BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

TRẦN THỊ HUYỀN THANH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHIẾU KIỂU THU HẸP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG KHÔNG ĐƠN ĐIỆU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

TRẦN THỊ HUYỀN THANH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHIẾU KIỂU THU HẸP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG KHÔNG ĐƠN ĐIỆU

NGÀNH: **TOÁN ỨNG DỤNG**

MÃ SỐ: **9 46 01 12**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

1. PGS. TS. Bùi Văn Định

2. TS. Hy Đức Mạnh

HÀ NỘI - 2024

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, dưới sự hướng dẫn của các cán bộ trong tập thể hướng dẫn khoa học. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đều đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả, số liệu trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác. Các tài liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

NCS. Trần Thị Huyền Thanh

Lời cảm ơn

Bản luận án này được hoàn thành tại Trung tâm Toán ứng dụng và tin học, Viện Công nghệ Thông tin và truyền thông, Học viện Kỹ thuật Quân sự, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Bùi Văn Định và TS Hy Đức Mạnh. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới hai thầy hướng dẫn. Các thầy đã luôn dành cho trò sự quan tâm, động viên, giúp đỡ rất tận tình trong suốt thời gian làm nghiên cứu sinh, đặc biệt là PGS. TS Bùi Văn Định, người đã không quản công sức, từng bước dẫn dắt, truyền cho trò niềm đam mê học tập, nghiên cứu, cùng nhiều kỹ năng, kiến thức quý báu, đồng thời luôn khích lệ trò từng bước vượt qua những khó khăn, thử thách trên bước đường học tập, nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các Thầy Cô trong Trung tâm Toán ứng dụng và Tin học, anh chị em, đồng nghiệp trong Viện Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Học viện Kỹ thuật Quân sự đã luôn quan tâm, tạo điều kiện và đã cho tác giả những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập.

Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám đốc, Phòng Sau Đại học, Viện Công nghệ Thông tin và truyền thông, Học viện Kỹ thuật Quân sự đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Bản luận án này sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự cảm thông, chia sẻ và giúp đỡ từ những người thân trong gia đình. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới bố mẹ hai bên gia đình. Đặc biệt, xin cảm ơn bố mẹ, chồng và ba con yêu quý, những người đã luôn gần gũi, cảm thông và sẻ chia cùng tôi trong suốt thời gian qua. Tác giả thành kính dâng tặng món quà tinh thần này đến gia đình thân yêu với tất cả tấm lòng biết ơn, yêu thương và trân trọng nhất.

Tác giả

Mục lục

Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	Tập hợp các số thực mở rộng
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid thực n chiều
$\mathbb{H}$	Không gian Hilbert thực
$\mathbb{E}$	Không gian Banach thực
$\mathbb{E}^*$	Không gian đối ngẫu của không gian Banach $\mathbb{E}$
$\|x\|$	Chuẩn của véc tơ x
$\langle x^*, x\rangle$	Ánh xạ đối ngẫu giữa $\mathbb{E}$ và $\mathbb{E}^*$
x^T	véc tơ hàng là chuyển vị của véc tơ cột x
A^{T}	Ma trận chuyển vị của ma trận A
$A \times B$	Tích Descartes của hai tập hợp A và B
$\min_{x\in C} f(x)$	Giá trị cực tiểu của f trên tập C
$\arg\min\{f(x) \mid x \in C\}$	Tập các điểm cực tiểu của hàm f trên C
$\operatorname{dom} f = \{x \in C : f(x) < +\infty\}$	Miền hữu hiệu của hàm số f
$\operatorname{epi} f = \{(x,\gamma) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \gamma\}$	Trên đồ thị của hàm số f
$\partial\varphi(x)$	Dưới vi phân của hàm φ tại x
$x^k \to x$	Dãy x^k hội tụ mạnh tới x.
$x^k \rightharpoonup x$	Dãy x^k hội tụ yếu tới x
$\limsup$	Giới hạn trên
$\liminf$	Giới hạn dưới

$d_C(x)$	Khoảng cách từ x đến tập C
$P_C(x)$	Hình chiếu của x lên tập C
$N_C(x)$	Nón pháp tuyến ngoài của C tại x
$\mathrm{EP}(C,f)$	Bài toán cân bằng được xác định bởi tập C và song hàm f
$\mathrm{MEP}(C,f)$	Bài toán cân bằng Minty được xác định bởi tập C và song hàm f
$\mathrm{VIP}(C,F)$	Bài toán bất đẳng thức biến phân được xác định bởi tập C và ánh xạ F
$\mathrm{MVIP}(C,F)$	Bài toán bất đẳng thức biến phân Minty xác định bởi tập C và ánh xạ F
S	Tập nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C,f)$
S_M	Tập nghiệm của bài toán $\mathrm{MEP}(C,f)$
S_{VIP}	Tập nghiệm của bài toán $\mathrm{VIP}(C,F)$
S_{MVIP}	Tập nghiệm của bài toán $\mathrm{MVIP}(C,F)$

Mở đầu

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Thuật ngữ "cân bằng (equilibrium)" đã được sử dụng rộng rãi trong Vật lý, Hóa học, Sinh học, Kỹ thuật và Kinh tế học. Nó thường đề cập đến các điều kiện hoặc trạng thái của một hệ thống, trong đó, tất cả các tác động cạnh tranh đều cân bằng. Chẳng hạn, trong Vật lý, cân bằng cơ học là trạng thái mà trong đó tổng của tất cả các lực và mô men lên mỗi phần tử của hệ thống đều bằng không, trong khi chất lưu được cho là ở trạng thái cân bằng thủy tĩnh khi nó ở trạng thái nghỉ, hoặc khi vận tốc dòng chảy tại mỗi điểm không đổi theo thời gian. Trong Hóa học, cân bằng động lực là trạng thái của một phản ứng thuận nghịch, trong đó, tốc độ của phản ứng thuận bằng tốc độ của phản ứng nghịch. Trong Sinh học, trạng thái cân bằng di truyền biểu thị tình trạng, trong đó, một kiểu gen không tiến hóa trong quần thể từ thế hệ này qua thế hệ khác. Trong kỹ thuật, cân bằng giao thông là sự phân bố ổn định dự kiến của lưu lượng trên các con đường công cộng hoặc qua các mạng máy tính, viễn thông. Hơn nữa, lý thuyết cân bằng nổi tiếng là một nhánh cơ bản của Kinh tế học nghiên cứu các động lực của cung, cầu và giá cả trong một nền kinh tế trong phạm vi một trong hai thị trường (cân bằng riêng) hoặc một vài thị trường (cân bằng chung).

Sự cân bằng đặc biệt rất quan trọng trong Toán học, cụ thể là trong các hệ động lực học, phương trình vi phân đạo hàm riêng và phép tính biến phân. Sau sự đột phá của lý thuyết trò chơi và khái niệm cân bằng Nash, thuật ngữ này đã được sử dụng trong toán học trong các ngữ cảnh rộng hơn rất nhiều bao gồm cả những khía cạnh quan trọng của vận trù học và quy hoạch toán học. Nhiều bài toán liên quan đến sự cân bằng bao gồm một số trong chúng đã kể ở trên có thể được nhìn nhận trong một thể thống nhất thông qua các mô hình toán học khác nhau như: bài toán tối ưu, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu, trò chơi không hợp tác .... Hầu hết các mô hình toán học này có cùng một cấu trúc chung cơ bản, cho phép chúng ta phát biểu chúng một cách thuận tiện theo một dạng thức duy nhất. Ngược lại, nếu có nhiều mô hình cùng nằm trong một cấu trúc thống nhất sẽ cho phép chúng ta có thể thiết lập công thức chung cho cấu trúc thống nhất đó, như vậy chúng ta hoàn toàn có thể phát triển các nghiên cứu về lý thuyết cũng như thuật toán cho mô hình chung, từ đó mang lại khả năng ứng dụng rộng rãi hơn cho các mô hình riêng lẻ.

Mô hình chung cho bài toán cân bằng được nghiên cứu trong luận án này được phát biểu như sau:

Cho $\mathbb{E}$ là một không gian Banach thực, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{E}$ và $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng, tức là $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$. Bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \text{ với mọi } y \in C.$$

Bài toán này xuất hiện lần đầu trong công trình của Nikaido - Isoda năm 1955 khi tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác trong [37], nó cũng được xét đến dưới dạng bất đẳng thức minimax vào năm 1972 bởi tác giả Ky Fan, vì thế nó còn được gọi là bất đẳng thức Ky Fan [17]. Bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ thường được sử dụng để thiết lập điểm cân bằng trong lý thuyết trò chơi, chính vì vậy, nó được gọi là *Bài toán cân bằng (Equilibrium problem)* theo cách gọi của các tác giả L.D. Muu và W. Oettli năm 1992 trong [33], E. Blum và W. Oettli năm 1994 trong [7].

Bài toán cân bằng liên kết với $\mathrm{EP}(C, f)$ được gọi là bài toán cân bằng Minty, ký hiệu là $\mathrm{MEP}(C, f)$ được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } u^* \in C \text{ sao cho } f(y, u^*) \leq 0 \text{ với mọi } y \in C. \tag{1}$$

Bài toán cân bằng khá đơn giản về mặt hình thức, nhưng nó bao hàm nhiều lớp bài toán quen thuộc như: Bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động Kakutani, bài toán điểm yên ngựa, mô hình cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác...(xem [6, 7, 21, 33]). Bài toán cân bằng được xem là một mô hình toán học thống nhất cho nhiều lớp các bài toán quan trọng riêng lẻ. Bởi lẽ đó, nhiều kết quả đã biết của các bài toán nói trên có thể mở rộng cho bài toán cân bằng tổng quát với những điều chỉnh phù hợp, từ đó có thể đem lại nhiều ứng dụng rộng lớn. Hai hướng nghiên cứu chính của bài toán cân bằng được nhiều nhà toán học quan tâm đó là định tính và định lượng. Nghiên cứu định tính là nghiên cứu về phương diện lý thuyết như sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, tính ổn định nghiệm và đã được nhiều nhà nghiên cứu đặc biệt quan tâm, có thể kể đến các tác giả như M. Bianchi và S. Schaible trong [5], G. Bigi và các đồng tác giả trong [6], I.V. Konnov trong [26], L.D. Muu và W. Oettli trong [33]. Nghiên cứu định lượng là xây dựng phương pháp giải, đánh giá tốc độ hội tụ của các thuật toán. Do tính ứng dụng thực tiễn nên phương pháp giải đóng vai trò quan trọng trong các nghiên cứu gần đây. Đến nay đã có khá nhiều kết quả đạt được như của các tác giả G. Bigi và các đồng tác giả [6], B.V. Dinh và D.S. Kim [14], B.V. Dinh và L.D. Muu trong [15], G. Mastroeni trong [31], A. Moudafi trong [32], L.D. Muu trong [42], L.D. Muu và L.X. Thanh trong [36], N.T.T. Thuy trong [53], N.T. Vinh và L.D. Muu trong [56] và đã được các tác giả L.D. Muu, N.V. Hien, T.D. Quoc, N.V. Quy áp dụng vào các mô hình kinh tế trong [34, 35].

Trong vài năm trở lại đây, việc nghiên cứu thuật toán giải bài toán cân bằng đã trở thành một vấn đề thời sự và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Tuy nhiên đa phần các kết quả đã đạt được mới dừng ở trong không gian Hilbert. Tính đến thời điểm hiện nay, đã có nhiều phương pháp giải bài toán cân bằng trong không gian Hilbert dựa vào tính chất đơn điệu của song hàm f, trong đó, có thể kể đến các phương pháp hàm gap [30], phương pháp nguyên lý bài toán phụ [31, 38], phương pháp điểm gần kề [32], phương pháp chiếu kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia [15, 16, 21, 41, 42]... Nhìn chung, kỹ thuật chứng minh dãy lặp $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán hội tụ đến nghiệm của bài toán cân bằng trong trường hợp song hàm cân bằng đơn điệu hoặc đơn điệu suy rộng, bao gồm các bước sau:

- Xây dựng bất đẳng thức $\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|$ với $x^* \in S_M$. Từ đó suy ra dãy $\|x^k - x^*\|$ hội tụ.

- Tồn tại dãy $\{x^{k_l}\} \subset \{x^k\}$ hội tụ yếu đến $\bar{x}$.

- Chỉ ra $\bar{x}$ là nghiệm của EP(C, f).
- Thay $x^* = \bar{x}$ vào bất đẳng thức ở Bước 1 và suy ra dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu đến $\bar{x}$ là nghiệm của EP(C, f).

Trong kỹ thuật chứng minh trên đây, với giả thiết về tính liên tục và đơn điệu (hoặc đơn điệu suy rộng) của song hàm f, thì tập nghiệm của hai bài toán EP(C, f) và MEP(C, f) trùng nhau, tức là $S_M = S$. Do đó, trong Bước 4 của lược đồ chứng minh trên, ta có thể thay $x^* = \bar{x}$ được. Tuy nhiên, trong trường hợp song hàm f không đơn điệu, hai tập nghiệm của hai bài toán này không trùng nhau. Đây chính là một khó khăn trong kỹ thuật chứng minh với bài toán cân bằng không đơn điệu và sẽ được khắc phục trong nội dung luận án này.

Gần đây, bài toán cân bằng được nhiều nhà khoa học mở rộng nghiên cứu phương pháp tìm nghiệm trong không gian Banach như trong [9, 12, 19, 20, 28, 40, 43, 47, 51]. Trong số đó, có nhiều nghiên cứu tập trung dựa vào tính chất đơn điệu của song hàm f như trong [28, 43, 51], hoặc tính giả đơn điệu của f như trong [19, 20, 22]. Tuy nhiên, các kết quả này còn chưa nhiều, đặc biệt là các kết quả cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach chưa xuất hiện nhiều. Trong không gian Hilbert sử dụng kỹ thuật chứng minh như trình bày ở trên, để đưa ra được bất đẳng thức ở Bước 1, các tác giả sử dụng

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 = \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \|x^k - x^*\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^k - x^*\rangle.$$

Tuy nhiên, trong không gian Banach, chúng tôi không đưa ra được khai triển sử dụng tích vô hướng như kiểu này. Đây cũng chính là một khó khăn khi thực hiện giải bài toán cân bằng trong không gian Banach so với không gian Hilbert và không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và sẽ được trả lời trong nội dung của luận án này. Một trong số những phương pháp tiêu biểu giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach đó là phương pháp chiếu thu hẹp được đề xuất trong [46]. Ưu điểm của phương pháp này là giúp chúng ta tìm được nghiệm của bài toán cân bằng không đơn điệu và không Lipschitz trong không gian Banach. Tuy nhiên, liệu có một thuật toán nào khác với nhiều lựa chọn quy tắc tìm kiếm theo tia để giải bài toán này không? Luận án này sẽ đề xuất một thuật toán khác để trả lời cho câu hỏi này.

