thay bởi $k + 1$.

Hệ quả 3.1. *Giả sử F là liên tục Lipschitz với hệ số L trên Ω (với hằng số Lipschitz L chưa biết), và tập nghiệm của bài toán MVIP(C, F) là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.7 hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C, F).*

Kết luận và kiến nghị

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương pháp giải bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- *Xây dựng được Thuật toán 2.1 bằng cách kết hợp phương pháp chiếu thu hẹp và các kiểu quy tắc tìm kiếm theo tia tương ứng để giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu trong không gian Banach. Chứng minh được dãy lặp sinh bởi thuật toán đó hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng (Định lý 2.1).*

- *Xây dựng được hai Thuật toán 3.1 và 3.2 để giải bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C, F) không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Trong trường hợp ánh xạ giá F thỏa mãn thêm điều kiện Lipschitz, chúng tôi chỉ cần sử dụng phương pháp chiếu kiểu thích nghi, mà không cần thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia. Điều này được chỉ ra trong Thuật toán 3.3. Chúng tôi cũng đã chứng minh được dãy lặp sinh bởi các thuật toán trên hội tụ tới nghiệm của bài toán đang xét (Định lý 3.1, 3.2, 3.3).*

- *Xây dựng được Thuật toán 3.4 để giải bài toán cân bằng EP(C, f) không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Trong trường hợp song hàm f thỏa mãn thêm điều kiện kiểu Lipschitz, chúng tôi đề xuất thêm hai Thuật toán 3.5 và 3.6 mà không cần dùng đến quy tắc tìm kiếm theo tia. Chúng tôi cũng chứng minh được dãy lặp sinh bởi các thuật toán trên hội tụ tới nghiệm của bài toán đang xét (Định lý 3.4, 3.5, 3.6).*

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, trong thời gian tới chúng tôi dự định sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

- *Xây dựng một số thuật toán chiếu kiểu thích nghi giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert.*
- *Xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng tách, bài toán cân bằng hai cấp không đơn điệu.*
- *Nghiên cứu đề xuất thuật toán hội tụ yếu tới nghiệm của dãy lặp cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach.*

Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án

[CT1] B.V. Dinh, H.D. Manh, T.T.H. Thanh (2023), Extragradient algorithms with linesearches for solving nonmonotone equilibrium problems in Banach spaces, *Vietnam Journal of Mathematics,* http://doi.org/10.1007/s10013-023-00649-9 (Scopus).

[CT2] B.V. Dinh, H.D. Manh, T.T.H. Thanh (2022), A modified Solodov-Svaiter method for solving nonmonotone variational inequality problems, *Numerical Algorithms,* **90**, 1715–1734 (SCIE).

[CT3] T.T.H. Thanh, H.D. Manh, N.T.T. Ha, B.V. Dinh (2023), A novel method for solving nonmonotone equilibrium problems (submitted).

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

1. Xêmina của Trung tâm Toán ứng dụng và Tin học, Viện Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
2. Xêmina của Viện Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

3. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XVI (24/03/2021), lần thứ XVII (22/03/2022), Học viện Kỹ thuật Quân sự.

4. Hội thảo Tối ưu và tính toán Khoa học lần thứ 19 (22-24/4/2021), Ba Vì, Hà Nội.

5. Hội thảo Tối ưu và tính toán Khoa học lần thứ 20 (21-23/4/2022) , Ba Vì, Hà Nội.

6. Hội thảo Những hướng mới trong tối ưu tính toán và ứng dụng (26-27/12/2021), VIASM, Hà Nội.