Trong luận án này, bên cạnh việc xét bài toán cân bằng, chúng tôi cũng xét bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ với tích trong $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn tương ứng $\| \cdot \|$. Giả sử C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : C \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục. Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C,F):

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C,$$

và bài toán liên kết với VIP(C,F) là bài toán bất đẳng thức biến phân Minty MVIP(C,F) :

$$\text{Tìm } u \in C \text{ sao cho } \langle F(y), u - y \rangle \leq 0, \ \forall y \in C.$$

Có rất nhiều phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân và phương pháp chiếu thu hẹp được trình bày ở trên cũng được áp dụng bởi các tác giả M.L. Ye và Y.R. He trong [58] như sau:

Thuật toán YH [58]. Chọn $x^0 \in C$ là điểm xuất phát, $\sigma \in (0,1)$ và $\gamma \in (0,1)$. Gán $k = 0$.

Bước 1. Có x^k, tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$, thì dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Tính $y^k = x^k - \eta_k r(x^k)$, trong đó $\eta_k = \gamma^{m_k}$, với m_k là số nguyên không âm nhỏ nhất thỏa mãn

$$\langle F(x^k) - F(x^k - \gamma^m r(x^k)), r(x^k) \rangle \leq \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Bước 3. Tính

$$x^{k+1} = P_{C \cap \widehat{H}_k}(x^k),$$

trong đó $\widehat{H}_k := \bigcap_{j=0}^{j=k} H_j$ với $H_j := \{v : \langle F(y^j), v - y^j \rangle \leq 0\}$. Gán $k = k+1$ và quay lại *Bước 1.*

Các tác giả M.L. Ye và Y.R. He đã chỉ ra rằng nếu F là liên tục và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân Minty MVIP$(C,F) \neq \emptyset$ thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C,F). Một ưu điểm của phương pháp này là có thể áp dụng được để tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu. Đây cũng là cơ sở để mở rộng nghiên cứu phương pháp này cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert [13, 49]. Tuy nhiên, tại mỗi bước lặp thứ $k+1$ để tìm x^{k+1}, ta cần phải giải bài toán tối ưu mà tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc thứ k với nửa không gian H_k (chính là thực hiện một phép chiếu thu hẹp). Điều này dẫn tới chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Vậy liệu có một thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu mà không dùng phương pháp chiếu thu hẹp hay không? Trong luận án này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới giải VIP(C,F) và đáp ứng được hai điều kiện trên. Đặc biệt, chúng tôi xét cả hai trường hợp khi F không là Lipschitz, độ dài bước tìm được bằng cách thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia và trường hợp F là Lipschitz với hệ số L, độ dài bước được chỉ rõ và phụ thuộc vào L.

Với bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert, các tác giả trong [49] đã đề xuất Thuật toán SVN để giải. Ưu điểm của thuật toán này là giúp tìm nghiệm của bài toán cân bằng mà không cần đến giả thiết về tính liên tục của song hàm f. Tuy nhiên, cũng như trong trường hợp bất đẳng thức biến phân, tại mỗi bước lặp, ta phải giải một bài toán tối ưu trên tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc ở bước trước và một siêu phẳng (chính là thực hiện phép chiếu thu hẹp). Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Thêm vào đó, trong thuật toán SVN, các tác giả sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước. Tuy nhiên, trong trường hợp khi song hàm f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz hay f có cấu trúc phức tạp, thì việc thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia gặp khó khăn cũng như chi phí tính toán lớn. Do đó, chúng ta khó có thể áp dụng được thuật toán SVN trong những trường hợp này. Chính vì vậy, chúng tôi đề xuất sửa đổi Thuật toán SVN trong [49] thành một thuật toán mới giải EP(C,f) mà không cần sử dụng phép chiếu thu hẹp và giả thiết về tính đơn điệu của f trong ba trường hợp: f không thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và hệ số Lipschitz ước lượng được hoặc không ước lượng được.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu các chủ điểm sau về bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân:

(i) Xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach bằng phương pháp chiếu thu hẹp kết hợp quy tắc tìm kiếm theo tia.

(ii) Xây dựng thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ bằng phương pháp chiếu kiểu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.

(iii) Xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu Lipschitz hoặc không Lipschitz trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ bằng phương pháp chiếu kiểu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu.

Phạm vi nghiên cứu: Các phương pháp giải bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, đặc biệt, tập trung vào phương pháp chiếu thu hẹp, phương pháp chiếu kiểu thích nghi. Lớp hàm nghiên cứu là hàm lồi, không đơn điệu, Lipschitz hoặc không Lipschitz.

4. Phương pháp nghiên cứu

Xuất phát từ mục tiêu của đề tài nghiên cứu, cùng với các phương pháp cơ bản của giải tích hàm, giải tích lồi, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu như sau:

- Để giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu trong không gian Banach, chúng tôi sử dụng phương pháp chiếu thu hẹp kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.

- Để tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, chúng tôi sử dụng phương pháp chiếu kiểu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia.

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- *Đề xuất được một thuật toán giải bài toán cân bằng mà không cần yêu cầu giả thiết về tính đơn điệu của song hàm f trong không gian Banach bằng cách kết hợp phương pháp chiếu thu hẹp và các kiểu quy tắc tìm kiếm theo tia tương ứng. Chứng minh được dãy lặp sinh bởi thuật toán đó hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng, đồng thời áp dụng thuật toán để giải một ví dụ trong không gian Banach hữu hạn chiều. Kết quả này được trình bày dựa theo bài báo [CT1].*

- *Xây dựng được ba thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân $VIP(C,F)$ không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ bằng phương pháp chiếu thích nghi kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia. Chúng tôi cũng đã chứng minh được các định lý hội tụ tới nghiệm của dãy lặp sinh bởi các thuật toán, đồng thời đưa ra một số ví dụ số minh họa cho các thuật toán. Kết quả này được trình bày dựa theo bài báo [CT2].*

- *Xây dựng được ba thuật toán giải bài toán cân bằng $EP(C,f)$ không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Trong đó, có một thuật toán kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước, một thuật toán chỉ rõ độ dài bước phụ thuộc vào hệ số kiểu Lipschitz của f (trong trường hợp f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz mà hệ số Lipshitz ước lượng được), và một thuật toán áp dụng khi f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và hệ số Lipschitz không biết hoặc khó ước lượng. Các định lý hội tụ và một số ví dụ minh họa cho các thuật toán được trình bày chi tiết dựa theo bài báo [CT3].*

Các kết quả chính của luận án được công bố trong 02 bài báo trên 02 tạp chí và 01 bài báo được gửi đi và đã được báo cáo tại:

1. Xêmina của Trung tâm Toán ứng dụng và Tin học, Viện Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
2. Xêmina của Viện Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

3. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XVI (24/03/2021), lần thứ XVII (22/03/2022), Học viện Kỹ thuật Quân sự.

4. Hội thảo Tối ưu và tính toán Khoa học lần thứ 19 (22-24/4/2021), Ba Vì, Hà Nội.

5. Hội thảo Tối ưu và tính toán Khoa học lần thứ 20 (21-23/4/2022) , Ba Vì, Hà Nội.

6. Hội thảo Những hướng mới trong tối ưu tính toán và ứng dụng (26-27/12/2021), VIASM, Hà Nội.

6. Bố cục của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, luận án gồm ba chương, cụ thể như sau:

Trong Chương 1 chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản về giải tích lồi, giải tích hàm và lý thuyết tối ưu. Cụ thể, Mục 1.1 trình bày một số kết quả cơ bản về giải tích lồi. Mục 1.2 dành cho việc giới thiệu một số trường hợp riêng của bài toán cân bằng. Mục 1.3 nêu một số điều kiện về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng và bài toán tối ưu trong không gian Banach.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu, đề xuất một thuật toán hội tụ mạnh cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach thực bằng phương pháp chiếu thu hẹp kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia. Chương này được bố cục thành ba mục: Mục 2.1 dành cho việc nhắc lại các thuật toán hiện có để sử dụng cho các nghiên cứu tiếp theo; Mục 2.2, dựa trên những thuật toán hiện có, một số giả thiết và các bổ đề kỹ thuật cho trước, chúng tôi đề xuất và chứng minh thuật toán hội tụ mạnh đối với bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach thực; Mục 2.3 của chương dành để trình bày ví dụ minh họa cho thuật toán đề xuất.

Cuối cùng là Chương 3, chúng tôi tập trung cho việc nghiên cứu, đề xuất thuật toán tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ bằng phương pháp chiếu kiểu thích nghi kết hợp hoặc kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia. Cụ thể chương này gồm hai mục, Mục 3.1 là phần dành cho bài toán bất đẳng thức biến phân, Mục 3.2 là dành cho bài toán cân bằng. Mỗi mục gồm ba mục nhỏ. Mục nhỏ đầu tiên dành cho việc nhắc lại một số thuật toán đã có và đặt ra câu hỏi nghiên cứu. Mục thứ hai là đề xuất một số thuật toán trả lời cho câu hỏi nghiên cứu đó. Mục cuối cùng là một số ví dụ số minh họa cho thuật toán đề xuất.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kết quả cần thiết nhất được sử dụng cho các chương tiếp theo. Chương này gồm có hai phần. Phần thứ nhất dành cho việc trình bày một số khái niệm và kết quả của giải tích lồi. Phần thứ hai chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng và một số trường hợp riêng, cũng như sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Những kiến thức này có thể tìm thấy trong các tài liệu [3, 5, 6, 8, 10, 17, 24, 25, 26, 54, 55].

1.1 Các khái niệm và kết quả cơ bản

Trước tiên, ta nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị quan trọng có sử dụng trong luận án này.

Định nghĩa 1.1.1. ([1, Section 1.3]). Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Toán tử tuyến tính $A : X \to \mathbb{R}$ xác định trên X và lấy các giá trị trong $\mathbb{R}$ được gọi là một phiếm hàm tuyến tính trên X. Các phiếm hàm tuyến tính thường được ký hiệu bởi các chữ $x^*, y^*, z^*, \ldots$ Tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X được gọi là không gian đối ngẫu (hay liên hợp) của X và được ký hiệu là X^*. Không gian đối ngẫu của X^* được gọi là không gian đối ngẫu thứ hai của X, thường được ký hiệu là X^{**}. X^{**} cũng là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.2. ([1, Section 1.4]). Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ và x là một phần tử cố định của X. Ánh xạ $l_x : X^* \to \mathbb{R}$ xác định bởi $l_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle = x^*(x)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên X^*, tức là $l_x \in X^{**}$. Khi đó, ta chứng minh được ánh xạ $l : X \to X^{**}$ xác định bởi $l(x) = l_x$ là một đơn ánh tuyến tính và được gọi là phép nhúng chuẩn tắc không gian tuyến tính X vào không gian đối ngẫu thứ hai X^{**} của nó.

Định nghĩa 1.1.3. ([1, Section 4.1]). Không gian tuyến tính định chuẩn X được gọi là một không gian phản xạ nếu phép nhúng chuẩn tắc l không gian X vào không gian đối ngẫu thứ hai X^{**} của nó là một toàn ánh.

Định nghĩa 1.1.4. ([25, Section 1.1]). Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ và $C \subset X$. Tập C được gọi là:

a) *lồi* nếu với mọi $x, y \in C$ và $0 \le \lambda \le 1$ thì $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$;

b) *nón có đỉnh tại* 0 nếu $\lambda x \in C$, với mọi $x \in C$ và $\lambda \ge 0$;

c) *nón lồi* nếu nó vừa là nón có đỉnh tại 0 vừa là một tập lồi.

Định nghĩa 1.1.5. ([25, Section 1.1]). Giả sử C là một tập lồi, khác rỗng trong không gian tuyến tính định chuẩn thực X, X^* là không gian đối ngẫu của X, và $x^0 \in C$. $x^* \in X^*$ được gọi là pháp tuyến của C tại $x^0 \in C$ nếu

$$\langle x^*, x - x^0 \rangle \le 0, \ \forall x \in C.$$

Khi đó tập

$$N_C(x^0) = \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, x - x^0 \rangle \le 0, \ \forall x \in C\}$$

được gọi là *nón pháp tuyến ngoài (normal cone)* của C tại x^0 và tập $-N_C(x^0)$ được gọi là *nón pháp tuyến trong* của C tại x^0.

Rõ ràng $0 \in N_C(x^0)$ và từ định nghĩa trên ta thấy $N_C(x^0)$ là một nón lồi đóng.

Định nghĩa 1.1.6. ([55, 59]). Giả sử C là một tập con lồi đóng, khác rỗng trong không gian tuyến tính thực X và hàm số $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, khi đó ta nói

a) hàm f được gọi là *lồi* trên C nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0;1];$$

b) hàm f được gọi là *lồi chặt* trên C nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall x, y \in C, x \neq y, \forall \lambda \in (0;1);$$

c) hàm f là *lồi mạnh* trên C với hệ số $\beta > 0$ nếu

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\lambda(1-\lambda)\beta\|x-y\|^2,\ \forall x,y\in C, \forall\lambda \in [0;1];$$

d) hàm f là *tựa lồi* trên C nếu

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \max\{f(x), f(y)\},\ \forall x,y \in C, \forall\lambda \in [0;1];$$

e) các tập

$$\operatorname{dom} f = \{x \in C : f(x) < +\infty\},$$
$$\operatorname{epi} f = \{(x,\gamma) \in C\times\mathbb{R} : f(x) \le \gamma\},$$

tương ứng được gọi là *miền hữu hiệu* và *trên đồ thị* của f;

g) hàm $f : C \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ được gọi là *chính thường* nếu $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in C$ và $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

Giả sử $(\mathbb{E}, \|.\|)$ là không gian Banach thực, không gian đối ngẫu của $\mathbb{E}$ là $\mathbb{E}^*$. Để đơn giản, chúng tôi ký hiệu chuẩn trên $\mathbb{E}^*$ là $\|.\|$. Chúng tôi cũng ký hiệu $\langle ., .\rangle$ là ánh xạ đối ngẫu giữa $\mathbb{E}$ và $\mathbb{E}^*$, tức là $\langle x^*, u\rangle = x^*(u)$ với mọi $x^* \in \mathbb{E}^*, u \in \mathbb{E}$. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{E}$ được gọi là *hội tụ mạnh* tới $\bar{x} \in \mathbb{E}$, ký hiệu $x^k \to \bar{x}$, nếu $\|x^k - \bar{x}\| \to 0$. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{E}$ được gọi là *hội tụ yếu* tới $\bar{x} \in \mathbb{E}$, ký hiệu $x^k \rightharpoonup \bar{x}$, nếu $\langle u, x^k - \bar{x}\rangle \to 0, \forall u \in \mathbb{E}^*$.

Định nghĩa 1.1.7. ([10, Definition 2.1]). Giả sử $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là hàm lồi chính thường, $x^* \in \mathbb{E}^*$ được gọi là *dưới đạo hàm (subgradient) của f tại x* nếu

$$f(y) - f(x) \ge \langle x^*, y - x\rangle,\ \forall y \in \mathbb{E}. \tag{1.1}$$

Tập tất cả các dưới đạo hàm của f tại x được ký hiệu là $\partial f(x)$ và ánh xạ $\partial f : \mathbb{E} \to 2^{\mathbb{E}^*}$ được gọi là *dưới vi phân (subdifferential) của f tại x*. Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân tại x* nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$. Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* trên một tập nếu nó khả dưới vi phân tại mọi điểm thuộc tập đó.

Ví dụ 1.1.8. ([10, Example 2.9]) Giả sử $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, với $x \in \mathbb{E}$. Khi đó, với $x \neq 0$, ta có

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{E}^*; \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Thật vậy, giả sử $x^* \in \mathbb{E}^*$ sao cho $\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$, khi đó với mọi $y \in \mathbb{E}$, ta có

$$\begin{aligned}\langle x^*, y-x\rangle &= \langle x^*, y\rangle - \|x\|^2 \leq \|x\|\|y\| - \|x\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2) = f(y) - f(x),\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức đầu tiên là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, bất đẳng thức thứ hai do $\frac{1}{2}(\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0$. Từ bất đẳng thức trên ta suy ra $x^* \in \partial f(x)$.
Ngược lại, giả sử $x^* \in \partial f(x)$. Khi đó, ta có

$$\langle x^*, y-x\rangle \leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2), \quad \forall y \in \mathbb{E}.$$

Thay $y = x + \lambda z, \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{E}$, vào bất đẳng thức trên ta có:

$$\lambda\langle x^*, z\rangle \leq \frac{1}{2}(\|x+\lambda z\|^2 - \|x\|^2) \leq \frac{1}{2}(\lambda^2\|z\|^2 + 2|\lambda|\|x\|\|z\|). \tag{1.2}$$

Cho $\lambda \to 0^+$ trong (1.2), ta có $\langle x^*, z\rangle \leq \|x\|\|z\|$ với mọi $z \in \mathbb{E}$. Thay $z = x$ ta có

$$|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x\|^2 \text{ và } \|x^*\| \leq \|x\|. \tag{1.3}$$

Trong bất đẳng thức đầu tiên của (1.2), thay $z = x$ và $\lambda < 0$, ta có

$$\langle x^*, x\rangle \geq \frac{\lambda+2}{2}\|x\|^2.$$

Cho $\lambda \to 0^-$, ta có

$$\langle x^*, x\rangle \geq \|x\|^2. \tag{1.4}$$

Kết hợp (1.3) và (1.4) ta có $\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$. □

Định lý 1.1.9. ([39, Theorem 3.24]). *Giả sử $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường. Khi đó*

$$x_0 \in \arg\min\{f(x) : \ x \in \mathbb{E}\} \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x_0).$$

Định lý 1.1.10. ([39, Proposition 3.61], [54, Section 7.2]). *Giả sử C là tập con lồi, đóng của không gian Banach* $\mathbb{E}$ *và* $g : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *là hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới. Giả sử thêm rằng hoặc g là liên tục tại một điểm nào đó của C hoặc tồn tại một điểm* $x_0 \in \text{int}C$ *mà* $g(x_0) < +\infty$. *Khi đó,* x^* *là một nghiệm của bài toán tối ưu lồi* $\min\{g(x) : x \in C\}$ *khi và chỉ khi* $0 \in \partial g(x^*) + N_C(x^*)$.

Định nghĩa 1.1.11. ([25, Section 1.1.2]). Giả sử hàm số $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó

a) f được gọi là *nửa liên tục dưới (lower semicontinuous)* tại $\bar{x} \in \mathbb{E}$ nếu với mọi dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{E} : x^k \to \bar{x}$ thì
$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x^k);$$
f được gọi là nửa liên tục dưới trên C nếu nó là nửa liên tục dưới tại mọi $x \in C$.

b) f được gọi là *nửa liên tục trên (upper semicontinuous)* tại $\bar{x} \in \mathbb{E}$ nếu với mọi dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{E} : x^k \to \bar{x}$ thì
$$f(\bar{x}) \geq \limsup_{k\to\infty} f(x^k);$$
f được gọi là nửa liên tục trên ở trên C nếu nó là nửa liên tục trên tại mọi $x \in C$.

c) f được gọi là liên tục trên C nếu nó vừa là nửa liên tục dưới và vừa là nửa liên tục trên ở trên C.

Định nghĩa 1.1.12. ([10, Definition 1.1, Proposition 2.3 Chapter 2, Theorem 3.5, Definition 3.9 Chapter 1]). Một không gian Banach $\mathbb{E}$ được gọi là:

i) lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_1(0), x \neq y$, trong đó $S_1(0) = \{x \in \mathbb{E} : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị, thì $\|x + y\| < 2$;

ii) lồi đều nếu với mọi $\varepsilon \in (0; 2]$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho với mọi $x, y \in S_1(0)$ mà $\|x - y\| \geq \varepsilon$ thì $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$;

iii) trơn nếu giới hạn
$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$
tồn tại với mọi $x, y \in S_1(0)$;

iv) trơn đều nếu $\mathbb{E}$ trơn và giới hạn trên là đều với mọi $x, y \in S_1(0)$.

Định lý 1.1.13. ([10, Theorem 2.13 Chapter 2]). *Cho $\mathbb{E}$ là không gian Banach. Khi đó $\mathbb{E}$ là lồi đều khi và chỉ khi $\mathbb{E}^*$ là trơn đều.*

Ví dụ 1.1.14. ([10, Theorem 4.7 Chapter 2]).
Không gian $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$ với chuẩn $\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ là không gian lồi đều và trơn đều với $1 < p < \infty$.

Định nghĩa 1.1.15. ([10, Definition 4.1 Chapter 1]). Ánh xạ $J : \mathbb{E} \to 2^{E^*}$ xác định bởi

$$Jx = \{x^* \in \mathbb{E}^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc.

Nhận xét 1.1.16. *Ta có các nhận xét sau.*

(i) Ta chú ý rằng $Jx \neq \emptyset$ với mọi $x \in \mathbb{E}$. Thật vậy, xét $y = x.\|x\|$. Theo định lý Hahn-Banach, tồn tại $y^* \in \mathbb{E}^*$ mà $\|y^*\| = 1$ và $\langle y^*, y\rangle = \|y\|$, khi đó $x^* = y^*.\|x\| \in Jx$.

(ii) $Jx = \partial(\frac{1}{2}\|x\|^2)$ với mọi $x \in \mathbb{E}$.

(iii) Trong không gian Hilbert thực, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là toán tử đồng nhất.

Mệnh đề 1.1.17. ([10]). *Cho $\mathbb{E}$ là không gian Banach và $\mathbb{E}^*$ là không gian đối ngẫu. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

a) J là toàn ánh khi và chỉ khi $\mathbb{E}$ là phản xạ;

b) J là đơn ánh hay đơn điệu chặt khi và chỉ khi $\mathbb{E}$ là không gian lồi chặt;

c) J là đơn trị khi và chỉ khi $\mathbb{E}$ là trơn;

d) Nếu $\mathbb{E}$ là không gian Banach trơn đều thì J là liên tục đều trên mỗi tập bị chặn của $\mathbb{E}$.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một ví dụ về ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J trong không gian lồi đều và trơn đều L^p, $p \in (1, \infty)$ được trích dẫn từ [3].

Ví dụ 1.1.18. Xét không gian $L^p = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f|^p dx < \infty\}$ với $1 < p < \infty$. Ta ký hiệu $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p dx)^{1/p}$. Khi đó, $Jf = \|f\|_p^{2-p}|f|^{p-2}f \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bây giờ, chúng tôi giả sử $\mathbb{E}$ là không gian Banach phản xạ, lồi chặt và trơn. Khi đó, J là đơn trị. Chúng tôi định nghĩa $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to [0; +\infty)$ như sau:

$$\varphi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle Jx, y\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

Chúng ta thấy rằng φ có những tính chất sau đây:

(i) Với mọi $x, y \in \mathbb{E}$, ta có

$$0 \le (\|x\| - \|y\|)^2 \le \varphi(x,y) \le (\|x\| + \|y\|)^2; \tag{1.5}$$

(ii) Với mọi $x, y, z \in \mathbb{E}$,

$$\varphi(x,y) = \varphi(x,z) + \varphi(z,y) + 2\langle Jx - Jz, z - y\rangle; \tag{1.6}$$

Đặc biệt, khi $x = y$ ta có

$$\langle Jy - Jz, y - z\rangle = \frac{1}{2}\varphi(y,z) + \frac{1}{2}\varphi(z,y). \tag{1.7}$$

Trong không gian Hilbert, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J là toán tử đồng nhất, và do đó $\varphi(x,y) = ||x - y||^2$.
Ta nhận thấy rằng

$$\partial_2\varphi(x,y) := \partial\varphi(x,.)(y) = \{2(Jy - Jx)\}.$$

Mệnh đề 1.1.19. ([24, Proposition 3]). *Giả sử $\mathbb{E}$ là không gian Banach phản xạ, trơn và lồi chặt và $C \subset \mathbb{E}$ là một tập con lồi đóng và khác rỗng. Khi đó với mọi $x \in \mathbb{E}$, tồn tại duy nhất một phần tử $x_0 \in C$ sao cho*

$$\varphi(x,x_0) = \inf\{\varphi(x,y) : y \in C\}.$$

Ta ký hiệu $P_C : \mathbb{E} \to C$ là ánh xạ $P_C(x) = x_0$ trong mệnh đề trên. P_C được gọi là phép chiếu tổng quát lên C.

Xét không gian Hilbert $\mathbb{H}$, hình chiếu của $x \in \mathbb{H}$ trên C là điểm thuộc C gần x nhất được xác định bởi

$$P_C(x) = \arg\min\{\|x-y\| : \; y \in C\}.$$

Nếu C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$, thì với mỗi $x \in \mathbb{H}$, $P_C(x)$ luôn tồn tại và là phần tử duy nhất thuộc C thỏa mãn

$$\|x - P_C(x)\| \le \|x-y\|, \; \forall y \in C.$$

Chẳng hạn, nếu $C = \{y \in \mathbb{H} : \langle a, y\rangle + b \le 0\}$, với $a \in \mathbb{H}$ và $b \in \mathbb{R}$, là một nửa không gian, thì ta có

$$P_C(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in C, \\ x - \frac{\langle a,x\rangle + b}{\|a\|^2} a & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Phép chiếu trên tập lồi, đóng có một số tính chất sau.

Mệnh đề 1.1.20. ([24, Propositions 4, 5]). *Giả sử C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Banach phản xạ, trơn và lồi chặt $\mathbb{E}$. Khi đó*

(i) $\varphi(x, P_C(x)) + \varphi(P_C(x), y) \le \varphi(x,y), \;\; \forall y \in C, x \in \mathbb{E}$;

(ii) nếu $x \in \mathbb{E}, z \in C$, thì $z = P_C(x)$ khi và chỉ khi $\langle Jx - Jz, y - z\rangle \le 0, \;\; \forall y \in C$;

(iii) $\varphi(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

Bây giờ, chúng ta cùng nhắc lại một số nhận xét về hàm lồi mạnh trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét 1.1.21. *([8, 55])*

(i) Sử dụng đẳng thức

$$\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, và mọi $\lambda \in [0,1]$, ta nhận thấy rằng $f(x)$ là lồi mạnh với hệ số β khi và chỉ khi hàm $f(x) - \beta\|x\|^2$ là lồi.

(ii) Giả sử rằng hàm f là khả vi (tức là ∇f tồn tại tại mỗi điểm thuộc C). Khi đó, f là lồi mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên tập lồi C khi và chỉ khi

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\beta}{2}\|y-x\|^2,$$

với mọi $x, y \in C$.

(iii) Giả sử rằng f là khả vi đến cấp hai (tức là $\nabla^2 f$ tồn tại tại mỗi điểm thuộc C). Khi đó, f là lồi mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên tập lồi C khi và chỉ khi $\nabla^2 f(x) - \beta I$ là ma trận nửa xác định dương, trong đó I là ma trận đơn vị.

Bây giờ, chúng ta nhắc lại các định nghĩa sau đây về tính đơn điệu của song hàm f.

Định nghĩa 1.1.22. ([5, 26]). Giả sử $C \subset \mathbb{E}$. Song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ được gọi là:

a) *đơn điệu mạnh (strongly monotone)* trên C với hằng số $\tau > 0$ nếu với mọi $x, y \in C$ ta có

$$f(x,y) + f(y,x) \leq -\tau\|x-y\|^2;$$

b) *đơn điệu chặt (strictly monotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x,y) + f(y,x) < 0;$$

c) *đơn điệu (monotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x,y) + f(y,x) \leq 0;$$

d) *giả đơn điệu chặt (strictly pseudomonotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$ và $x \neq y$, ta có

$$f(x,y) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) < 0;$$

e) *giả đơn điệu (pseudomonotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x,y) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0;$$

g) *tựa đơn điệu (quasimonotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x,y) > 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0;$$

h) *thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz* trên C nếu tồn tại các hằng số $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$ sao cho với mọi $x, y, z \in C$, ta có

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - c_1\|x-y\|^2 - c_2\|y-z\|^2.$$

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow e) \Rightarrow g$$

và

$$d \Rightarrow e.$$

Nếu $f(x,y) = \langle F(x), y-x\rangle$, với ánh xạ $F : C \to \mathbb{R}^n$ thì các định nghĩa về tính đơn điệu và đơn điệu suy rộng của ánh xạ F được suy từ các định nghĩa trên đây của song hàm f. Hơn nữa, nếu ánh xạ F là Lipschitz với hằng số $L > 0$ trên C, tức là $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x-y\|$, $\forall x, y \in C$, thì f cũng thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C (xem [31, 42]), chẳng hạn, với các hằng số $c_1 = \frac{L}{2\varepsilon}$, $c_2 = \frac{L\varepsilon}{2}$, với mọi $\varepsilon > 0$.

1.2 Các trường hợp riêng của bài toán cân bằng

Giả sử C là tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{E}$, và hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$; hàm f như vậy được gọi là *song hàm cân bằng* (*equilibrium bifunction*). Bài toán cân bằng (hay còn được gọi là *bất đẳng thức Ky Fan* (xem [17]) là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{1.8}$$

Bài toán cân bằng liên kết với (1.8) được gọi là bài toán cân bằng Minty, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } y^* \in C \text{ sao cho } f(x, y^*) \leq 0, \ \forall x \in C. \tag{1.9}$$

Ký hiệu các bài toán (1.8), (1.9) tương ứng là EP(C, f), MEP(C, f) và các tập nghiệm của chúng lần lượt là S, S_M.

Bài toán cân bằng có dạng khá đơn giản, nhưng bao hàm nhiều lớp bài toán quan trọng trong kinh tế và nhiều lĩnh vực thực tiễn khác nhau như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, ... Nó coi các bài toán này như những trường hợp riêng đặc biệt và hợp nhất chúng theo một phương pháp nghiên cứu chung rất tiện lợi. Nhiều kết quả của các bài toán nói trên có thể mở rộng cho bài toán cân bằng tổng quát với những điều chỉnh phù hợp và do vậy thu được nhiều ứng dụng rộng lớn. Nhiều nghiên cứu cũng đã chỉ ra rằng, các bài toán thực tế như tối ưu, kinh tế và kỹ thuật có thể được miêu tả thành các bài toán cân bằng tương ứng. Điều đó đã giải thích được tại sao bài toán cân bằng được rất nhiều nhà toán học quan tâm, nghiên cứu. Trong phần này, chúng tôi chỉ nhắc lại một số nét chính về khái niệm bài toán cân bằng và một số trường hợp riêng cũng như điều kiện tồn tại nghiệm của nó.

Sau đây là một số ví dụ về những bài toán quen thuộc có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng.

Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{R}^n$.

a. Bài toán tối ưu (optimization problem)

Cho hàm $h : C \to \mathbb{R}$. Xét *Bài toán tối ưu*, viết tắt là (OP), là bài toán được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } h(x^*) \leq h(y),\ \forall y \in C.$$

Bằng cách đặt $f(x,y) := h(y) - h(x)$ với mọi $x, y \in C$. Theo định nghĩa,

$$h(x^*) \leq h(y),\ \forall y \in C \Leftrightarrow f(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C.$$

Điều đó chứng tỏ bài toán tối ưu là một trường hợp riêng của bài toán cân bằng.

b. Bài toán bù (complementary problem)

Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một nón lồi đóng, và ánh xạ $F : C \to \mathbb{R}^n$. Bài toán bù, ký hiệu là $\mathrm{CP}(C, F)$ được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } F(x^*) \in C^* \text{ và } \langle F(x^*), x^* \rangle = 0,$$

trong đó $C^* = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, y \rangle \geq 0,\ \forall y \in C\}$ là nón đối ngẫu của C.

Việc giải bài toán bù tương đương với việc giải bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$, trong đó

$$f(x,y) = \langle F(x), y - x \rangle.$$

Thật vậy, giả sử x^* là nghiệm của bài toán bù $CP(C,F)$. Khi đó, ta có

$$f(x^*,y) = \langle F(x^*), y - x^* \rangle = \langle F(x^*), y \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle = \langle F(x^*), y \rangle \geq 0, \forall y \in C, \quad (1.10)$$

tức là x^* là nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C,f)$.

Ngược lại, giả sử x^* là nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C,f)$. Khi đó

$$f(x^*,y) = \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Do C là nón, và $x^* \in C$ nên thay $y = 2x^* \in C$ vào (1.10), ta có

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0.$$

Do C là nón chứa gốc nên thay $y = 0 \in C$ vào (1.10), ta có

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \leq 0.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta kết luận

$$\langle F(x^*), x^* \rangle = 0.$$

Kết hợp với (1.10), ta nhận được

$$\langle F(x^*), y \rangle \geq 0 \ \forall y \in C,$$

tức là $F(x^*) \in C^*$.

c. Bài toán bất đẳng thức biến phân (variational inequality problem)

Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi, đóng, khác rỗng và $F : C \to \mathbb{R}^n$. Bài toán bất đẳng thức biến phân, ký hiệu là VIP(C,F), là bài toán được phát biểu như sau

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C,F) tương đương với việc giải bài toán cân bằng EP(C,f) bằng cách đặt

$$f(x,y) := \langle F(x), y - x \rangle, \ x, y \in C.$$

d. Bài toán điểm bất động (fixed point problem)

Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ và ánh xạ $F : C \to C$. Bài toán điểm bất động, ký hiệu là FP(C,F), là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } x^* = F(x^*).$$

Việc giải bài toán FP(C,F) tương đương với việc giải bài toán EP(C,f), trong đó

$$f(x,y) := \langle x - F(x), y - x\rangle,\ x,y \in C.$$

Thật vậy, nếu x^* là nghiệm của bài toán FP(C,F) thì

$$f(x^*,y) = \langle x^* - F(x^*), y - x^*\rangle = 0 \geq 0,\ \forall y \in C.$$

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của bài toán EP(C,f) thì

$$0 \leq f(x^*,y) = \langle x^* - F(x^*), y - x^*\rangle,\ \forall y \in C.$$

Chọn $y = F(x^*) \in C$ ta có

$$0 \leq \langle x^* - F(x^*), F(x^*) - x^*\rangle = -\|x^* - F(x^*)\|^2.$$

Từ đó $x^* = F(x^*)$, tức là x^* là nghiệm của bài toán FP(C,F).

Nếu tập C cũng là tập lồi thì việc giải bài toán bài toán FP(C,F) cũng tương đương với việc giải bài toán cân bằng EP(C,f), trong đó

$$f(x,y) = \langle y - F(x), y - x\rangle.$$

Thật vậy, nếu x^* là nghiệm của FP(C,F) thì

$$f(x^*,y) = \langle y - F(x^*), y - x^*\rangle = \|y - x^*\|^2 \geq 0, \forall y \in C.$$

Do đó, x^* là nghiệm của EP(C,f).

Ngược lại, giả sử x^* là nghiệm của EP(C,f). Khi đó, do $x^* \in C$, $F(x^*) \in C$ và C là tập lồi nên $y = \frac{x^*+F(x^*)}{2} \in C$. Vì vậy,

$$0 \leq f(x^*,y) = \Big\langle \frac{x^* + F(x^*)}{2} - F(x^*), \frac{x^* + F(x^*)}{2} - x^*\Big\rangle = -\frac{1}{4}\|x^* - F(x^*)\|^2.$$

Suy ra $x^* = F(x^*)$ hay x^* là nghiệm của bài toán FP(C,F).

e. Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác (Nash equilibria problem in noncooperative games)

Trước tiên, ta tìm hiểu đôi nét về bài toán cân bằng từ việc xét một trò chơi không hợp tác gồm hai đấu thủ (người chơi). Gọi $C_1 \subset \mathbb{R}$, $C_2 \subset \mathbb{R}$ là tập chiến lược của đấu thủ 1, 2 tương ứng. Cặp phương án (x,y) gọi là *chấp nhận được* nếu $(x,y) \in C_1 \times C_2$. Giả sử $f_1, f_2 : C_1 \times C_2 \to \mathbb{R}$ tương ứng là *hàm lợi ích* của các đấu thủ 1, 2; nghĩa là, nếu đấu thủ 1 chọn phương án chơi $x \in C_1$ và đấu thủ 2 chọn phương án chơi $y \in C_2$ thì đấu thủ 1 nhận lợi ích là $f_1(x,y)$ và đấu thủ 2 nhận lợi ích là $f_2(x,y)$. Lẽ tự nhiên là mỗi đấu thủ đều muốn chọn phương án chơi sao cho lợi ích của mình là lớn nhất. Do lợi ích thường mâu thuẫn nên điều này dẫn đến khái niệm điểm cân bằng được định nghĩa như sau: Ta gọi $(x^*,y^*) \in C_1 \times C_2$ là *điểm cân bằng* của trò chơi nếu

$$f_1(x^*,y^*) = \max_{x \in C_1} f_1(x,y^*),$$
$$f_2(x^*,y^*) = \max_{y \in C_2} f_2(x^*,y).$$

Như vậy điểm cân bằng của trò chơi là một cặp phương án chấp nhận được, tại đó lợi ích của mỗi đấu thủ là cao nhất. Thông thường, người ta giả sử

$$f_1(x,y) + f_2(x,y) = 0, \ \forall x \in C_1, \forall y \in C_2.$$

Giả thiết này có nghĩa là, lợi ích của đấu thủ này đúng bằng thua thiệt của đối thủ kia. Bằng cách đặt

$$f(x,y) := f_1(x,y) \ \text{ và } \ -f(x,y) := f_2(x,y)$$

ta đưa được bài toán nói trên về bài toán cân bằng $EP(C,f)$.

Tổng quát, xét bài toán sau đây. Cho $I := \{1,\dots,p\}$ là tập hữu hạn các chỉ số (tập p người chơi); $C_i \subseteq \mathbb{R}$ là các tập lồi, đóng, khác rỗng (tập chiến lược của người chơi thứ $i \in I$) và $f_i : C := C_1 \times \dots \times C_p \to \mathbb{R}$ lồi trên C_i theo thành phần thứ i (hàm lợi ích của người chơi thứ $i \in I$, phụ thuộc theo tất cả các chiến lược của những người chơi khác). Với $x = (x_1,\dots,x_p), y = (y_1,\dots,y_p) \in C$, ta định nghĩa

$$(x[y_i])_j = \begin{cases} x_j & \text{nếu } \ j \neq i \\ y_i & \text{nếu } \ j = i. \end{cases}$$

Bài toán cân bằng Nash (NEP) là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f_i(x^*) \leq f_i(x^*[y_i]),\ \forall y_i \in C_i, \forall i \in I.$$

Điểm x^* như vậy gọi là điểm cân bằng của mô hình trò chơi. Bằng cách đặt

$$f(x,y) := \sum_{i\in I}\{f_i(x[y_i]) - f_i(x)\};\ x,y \in C,$$

ta đưa được bài toán cân bằng Nash về bài toán EP(C,f).

1.3 Sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu và bài toán cân bằng trong không gian Banach

Bây giờ, chúng tôi nhắc lại một số kết quả về sự tồn tại nghiệm, tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng EP(C,f) và bài toán tối ưu. Chúng tôi chỉ đề cập đến các kết quả quan trọng mà không đưa ra chứng minh các kết quả đó ở đây. Các chứng minh của các kết quả này có thể tham khảo trong các tài liệu [4], [5], [6], [10], [17], [25], [26], [39].

Định lý 1.3.1. ([17, Ky Fan's Theorem], [25, Theorem 3.3]). *Giả sử C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Banach $\mathbb{E}$ và $f : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) $f(.,y)$ là hàm nửa liên tục trên theo biến thứ nhất với mọi $y \in C$;

ii) $f(x,.)$ là hàm tựa lồi theo biến thứ hai với mỗi $x \in C$ cố định.

Khi đó, nếu C là tập compact hoặc điều kiện bức sau được thỏa mãn

iii) Tồn tại một tập compact $B \subset \mathbb{E}$ và $y_0 \in B \cap C$ sao cho $f(x,y_0) < 0, \forall x \in C \backslash B$;

thì bài toán cân bằng $EP(C,f)$ có nghiệm.

Bây giờ, chúng ta xét đến điều kiện tồn tại nghiệm duy nhất của bài toán tối ưu lồi trên không gian Banach phản xạ.

Định lý 1.3.2. ([4, Theorem 2.11, Remark 2.13]). *Cho C là tập con lồi đóng trong không gian Banach phản xạ $\mathbb{E}$ và f là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên $\mathbb{E}$. Giả sử thêm rằng hoặc C là một tập bị chặn hoặc f thỏa mãn điều kiện bức*

$$\lim_{||x||\to+\infty, x\in C} f(x) = +\infty.$$

Khi đó, mọi điểm cực tiểu địa phương của f trên C đều là điểm cực tiểu toàn cục, ngoài ra tập các điểm cực tiểu $\arg\min\{f(x) : x \in C\}$ là tập khác rỗng. Hơn nữa, nếu f là lồi chặt thì hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu toàn cục trên C.

Trước khi bước sang Chương 2, chúng tôi nhắc lại một bổ đề được áp dụng để chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán tối ưu trong không gian Banach.

Bổ đề 1.3.3. ([52, Lemma 2.2]). *Giả sử C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng và bị chặn trong không gian Banach $\mathbb{E}$ và $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên C. Khi đó, f là một hàm bị chặn dưới.*

Bổ đề 1.3.4. ([10, Proposition 2.11 Chapter 2]). *Không gian Banach $\mathbb{E}$ là lồi đều khi và chỉ khi hàm $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ là lồi chặt.*

Định lý 1.3.5. *Cho $\mathbb{E}$ là không gian Banach và C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{E}$. Hàm $h : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên C. Khi đó, hàm $h(.) + \alpha\|.\|^2$ với $\alpha > 0$ thỏa mãn điều kiện bức trên C, tức là*

$$\lim_{||x||\to+\infty, x\in C} (h(x) + \alpha\|x\|^2) = +\infty.$$

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $h(.) + \alpha\|.\|^2$ không thỏa mãn điều kiện bức trên C. Khi đó, tồn tại một dãy $\{x^k\} \subset C$ sao cho $\|x^k\| \to +\infty$ khi $k \to +\infty$ và tồn tại một số M sao cho $h(x^k) + \alpha||x^k||^2 \le M$ với mọi k. Do đó, suy ra

$$\frac{h(x^k)}{||x^k||} \le \frac{M}{||x^k||} - \alpha||x^k||.$$

Vì vậy, ta có

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{h(x^k)}{||x^k||} = -\infty.$$

Lấy $\bar{x} \in C$ cố định. Khi đó, do C là tập lồi nên $\left(1 - \frac{1}{||x^k||}\right)\bar{x} + \frac{1}{||x^k||}x^k \in C$. Áp dụng tính chất lồi của hàm h trên C ta có

$$h\left(\left(1 - \frac{1}{||x^k||}\right)\bar{x} + \frac{1}{||x^k||}x^k\right) \leq \left(1 - \frac{1}{||x^k||}\right)h(\bar{x}) + \frac{1}{||x^k||}h(x^k). \tag{1.11}$$

Do $\lim_{k\to+\infty} \|x^k\| = +\infty$ và $\lim_{k\to+\infty} \frac{h(x^k)}{||x^k||} = -\infty$ nên

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\left(1 - \frac{1}{||x^k||}\right)h(\bar{x}) + \frac{1}{||x^k||}h(x^k)\right) = -\infty. \tag{1.12}$$

Đặt $y^k = \left(1 - \frac{1}{||x^k||}\right)\bar{x} + \frac{1}{||x^k||}x^k \in C$. Khi đó, ta có

$$\|y^k - \bar{x}\| = \frac{1}{||x^k||}\|x^k - \bar{x}\| \leq 1 + \frac{\|\bar{x}\|}{\|x^k\|} \leq R,$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai có được do $\lim_{k\to+\infty} x^k = +\infty$. Vì vậy, $y^k \in B[\bar{x};R] \cap C$ với $B[\bar{x};R]$ là tập lồi đóng bị chặn nên áp dụng Bổ đề 1.3.3 ta suy ra tồn tại một số N sao cho $h(y^k) \geq N$. Kết hợp điều này với (1.11) và (1.12) ta suy ra điều mâu thuẫn, tức giả sử sai. Vậy $h(.) + \alpha\|.\|^2$ là hàm thỏa mãn điều kiện bức trên C. $\square$

Chương 2

Phương pháp chiếu thu hẹp giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Trong vài năm trở lại đây, việc nghiên cứu thuật toán giải bài toán cân bằng đã trở thành một vấn đề thời sự và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Có rất nhiều kết quả về phương pháp tìm nghiệm đạt được trong không gian Hilbert như: phương pháp hàm gap [30], phương pháp nguyên lý bài toán phụ [31, 38], phương pháp điểm gần kề [32], phương pháp đạo hàm tăng cường kết hợp hoặc không kết hợp với quy tắc tìm kiếm tia [15, 16, 21, 41, 42]. Gần đây, bài toán cân bằng được nhiều nhà khoa học mở rộng nghiên cứu phương pháp tìm nghiệm trong không gian Banach như trong [9, 12, 19, 20, 27, 28, 40, 43, 47, 51]. Tuy nhiên, các kết quả này còn chưa nhiều, đặc biệt là các kết quả cho bài toán cân bằng không đơn điệu. Vì vậy, trong chương này, chúng tôi nghiên cứu đề xuất một thuật toán giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu trong không gian Banach. Thuật toán là sự kết hợp của phương pháp chiếu thu hẹp và phương pháp tìm kiếm theo tia. Chương này gồm ba mục. Mục thứ nhất chúng tôi dành cho việc đặt bài toán bằng cách nhắc lại thuật toán của nhóm tác giả A. N. Iusem và V. Mohebbi trong [22]. Mục thứ hai, ngoài việc trình bày một số bổ đề kỹ thuật, chúng tôi đề xuất một thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach. Mục cuối cùng của chương là ví dụ số minh họa cho thuật toán.

Nội dung chính của chương nãy đã được công bố trong bài báo [CT1] thuộc Danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

[CT1] B.V. Dinh, H.D. Manh, T.T.H. Thanh (2023), Extragradient algorithms with linesearches for solving nonmonotone equilibrium problems in Banach spaces, *Vietnam Journal of Mathematics,* (accepted).

2.1 Mở đầu

Giả sử $\mathbb{E}$ là không gian Banach thực với chuẩn là $\|\cdot\|$ và $\mathbb{E}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathbb{E}$. Để ngắn gọn, chúng tôi không nhắc lại giả thiết về không gian Banach thực $\mathbb{E}$ nữa. Trong chương này, chúng tôi nhắc lại định nghĩa hàm $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to [0; +\infty)$ được định nghĩa trong Chương 1 như sau:

$$\varphi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle Jx, y\rangle + \|y\|^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{E}.$$

Giả sử $C \subset \mathbb{E}$ là một tập con lồi, đóng, khác rỗng và song hàm cân bằng $f : C \times C \to \mathbb{R}$. Xét bài toán cân bằng EP(C, f):

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C,$$

và bài toán liên kết với EP(C, f) là bài toán cân bằng Minty MEP(C, f) (có thể gọi là bài toán đối ngẫu):

$$\text{Tìm } u^* \in C \text{ sao cho } f(y, u^*) \leq 0, \ \forall y \in C.$$

Trong Chương 1, ta đã ký hiệu tập nghiệm của bài toán EP(C, f) và bài toán MEP(C, f) lần lượt là S và S_M.

Chúng ta bắt đầu chương này bằng việc nhắc lại một thuật toán trong bài báo [22]. Để tìm nghiệm của bài toán EP(C, f), trong [22] các tác giả đã sửa đổi phương pháp đạo hàm tăng cường kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia đối với bài toán bất đẳng thức biến phân trong [23] để có được thuật toán sau:

$$
\begin{cases}
x^0 \in C, \\
z^k = \arg\min\left\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\beta_k}\|y\|^2 - \frac{1}{\beta_k}\langle Jx^k, y\rangle : y \in C \right\}, \\
y^k = \alpha_k z^k + (1-\alpha_k)x^k, \text{ trong đó } \alpha_k = 2^{-l(k)} \text{ và} \\
l(k) = \min\left\{ l \in \mathbb{N} : \beta_k f(u^l, x^k) - \beta_k f(u^l, z^k) \ge \frac{\delta}{2}[\|z^k\|^2 - 2\langle Jx^k, z^k\rangle + \|x^k\|^2] \right\}, \\
u^l = 2^{-l} z^k + (1-2^{-l})x^k, \\
w_k = P_{H_k}(x^k), \text{ với } H_k = \{y \in \mathbb{E} : \langle y - x^k, h^k\rangle + f(y^k, x^k) \le 0\},\ h^k \in \partial_2 f(y^k, x^k), \\
x^{k+1} = P_C(w^k).
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

Trong bài báo [22], các tác giả chỉ ra rằng nếu f là giả đơn điệu trên C và tập nghiệm $S \neq \emptyset$, thì dưới một số điều kiện thích hợp cho các tham số và tính liên tục của f, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi (2.1) hội tụ yếu tới một nghiệm của bài toán cân bằng. Một ưu điểm của thuật toán này là song hàm f không yêu cầu thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và ta có thể tìm nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ bằng cách giải một dãy các bài toán tối ưu lồi, mà các bài toán này dễ hơn bài toán gốc. Tuy nhiên, trong thuật toán này vẫn đòi hỏi giả thiết về tính giả đơn điệu trên C của song hàm f. Vậy liệu có thể xây dựng một thuật toán dùng để giải bài toán cân bằng không đơn điệu và không Lipschitz trong không gian Banach hay không? Các tác giả D. Rouhani và B. Mohebbi đã trả lời câu hỏi này trong bài báo [46]. Xuất phát từ thuật toán trên của các tác giả A. N. Iusem và V. Mohebbi, chúng tôi cũng trả lời câu hỏi này bằng cách đề xuất một thuật toán khác với thuật toán trong [46], dùng để giải bài toán cân bằng trong không gian Banach mà song hàm f không cần một giả thiết nào về tính đơn điệu và tính Lipschitz. Với giả thiết về tính liên tục, tính lồi theo biến thứ hai của song hàm và tính khác rỗng của tập nghiệm bài toán Minty, chúng tôi chỉ ra rằng dãy sinh bởi thuật toán được đề xuất hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$.

2.2 Thuật toán chiếu thu hẹp kết hợp quy tắc tìm kiếm theo tia

Sau đây, chúng tôi luôn giả thiết rằng $\mathbb{E}$ là không gian Banach trơn đều và lồi đều, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong $\mathbb{E}$. Giả sử $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

($\mathscr{A}_1$) $f(x,.)$ là lồi trên $\mathbb{E}$ với mọi $x \in C$;

($\mathscr{A}_2$) $f(\cdot,\cdot)$ là liên tục trên $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ và đều theo biến thứ hai trên các tập bị chặn;

($\mathscr{A}_3$) $f(x,\cdot)$ là Lipschitz đều (theo x) trên các tập bị chặn, tức là với bất kỳ tập bị chặn $D \subset \mathbb{E}$ nào, tồn tại một số $L > 0$ sao cho $|f(x,y) - f(x,z)| \le L\|y - z\|$ với mọi $x,y,z \in D$;

Trong chương này, chúng tôi cần kết quả của các bổ đề sau:

Bổ đề 2.2.1. ([3]) *Giả sử $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ là hai dãy trong không gian Banach lồi đều và trơn đều $\mathbb{E}$. Nếu $\varphi(x^k,y^k) \to 0$ và dãy $\{x^k\}$ hoặc dãy $\{y^k\}$ là bị chặn, thì ta có $\|x^k - y^k\| \to 0$ khi $k \to \infty$.*

Bổ đề 2.2.2. *Giả sử C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Banach phản xạ, lồi chặt và trơn $\mathbb{E}$. Giả sử $\{x^k\}$ là dãy trong $\mathbb{E}$ và $u \in \mathbb{E}$. Nếu $\{x^k\}$ là dãy thỏa mãn điều kiện sau*

$$\omega_w(x^k) = \{x : x^{k_j} \rightharpoonup x\} \subset C,$$

và

$$\varphi(u,x^k) \le \varphi(u,P_C(u)),\ \forall k, \tag{2.2}$$

thì $\varphi(P_C(u),x^k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Chứng minh. Từ tính chất (1.5) của hàm φ và giả thiết (2.2), ta suy ra rằng $\{x^k\}$ là dãy bị chặn. Do đó, $\omega_w(x^k)$ là một tập khác rỗng. Lấy $v \in \omega_w(x^k)$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{x^{k_j}\}$ của dãy $\{x^k\}$ và $x^{k_j} \rightharpoonup v$ khi $j \to \infty$. Thay thế k trong (2.2) bằng k_j, cho $j \to \infty$ và sử dụng tính liên tục dưới yếu của $\|.\|^2$, ta có

$$
\begin{aligned}
\varphi(u,v) &= \|u\|^2 - 2\langle Ju, v\rangle + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 - \liminf_{j\to\infty} 2\langle Ju, x^{k_j}\rangle + \liminf_{j\to\infty}\|x^{k_j}\|^2 \\
&= \liminf_{j\to\infty}(\|u\|^2 - 2\langle Ju, x^{k_j}\rangle + \|x^{k_j}\|^2) \qquad (2.3)\\
&= \liminf_{j\to\infty}\varphi(u, x^{k_j}) \\
&\leq \varphi(u, P_C(u)).
\end{aligned}
$$

Theo Mệnh đề 1.1.20(i) và (2.3), ta có

$$\varphi(P_C(u), v) \leq \varphi(u,v) - \varphi(u, P_C(u)) \leq 0.$$

Kết hợp với $\varphi(P_C(u), v) \geq 0$, ta có $\varphi(P_C(u), v) = 0$, tức là $v = P_C(u)$ với mọi $v \in \omega_w(x^k)$. Do đó, ta có $\omega_w(x^k) = \{P_C(u)\}$, nghĩa là

$$x^k \rightharpoonup P_C(u), \tag{2.4}$$

khi $k \to \infty$. Theo (1.6) và (2.4), ta có

$$
\begin{aligned}
\varphi(P_C(u), x^k) &= \varphi(P_C(u), u) + \varphi(u, x^k) + 2\langle JP_C(u) - Ju, u - x^k\rangle \\
&\leq \varphi(P_C(u), u) + \varphi(u, P_C(u)) + 2\langle JP_C(u) - Ju, u - x^k\rangle.
\end{aligned}
$$

Cho $k \to \infty$, theo (1.7), (2.4) và tính không âm của φ, ta nhận thấy rằng

$$\varphi(P_C(u), x^k) \to 0$$

khi $k \to \infty$.

□

Bổ đề sau được xem như một phiên bản của Bổ đề 4 trong [14] trong không gian Banach.

Bổ đề 2.2.3. *Giả sử rằng song hàm f thỏa mãn điều kiện $(\mathscr{A}_1), (\mathscr{A}_3)$. Nếu $\{x^k\} \subset C$ là dãy bị chặn, $\beta \geq \rho_k \geq \alpha > 0$ và $\{y^k\}$ là dãy thỏa mãn*

$$y^k = \arg\min\left\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k, y) :\ y \in C\right\},$$

thì $\{y^k\}$ là dãy bị chặn.

Chứng minh. Vì

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k,y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y):\ y \in C\Big\},$$

nên ta có

$$f(x^k,y^k) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k) \le f(x^k,y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y),\ \forall y \in C.$$

Thay thế $y = x^k$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$f(x^k,y^k) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k) \le 0. \tag{2.5}$$

Hơn nữa, với mọi $\xi_k \in \partial_2 f(x^k,x^k)$, ta có

$$f(x^k,y) - f(x^k,x^k) \ge \langle \xi_k, y - x^k\rangle,\ \ \forall y \in C. \tag{2.6}$$

Thay thế $y = y^k$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$f(x^k,y^k) \ge \langle \xi_k, y^k - x^k\rangle \ge -\|\xi_k\|.\|y^k - x^k\|.$$

Điều này dẫn đến

$$f(x^k,y^k) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k) \ge -\|\xi_k\|.\|y^k - x^k\| + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k). \tag{2.7}$$

Từ (2.5) và (2.7), ta có

$$-\|\xi_k\|.\|y^k - x^k\| + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k) \le 0.$$

Mặt khác, $\varphi(x^k,y^k) \ge (\|x^k\| - \|y^k\|)^2$. Do đó,

$$-\|\xi_k\|(\|y^k\| + \|x^k\|) + \frac{1}{2\rho_k}(\|x^k\| - \|y^k\|)^2 \le 0.$$

Điều này dẫn đến

$$\frac{1}{2\rho_k}\|y^k\|^2 - \left(\|\xi_k\| + \frac{1}{\rho_k}\|x^k\|\right)\|y^k\| + \left(\frac{1}{2\rho_k}\|x^k\|^2 - \|\xi_k\|.\|x^k\|\right) \le 0.$$

Vì vậy,

$$\|y^k\| \le \rho_k\|\xi_k\| + \|x^k\| + \sqrt{{\rho_k}^2\|\xi_k\|^2 + 4\rho_k\|\xi_k\|\|x^k\|}. \tag{2.8}$$

Vì $\{x^k\}$ là dãy bị chặn, nên sử dụng (2.6) và giả thiết $(\mathscr{A}_3)$, ta có

$$\|\xi_k\| = \sup_{\|y-x^k\|\le 1}\langle \xi_k, y - x^k\rangle \le \sup_{\|y-x^k\|\le 1}|f(x^k,y) - f(x^k,x^k)| \le L. \tag{2.9}$$

Do đó, $\{\xi_k\}$ là dãy bị chặn. Từ (2.9) và (2.8) ta kết luận rằng $\{y^k\}$ là dãy bị chặn. □

Bây giờ, chúng tôi đề xuất một thuật toán để giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach thực như sau.

Thuật toán 2.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$ và các tham số $\eta, \mu \in (0,1)$, $0 < \alpha \leq \rho_k \leq \beta$. Đặt $B_0 = C$.

Bước lặp thứ k ($k = 0, 1, 2, ...$). Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min\left\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k, y) : \ y \in C \right\}.$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Thực hiện một trong bốn quy tắc tìm kiếm theo tia sau:

Quy tắc tìm kiếm theo tia 1: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 2: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ \langle g^{k,m}, x^k - y^k \rangle \geq \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k) \text{ với } g^{k,m} \in \partial_2 f(z^{k,m}, z^{k,m}). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}, g^k = g^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 3: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, y^k) \leq -\frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 4: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) + f(x^k, y^k) \geq -\frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Chọn $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$. Tính

$$u^k = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_k,$$

$$H_k = \{x \in E : \langle w^k, x - x^k\rangle + f(z^k, x^k) \leq 0\}.$$

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = P_{B_{k+1}}(x^g),$$

trong đó $B_{k+1} = \{x \in B_k : \varphi(u^k, x) \leq \varphi(x^k, x)\}$ và quay về *Bước lặp thứ k* với k được thay bởi $k+1$.

Nhận xét 2.2.4. *(i) Nếu $y^k = x^k$ thì x^k là một nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C, f)$.*

(ii) Áp dụng Định lý 1.3.2 và 1.3.5, bài toán tối ưu ở Bước 1 của Thuật toán 2.1 có nghiệm. Theo Bổ đề 1.3.4, bài toán này có nghiệm duy nhất.

Bổ đề sau có thể được xem như một phiên bản trong không gian Banach của Bổ đề 4.2 trong [42] (cũng như trong [22]).

Bổ đề 2.2.5. *Tại mỗi bước lặp thứ k, nếu $y^k \neq x^k$ thì ta có:*

(i) Quy tắc tìm kiếm theo tia 1, 2, 3 và 4 là xác định tốt;

(ii) $f(z^k, x^k) > 0$.

Chứng minh. (i) Đầu tiên, ta chứng minh cho trường hợp của quy tắc tìm kiếm theo tia 1. Thật vậy, lấy $k \in \mathbb{N}$. Giả sử ngược lại rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số nguyên dương m.

$$f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) < \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \tag{2.10}$$

Bởi vì $z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k$ và $\eta \in (0,1)$ nên ta có $z^{k,m} \to x^k$ khi $m \to \infty$. Theo giả thiết ($\mathscr{A}_2$), ta có $f(z^{k,m}, x^k) \to 0$ và $f(z^{k,m}, y^k) \to f(x^k, y^k)$ khi $m \to \infty$. Do đó, cho $m \to \infty$ trong (2.10), ta nhận được

$$-f(x^k, y^k) \leq \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \tag{2.11}$$

Bây giờ, từ Bước 1 của Thuật toán 2.1, ta có

$$y^k = \arg\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k, y) : \ y \in C\right\}.$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.10, ta có

$$0 \in \partial_2 f(x^k, y^k) + \frac{1}{2\rho_k}\partial_2\varphi(x^k, y^k) + N_C(y^k).$$

Kết hợp với $\partial_2\varphi(x^k, y^k) = \{2(Jy^k - Jx^k)\}$, ta có tồn tại $v^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$ sao cho

$$-v^k - \frac{1}{\rho_k}(Jy^k - Jx^k) \in N_C(y^k).$$

Điều này nghĩa là

$$\langle v^k, y - y^k\rangle + \frac{1}{\rho_k}\langle Jy^k - Jx^k, y - y^k\rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{2.12}$$

Mặt khác, $v^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$, nên theo định nghĩa dưới vi phân, ta có

$$f(x^k, y) - f(x^k, y^k) - \langle v^k, y - y^k\rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13), ta nhận được

$$f(x^k, y) - f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho_k}\langle Jy^k - Jx^k, y - y^k\rangle \geq 0, \ \forall y \in C, \tag{2.14}$$

hay là

$$\rho_k[f(x^k, y) - f(x^k, y^k)] \geq \langle Jy^k - Jx^k, y^k - y\rangle, \ \forall y \in C. \tag{2.15}$$

Thay $y = x^k$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$-\rho_k f(x^k, y^k) \geq \langle Jy^k - Jx^k, y^k - x^k \rangle. \tag{2.16}$$

Từ (1.7), (2.11) và (2.16), ta suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{2}\varphi(x^k, y^k) &\geq \langle Jy^k - Jx^k, y^k - x^k \rangle \\ &= \frac{1}{2}[\varphi(y^k, x^k) + \varphi(x^k, y^k)] \\ &> \frac{1}{2}\varphi(x^k, y^k).\end{aligned}$$

Do đó, $(\mu - 1)\varphi(x^k, y^k) > 0$. Bởi vì $\mu \in (0, 1)$, ta suy ra rằng $\varphi(x^k, y^k) < 0$. Điều này mâu thuẫn với tính chất của hàm φ. Vì vậy, điều giả sử là sai và quy tắc tìm kiếm theo tia 1 là xác định tốt. Chứng minh tương tự, ta cũng có các quy tắc tìm kiếm theo tia 2, 3 và 4 là xác định tốt.

(ii) Sử dụng giả thiết $(\mathscr{A}_1)$ và định nghĩa hàm lồi, ta có

$$\begin{aligned}\eta_k f(z^k, y^k) + (1 - \eta_k) f(z^k, x^k) &\geq f(z^k, \eta_k y^k + (1 - \eta_k) x^k) \\ &= f(z^k, z^k) = 0.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Điều này dẫn đến

$$\eta_k [f(z^k, x^k) - f(z^k, y^k)] \leq f(z^k, x^k). \tag{2.18}$$

Trường hợp 1. Quy tắc tìm kiếm theo tia 1 được sử dụng. Trong trường hợp này, ta có

$$f(z^k, x^k) - f(z^k, y^k) \geq \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \tag{2.19}$$

Sử dụng (2.18) và (2.19), ta đạt được

$$f(z^k, x^k) \geq \frac{\mu \eta_k}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \tag{2.20}$$

Trường hợp 2. Quy tắc tìm kiếm theo tia 2 được sử dụng. Bởi vì $g^k \in \partial_2 f(z^k, z^k)$, nên ta có

$$f(z^k, z) \geq \langle g^k, z - z^k \rangle \ \forall z \in C.$$

Thay $z = x^k$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$f(z^k, x^k) \geq \langle g^k, x^k - z^k \rangle.$$

Bởi vì $z^k = (1-\eta_k)x^k + \eta_k y^k$, nên $x^k - z^k = \eta_k(x^k - y^k)$. Do đó, thay vào bất đẳng thức trên ta có

$$f(z^k,x^k) \geq \eta_k\langle g^k, x^k - y^k\rangle \geq \frac{\mu\eta_k}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k), \tag{2.21}$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai suy từ quy tắc tìm kiếm theo tia 2.

Trường hợp 3. Quy tắc tìm kiếm theo tia 3 được sử dụng. Từ định nghĩa của z^k, ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}\frac{\mu\eta_k}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k) &\leq -\eta_k f(z^k,y^k)\\ &\leq (1-\eta_k)f(z^k,x^k),\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy từ (2.17). Kết hợp với $y^k \neq x^k, \mu > 0, \rho_k > 0$ và $0 < \eta_k < 1$, ta có $f(z^k,x^k) > 0$. Do đó,

$$(1-\eta_k)f(z^k,x^k) < f(z^k,x^k).$$

Vì vậy,

$$f(z^k,x^k) > \frac{\mu\eta_k}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k). \tag{2.22}$$

Trường hợp 4. Quy tắc tìm kiếm theo tia 4 được sử dụng. Áp dụng (2.5), ta nhận được

$$\begin{aligned}f(z^k,x^k) - f(z^k,y^k) &\geq -f(x^k,y^k) - \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k)\\ &\geq \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k) - \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k)\\ &= \frac{1-\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k).\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.18), ta suy ra rằng

$$f(z^k,x^k) \geq \eta_k(f(z^k,x^k) - f(z^k,y^k)) \geq \frac{\eta_k(1-\mu)}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k). \tag{2.23}$$

Tóm lại, trong bốn trường hợp, từ $(2.20), (2.21), (2.22)$ và (2.23), ta suy ra rằng $f(z^k,x^k) > 0$. □

Định lý sau đây thiết lập sự hội tụ mạnh của dãy $\{x^k\}$ tới một nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C,f)$.

Định lý 2.2.6. *Giả sử rằng tập S_M khác rỗng. Khi đó, với các giả thiết $(\mathscr{A}_1) - (\mathscr{A}_3)$, các dãy $\{x^k\}$ và $\{u^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới một nghiệm x^* của bài toán $EP(C, f)$.*

Chứng minh. Ta chia chứng minh của định lý thành ba bước như sau.
Bước 1. Ta sẽ chỉ ra rằng $S_M \subset \cap_{k=0}^{\infty} C_k \subset \cap_{k=0}^{\infty} B_k$ và năm dãy $\{x^k\}, \{y^k\}, \{z^k\}, \{w^k\}, \{u^k\}$ bị chặn.
Thật vậy, lấy $\bar{x} \in S_M$, tức là, $f(y, \bar{x}) \leq 0, \forall y \in C$. Thay $y = z^k \in C$ vào ta có

$$f(z^k, \bar{x}) \leq 0, \ \forall k. \tag{2.24}$$

Bởi vì $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$ nên ta có

$$f(z^k, y) \geq f(z^k, x^k) + \langle w^k, y - x^k \rangle, \forall y \in C.$$

Thay $y = \bar{x}$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$f(z^k, \bar{x}) \geq f(z^k, x^k) + \langle w^k, \bar{x} - x^k \rangle. \tag{2.25}$$

Từ (2.24) và (2.25), ta suy ra

$$f(z^k, x^k) + \langle w^k, \bar{x} - x^k \rangle \leq 0, \forall k.$$

Điều này nghĩa là $\bar{x} \in H_k$ với $\forall k$. Vì vậy, $\bar{x} \in C_k$ với $\forall k$. Do đó, $S_M \subset \cap_{k=0}^{\infty} C_k$.

Lấy bất kỳ $x \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k$. Do $u^k = P_{C_k}(x^k)$ và áp dụng Mệnh đề 1.1.20(i), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \varphi(u^k, x) &\leq \varphi(x^k, x) - \varphi(x^k, u^k) \\ &\leq \varphi(x^k, x), \ \forall x \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k, \forall k. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Vì vậy, $\cap_{k=0}^{\infty} C_k \subset \cap_{k=0}^{\infty} B_k$.
Hơn thế nữa, sử dụng định nghĩa của x^k, ta có

$$\varphi(x^g, x^k) + \varphi(x^k, x) \leq \varphi(x^g, x), \ \forall x \in B_k.$$

Vì vậy,

$$\varphi(x^g, x^k) \leq \varphi(x^g, x), \ \forall x \in B_k. \tag{2.27}$$

Điều này nghĩa là

$$\varphi(x^g, x^k) \leq \varphi(x^g, \bar{x}), \forall k,\ \forall \bar{x} \in \cap_{k=0}^{\infty} B_k. \tag{2.28}$$

Mặt khác, theo tính chất của hàm φ, ta có

$$\varphi(x^g, x^k) \geq (\|x^g\| - \|x^k\|)^2.$$

Kết hợp với (2.28), ta suy ra tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$. Tiếp tục, áp dụng Bổ đề 2.2.3, ta cũng có tính bị chặn của dãy $\{y^k\}$. Theo định nghĩa của z^k, $\{z^k\}$ cũng là dãy bị chặn. Sử dụng giả thiết $(\mathscr{A}_3)$, ta có

$$\|w^k\| = \sup_{\|y-x^k\|\leq 1} \langle w^k, y - x^k\rangle \leq \sup_{\|y-x^k\|\leq 1} |f(z^k, y) - f(z^k, x^k)| \leq L.$$

Vì vậy, $\{w^k\}$ là dãy bị chặn. Theo (2.26) và tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$, ta suy ra rằng dãy $\{u^k\}$ là dãy bị chặn.

Bước 2. Ta sẽ chỉ ra rằng $\lim_{k\to\infty} \varphi(x^k, x^{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \varphi(u^k, x^k) = 0$ và bất kỳ điểm tụ yếu $\bar{x}$ nào của dãy $\{x^k\}$ cũng thuộc B_k với mọi k.

Thật vậy, thay x bởi x^{k+1} trong (2.27), ta nhận được

$$\varphi(x^g, x^k) \leq \varphi(x^g, x^{k+1})\ \forall k. \tag{2.29}$$

Kết hợp với tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$, điều này dẫn đến

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x^g, x^k) = c \geq 0. \tag{2.30}$$

Hơn thế nữa, ta có

$$\begin{aligned}
\varphi(x^k, x^{k+1}) &= \varphi(x^k, x^g) + \varphi(x^g, x^{k+1}) + 2\langle Jx^k - Jx^g, x^g - x^{k+1}\rangle \\
&= \varphi(x^k, x^g) + \varphi(x^g, x^{k+1}) + 2\langle Jx^k - Jx^g, x^g - x^k\rangle + 2\langle Jx^k - Jx^g, x^k - x^{k+1}\rangle \\
&= \varphi(x^k, x^g) + \varphi(x^g, x^{k+1}) - (\varphi(x^k, x^g) + \varphi(x^g, x^k)) + 2\langle Jx^k - Jx^g, x^k - x^{k+1}\rangle \\
&= \varphi(x^g, x^{k+1}) - \varphi(x^g, x^k) + 2\langle Jx^k - Jx^g, x^k - x^{k+1}\rangle \\
&\leq \varphi(x^g, x^{k+1}) - \varphi(x^g, x^k),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng có được vì $x^k = P_{B_k}(x^g)$ và $x^{k+1} \in B_k$. Cho $k \to \infty$ trong (2.31), do (2.30) và tính không âm của φ, ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x^k, x^{k+1}) = 0. \tag{2.32}$$

Sử dụng điều này cùng với Bổ đề 2.2.1, ta có

$$\lim \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \tag{2.33}$$

Bởi vì $x^{k+1} \in B_{k+1}$ nên ta có $\varphi(u^k, x^{k+1}) \leq \varphi(x^k, x^{k+1})$. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(u^k, x^k) &= \varphi(u^k, x^{k+1}) + \varphi(x^{k+1}, x^k) + 2\langle Ju^k - Jx^{k+1}, x^{k+1} - x^k\rangle \\ &\leq \varphi(x^k, x^{k+1}) + \varphi(x^{k+1}, x^k) + 2\langle Ju^k - Jx^{k+1}, x^{k+1} - x^k\rangle \\ &= 2\langle Jx^{k+1} - Jx^k, x^{k+1} - x^k\rangle + 2\langle Ju^k - Jx^{k+1}, x^{k+1} - x^k\rangle \\ &= 2\langle Ju^k - Jx^k, x^{k+1} - x^k\rangle. \end{aligned}$$

Do đó,

$$0 \leq \varphi(u^k, x^k) \leq 2||Ju^k - Jx^k||.||x^{k+1} - x^k||.$$

Do $\mathbb{E}$ là không gian trơn đều nên theo Mệnh đề 1.1.17 ta có J là liên tục đều trên mỗi tập bị chặn của $\mathbb{E}$. Kết hợp với tính bị chặn của hai dãy $\{x^k\}$ và $\{u^k\}$, ta suy ra

$$||Ju^k - Jx^k|| \leq K.$$

Vì vậy, từ hai bất đẳng thức trên ta có

$$0 \leq \varphi(u^k, x^k) \leq K\|x^{k+1} - x^k\|.$$

Cho $k \to \infty$ và sử dụng (2.33), ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(u^k, x^k) = 0. \tag{2.34}$$

Bây giờ, ta giả sử rằng tồn tại một dãy $\{x^{k_j}\}$ là dãy con của dãy $\{x^k\}$ và $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$ khi $j \to \infty$. Ta phải chứng minh rằng $\bar{x} \in B_k$ với mọi k. Giả sử ngược lại rằng tồn tại một số k_0 sao cho $\bar{x} \notin B_{k_0}$. Vì B_{k_0} là đóng và lồi nên B_{k_0} cũng là đóng yếu. Do đó, tồn tại một số $k_{j_0} > k_0$ sao cho $x^{k_j} \notin B_{k_0}$ với mọi $k_j \geq k_{j_0}$. Nói riêng, $x^{k_{j_0}} \notin B_{k_0}$. Điều này mâu thuẫn với $x_{k_{j_0}} \in B_{k_{j_0}-1} \subset ... \subset B_{k_0+1} \subset B_{k_0}$. Vì vậy, điều giả sử sai và $\bar{x} \in B_k$ với $\forall k$ hay $\bar{x} \in \cap_{k=0}^{\infty} B_k$.

Bước 3. Hai dãy $\{x^k\}, \{u^k\}$ hội tụ mạnh tới $x^* = P_{\cap_{k=0}^{\infty} B_k}(x^g)$ và x^* là nghiệm của

EP(C, f). Thật vậy, thay thế $\bar{x}$ bằng x^* trong (2.28), ta có $\varphi(x^g, x^k) \leq \varphi(x^g, P_{\cap_{k=0}^{\infty} B_k}(x^g))$. Sử dụng điều này và Bổ đề 2.2.2, ta nhận được

$$\varphi(x^*, x^k) = \varphi(P_{\cap_{k=0}^{\infty} B_k}(x^g), x^k) \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Kết hợp với tính bị chặn của $\{x^k\}$, ta suy ra $x^k \to x^*$ khi $k \to \infty$. Từ (2.34) và Bổ đề 2.2.1, ta nhận được

$$\lim_{k \to \infty} \|x^k - u^k\| = 0. \tag{2.35}$$

Vì vậy, $u^k \to x^*$ khi $k \to \infty$.

Sử dụng định nghĩa của u^k và C_k, ta có $u^k \in H_k$. Điều này dẫn đến

$$\langle w^k, u^k - x^k \rangle + f(z^k, x^k) \leq 0. \tag{2.36}$$

Mặt khác,

$$|\langle w^k, u^k - x^k \rangle| \leq \|w^k\| \|u^k - x^k\|.$$

Kết hợp với (2.35) và tính bị chặn của $\{w^k\}$, ta nhận được $\langle w^k, u^k - x^k \rangle \to 0$ khi $k \to \infty$. Cho $k \to \infty$ trong (2.36) và sử dụng Bổ đề 2.2.5(ii), ta có

$$\lim_{k \to \infty} f(z^k, x^k) = 0.$$

Nếu ta sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia 1, từ (2.20), ta có

$$f(z^k, x^k) \geq \frac{\mu \eta_k}{2\rho_k} \varphi(x^k, y^k) \geq \frac{\mu \eta_k}{2\beta} \varphi(x^k, y^k) \geq 0.$$

Kết hợp với $\lim_{k \to \infty} f(z^k, x^k) = 0$, ta nhận được

$$\lim_{k \to \infty} \eta_k \varphi(x^k, y^k) = 0. \tag{2.37}$$

Tương tự, nếu quy tắc tìm kiếm theo tia 2, 3 hoặc 4 được sử dụng thì từ (2.21), (2.22), (2.23), ta cũng suy ra (2.37).

Giả sử rằng tồn tại một số $k_0 \geq 0$ và $\tau > 0$ sao cho $\varphi(x^k, y^k) > \tau$ với $\forall k \geq k_0$. Khi đó, từ (2.37) ta có

$$\lim_{k \to \infty} \eta_k = 0.$$

Bây giờ, ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. Giả sử quy tắc tìm kiếm theo tia 1 được sử dụng. Với $m_k - 1$, tồn tại $z^{k,m_k-1} = (1-\eta^{m_k-1})x^k + \eta^{m_k-1}y^k$ sao cho

$$f(z^{k,m_k-1},x^k) - f(z^{k,m_k-1},y^k) < \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k). \tag{2.38}$$

Sử dụng $\lim_{k\to\infty}\|z^{k,m_k-1} - x^k\| = 0$ và giả thiết $(\mathscr{A}_2)$, ta có các bất đẳng thức sau khi k đủ lớn.

$$\rho_k\big(f(x^k,x^k) - f(z^{k,m_k-1},x^k)\big) \le \frac{\tau(1-\mu)}{4}.$$
$$\rho_k\big(f(z^{k,m_k-1},y^k) - f(x^k,y^k)\big) \le \frac{\tau(1-\mu)}{4}.$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}\rho_k\big(f(x^k,x^k) - f(x^k,y^k)\big) &\le \rho_k\big(f(z^{k,m_k-1},x^k) - f(z^{k,m_k-1},y^k)\big) + \frac{\tau(1-\mu)}{2}\\ &< \frac{\mu}{2}\varphi(x^k,y^k) + \frac{1-\mu}{2}\varphi(x^k,y^k)\\ &= \frac{1}{2}\varphi(x^k,y^k).\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.16), ta có

$$\langle Jy^k - Jx^k, y^k - x^k\rangle < \frac{1}{2}\varphi(x^k,y^k),$$

hay là

$$\frac{1}{2}\varphi(y^k,x^k) + \frac{1}{2}\varphi(x^k,y^k) < \frac{1}{2}\varphi(x^k,y^k), \text{ khi } k \text{ đủ lớn.}$$

Vì vậy, $\varphi(y^k,x^k) < 0$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của hàm φ.

Trường hợp 2. Giả sử quy tắc tìm kiếm theo tia 2 được sử dụng. Với $m_k - 1$, tồn tại $z^{k,m_k-1} = (1-\eta^{m_k-1})x^k + \eta^{m_k-1}y^k$ sao cho

$$\langle g^{k,m_k-1}, x^k - y^k\rangle < \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k), \tag{2.39}$$

trong đó $g^{k,m_k-1} \in \partial_2 f(z^{k,m_k-1},z^{k,m_k-1})$. Theo định nghĩa dưới vi phân của $f(z^{k,m_k-1},.)$ và (2.39), ta có

$$f(z^{k,m_k-1},y^k) \ge \langle g^{k,m_k-1}, y^k - z^{k,m_k-1}\rangle$$

$$= (1-\eta^{m_k-1})\langle g^{k,m_k-1}, y^k - x^k\rangle$$
$$> \frac{(\eta^{m_k-1}-1)\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k).$$

Do đó, ta có

$$\rho_k f(z^{k,m_k-1},y^k) > \frac{(\eta^{m_k-1}-1)\mu}{2}\varphi(x^k,y^k).$$

Từ (2.5), ta nhận được

$$-\rho_k f(x^k,y^k) \geq \frac{1}{2}\varphi(x^k,y^k).$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}\rho_k(f(z^{k,m_k-1},y^k) - f(x^k,y^k)) &> \frac{1-\mu+\mu\eta^{m_k-1}}{2}\varphi(x^k,y^k) \\ &> \frac{1-\mu}{2}\varphi(x^k,y^k),\end{aligned} \tag{2.40}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy từ $\eta > 0, \mu > 0$ và $y^k \neq x^k$.

Sử dụng $\lim_{k\to\infty}\|z^{k,m_k-1} - x^k\| = 0$ và tính liên tục của f, ta có bất đẳng thức sau khi k đủ lớn.

$$\rho_k(f(z^{k,m_k-1},y^k) - f(x^k,y^k)) \leq \frac{\tau(1-\mu)}{2}.$$

Kết hợp với (2.40), ta có

$$\frac{1-\mu}{2}\varphi(x^k,y^k) < \frac{\tau(1-\mu)}{2},$$

hay tương đương với

$$\varphi(x^k,y^k) < \tau,$$

khi k đủ lớn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\varphi(x^k,y^k) > \tau$ với mọi $k \geq k_0$.

Trường hợp 3. Giả sử quy tắc tìm kiếm theo tia 3 được sử dụng. Với $m_k - 1$, tồn tại $z^{k,m_k-1} = (1-\eta^{m_k-1})x^k + \eta^{m_k-1}y^k$ sao cho

$$f(z^{k,m_k-1},y^k) > \frac{-\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k).$$

Từ (2.5), ta có

$$-f(x^k,y^k) \geq \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k).$$

Từ hai bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\rho_k(f(z^{k,m_k-1},y^k)-f(x^k,y^k))>\frac{1-\mu}{2}\varphi(x^k,y^k). \tag{2.41}$$

Sử dụng $\lim_{k\to\infty}\|z^{k,m_k-1}-x^k\|=0$ và tính liên tục của f, ta có bất đẳng thức sau khi k đủ lớn.

$$\rho_k(f(z^{k,m_k-1},y^k)-f(x^k,y^k))\le\frac{\tau(1-\mu)}{2}.$$

Kết hợp với (2.41), ta nhận được

$$\frac{1-\mu}{2}\varphi(x^k,y^k)<\frac{\tau(1-\mu)}{2},$$

hay tương đương với

$$\varphi(x^k,y^k)<\tau \text{ khi } k \text{ đủ lớn.}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\varphi(x^k,y^k)>\tau$ với mọi $k\ge k_0$.

Trường hợp 4. Giả sử quy tắc tìm kiếm theo tia 4 được sử dụng. Với m_k-1, tồn tại $z^{k,m_k-1}=(1-\eta^{m_k-1})x^k+\eta^{m_k-1}y^k$ sao cho

$$f(z^{k,m_k-1},x^k)-f(z^{k,m_k-1},y^k)+f(x^k,y^k)<\frac{-\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k,y^k),$$

hay là

$$\rho_k(f(z^{k,m_k-1},y^k)-f(x^k,y^k)-f(z^{k,m_k-1},x^k))>\frac{\mu}{2}\varphi(x^k,y^k). \tag{2.42}$$

Sử dụng $\lim_{k\to\infty}\|z^{k,m_k-1}-x^k\|=0$ và giả thiết $(\mathscr{A}_2)$ ta có các bất đẳng thức sau khi k đủ lớn.

$$\rho_k(f(x^k,x^k)-f(z^{k,m_k-1},x^k))\le\frac{\tau\mu}{4},$$
$$\rho_k(f(z^{k,m_k-1},y^k)-f(x^k,y^k)\le\frac{\tau\mu}{4}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, ta có

$$\rho_k(f(z^{k,m_k-1},y^k)-f(x^k,y^k)-f(z^{k,m_k-1},x^k))\le\frac{\tau\mu}{2}.$$

Kết hợp với (2.42), ta nhận được

$$\frac{\mu}{2}\varphi(x^k,y^k)<\frac{\tau\mu}{2},$$

hay tương đương với

$$\varphi(x^k, y^k) < \tau \text{ khi } k \text{ đủ lớn.}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\varphi(x^k, y^k) > \tau$ for all $k \geq k_0$.

Nói tóm lại, nếu sử dụng một trong bốn quy tắc tìm kiếm theo tia 1, 2, 3, và 4, ta có

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(x^k, y^k) = 0.$$

Khi đó, tồn tại một dãy con $\{x^{k_i}\}$ của $\{x^k\}$ và một dãy con $\{y^{k_i}\}$ của $\{y^k\}$ sao cho

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(x^{k_i}, y^{k_i}) = 0. \tag{2.43}$$

Theo tính bị chặn của dãy $\{x^{k_i}\}$ và Bổ đề 2.2.1, ta suy ra rằng

$$\lim_{i\to\infty} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| = 0. \tag{2.44}$$

Do $x^{k_i} \to x^*$ và (2.44), ta suy ra rằng $y^{k_i} \to x^*$ khi $i \to \infty$.

Theo định nghĩa của y^{k_i} và lặp lại chứng minh của Bổ đề 2.2.5, ta có

$$f(x^{k_i}, y) - f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{\rho_{k_i}} \langle Jy^{k_i} - Jx^{k_i}, y - y^{k_i} \rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{2.45}$$

Vì J là liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của $\mathbb{E}$ và (2.44) nên ta có

$$\lim_{i\to\infty} \|Jy^{k_i} - Jx^{k_i}\| = 0.$$

Kết hợp với tính bị chặn của dãy $\{y^{k_i}\}$ và $\alpha < \rho_{k_i} < \beta$, ta nhận được

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{\rho_{k_i}} \langle Jy^{k_i} - Jx^{k_i}, y - y^{k_i} \rangle = 0. \tag{2.46}$$

Sử dụng giả thiết $(\mathscr{A}_3)$, ta có

$$|f(x^{k_i}, x^{k_i}) - f(x^{k_i}, y^{k_i})| \leq L\|y^{k_i} - x^{k_i}\|.$$

Kết hợp với (2.44), ta có

$$\lim_{i\to\infty} f(x^{k_i}, y^{k_i}) = 0. \tag{2.47}$$

Cho $i \to \infty$ trong (2.45), theo giả thiết $(\mathscr{A}_2)$ và (2.46), (2.47), ta nhận được

$$f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Vì vậy, x^* là nghiệm của bài toán EP(C, f).

□

2.3 Ví dụ minh họa

Trong phần cuối cùng của chương, chúng tôi xét một ví dụ minh họa cho sự hội tụ của Thuật toán 2.1, đồng thời so sánh nó với thuật toán SEML dùng để giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach trong [46].

Thuật toán SEML

Bước khởi tạo. Lấy $v^0 = v^g \in \mathbb{E}$, $\gamma_k \in [\varepsilon, \frac{1}{2}]$ với $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Chọn các tham số $\eta, \mu \in (0,1)$, $0 < \alpha \leq \rho_k \leq \beta$.

Bước lặp thứ k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$x^k = P_C(v^k),$$
$$y^k = \arg\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\varphi(x^k, y) : \ y \in C\right\}.$$

Nếu $y^k = v^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện *Bước 2*.

Bước 2. Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{\mu}{2\rho_k}\varphi(x^k, y^k). \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Lấy $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$ và xác định

$$H_k = \{x \in E : \langle w^k, x - x^k\rangle + f(z^k, x^k) \leq 0\}.$$

Nếu $k = 0$, thì đặt $C_0 = C \cap H_0$. Tính $u^k = P_{C_k}(x^k)$, trong đó $C_k = C_{k-1} \cap H_k$.

Bước 4. Tính

$$v^{k+1} = P_{L_k \cap N_k \cap M_k}(v^g),$$

trong đó

$$L_k = \{z \in \mathbb{E} : \langle Jx^k - Ju^k, z - x^k\rangle \leq -\gamma_k \varphi(u^k, x^k)\},$$

$$N_k = \{z \in \mathbb{E} : \langle Jv^g - Jv^k, z - v^k \rangle \leq 0\},$$

$$M_k = \{z \in \mathbb{E} : \langle Jv^k - Jx^k, z - v^k \rangle \leq -\gamma_k \varphi(x^k, v^k)\}$$

và quay về Bước lặp k với k được thay bởi $k+1$.

Chú ý rằng, trong thuật toán của chúng tôi, tại mỗi bước lặp k, để tính bước lặp tiếp theo, ta phải giải ba bài toán tối ưu, trong đó, có một bài toán trên tập ràng buộc C, một bài toán trên tập $C_k = C \cap H_k$ và một bài toán chiếu thu hẹp. Trong khi đó, trong thuật toán SEML trong [46], các tác giả phải giải bốn bài toán tối ưu, trong đó hai bài trên tập ràng buộc C, một bài toán chiếu thu hẹp và một bài toán trên tập lồi đa diện. Như vậy, có hai bài toán tương tự nhau trong hai thuật toán. Điểm khác nhau ở đây là có một bài toán giải trên tập $C_k = C \cap H_k$ trong thuật toán của chúng tôi, còn của họ là giải trên tập C và $L_k \cap N_k \cap M_k$, trong đó H_k, L_k, M_k, N_k là các tập lồi đa diện. Do đó, trong trường hợp C là tập lồi đa diện, thuật toán của chúng tôi sẽ tốt hơn thuật toán SEML.

Ví dụ 2.3.1. Trong mục này, chúng tôi xét bài toán cân bằng EP(C, f) trên không gian $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ với $1 < p < \infty$. Không gian đối ngẫu của $\mathbb{E}$ là $\mathbb{E}^* = (\mathbb{R}^n, \|.\|_q)$, trong đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chúng tôi xét hàm $\langle ., . \rangle : \mathbb{E}^* \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ như sau:

$$\langle u, v \rangle = \Sigma_{i=1}^n u_i v_i,$$

với $u = (u_1, ..., u_n)^T \in \mathbb{E}^*$ và $v = (v_1, ..., v_n)^T \in \mathbb{E}$.
Song hàm $f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau

$$f(x, y) = \langle PJx, x - y \rangle,$$

trong đó P là ma trận thực cấp n. Từ định nghĩa của $J : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$, ta có thể thấy rằng với $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{E}$ ta có

$$Jx = \begin{cases} \|x\|_p^{2-p}(x_1|x_1|^{p-2}, ..., x_n|x_n|^{p-2}) & \text{nếu } x \neq 0; \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Bây giờ, ta xét $p = 4, C = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : 0 \leq x_i \leq 0.3n \text{ với } i = 1, 2, ..., n\}$. Khi n là số chẵn, ma trận P được xác định bởi:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & n-1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & n \end{bmatrix}.$$

Bằng cách chọn $x = (0,0,...,0)^T \in C$ và $y = (0.3n, 0.3n, ..., 0.3n)^T \in C$, ta có

$$f(x,y) = 0,$$

$$PJy = 0.3\sqrt{n}(2,3,...,n,n+1)^T,$$

$$f(y,x) = \langle PJy, y-x \rangle = 0.3^2 n\sqrt{n}(2+3+...+n+n+1) = \frac{0.3^2 n^2 \sqrt{n}(n+3)}{2} > 0.$$

Do đó, f là không giả đơn điệu trên C.

Nếu n là số lẻ, thì ta xét ma trận P được xác định bởi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & 1 & 4 & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & n-1 & 1 & \\ & & & & & 1 & n & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n \end{bmatrix}.$$

Rõ ràng với $\bar{x} = (0,0,...,0)^T \in C$ và $\bar{y} = (0.3n, 0.3n, ..., 0.3n)^T \in C$, thì ta có

$$f(\bar{x},\bar{y}) = 0,$$

$$PJ\bar{y} = 0.3\sqrt{n}(2,3,...,n,n+1,n)^T,$$

$$f(\bar{y},\bar{x}) = \langle PJ\bar{y}, \bar{y}-\bar{x} \rangle = 0.3^2 n\sqrt{n}(2+3+...+n+n+1+n) = \frac{0.3^2 n^2 \sqrt{n}(n+5)}{2} > 0.$$

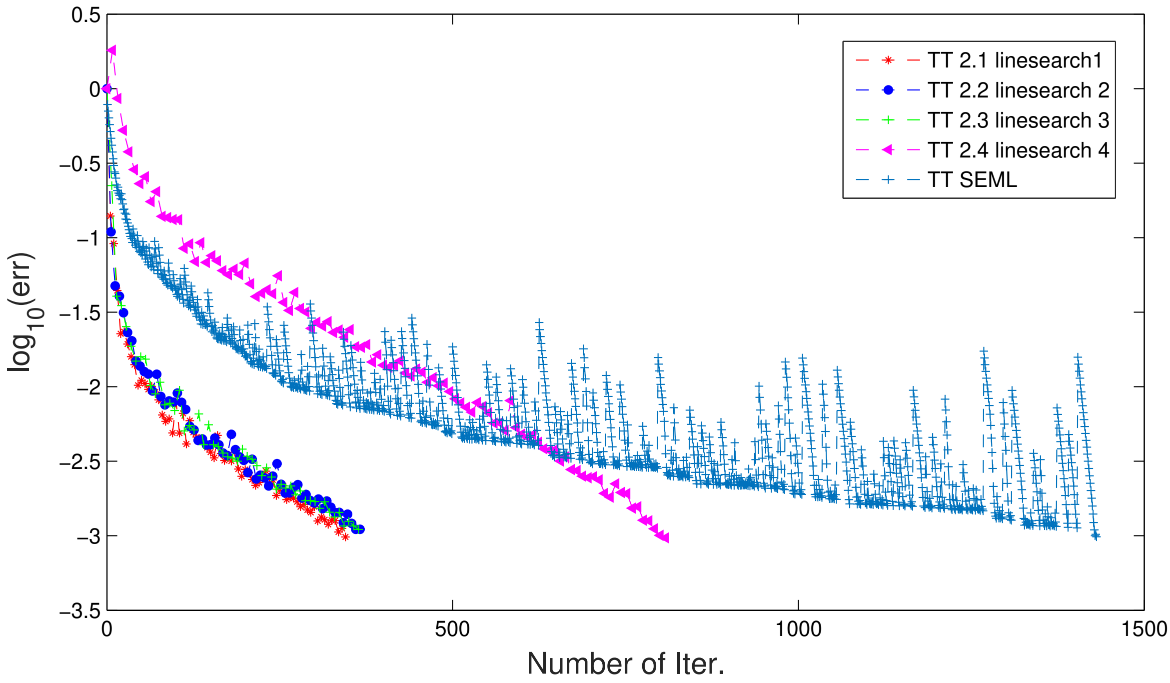
Do đó, với mọi số nguyên dương n và ma trận P như trên, song hàm f là không giả đơn điệu trên C. Hơn nữa, ta cũng kiểm tra được f thỏa mãn các điều kiện $(\mathscr{A}_1)$-$(\mathscr{A}_3)$, và $u = (0.3n, 0.3n, ..., 0.3n)^T \in S_M$.

Chúng tôi tiến hành tính toán cho Thuật toán 2.1 và Thuật toán SEML trong trường hợp $n \in \{5, 10, 20, 25, 30, 50\}$ với các dữ liệu đầu vào như sau. Với Thuật toán 2.1, chọn $\mu = 0.1,\ \eta = 0.99$, $\rho_k = 1$ trong quy tắc tìm kiếm tia 1 và $\rho_k = 1 - \frac{1}{k+1}$ trong quy tắc tìm kiếm tia 2, 3, 4. Với Thuật toán SEML, chọn $\mu = 0.1,\ \eta = 0.99$, $\rho_k = 1$ và $\gamma_k = 0.1$. Điểm xuất phát là $x^g = (1, 1, ..., 1)^T$ với Thuật toán 2.1, và $v^g = (1, 1, ..., 1)^T$ với Thuật toán SEML. Với điểm xuất phát khác 0, tất cả năm thuật toán hội tụ mạnh tới nghiệm $x^* = (0.3n, ..., 0.3n)$. Để kết thúc thuật toán, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng $Err = \frac{\|x^k - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \varepsilon$ với $\varepsilon = 10^{-3}$ hoặc số bước lặp không quá 2000. Thuật toán 2.1 và Thuật toán SEML được lập trình bằng phần mềm Matlab, phiên bản R2015 chạy trên Desktop với cấu hình Intel (R), Core (TM) i7-9700 CPU, 3.00 Ghz, Ram 8.0 GB. Các kết quả tính toán được trình bày trên Bảng 2.1 và Hình 2.1. Từ Bảng 2.1, chúng ta có thể thấy rằng, với cùng ngưỡng sai số, quy tắc tìm kiếm tia 1, 2 và 3 của Thuật toán 2.1 có lợi thế hơn so với quy tắc tìm kiếm tia 4 và Thuật toán SEML, đặc biệt là về số bước lặp (Iter.) và thời gian thực hiện (CPU(s)).

n	TT. 2.1 linesearch 1		TT. 2.1 linesearch 2		TT. 2.1 linesearch 3	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
5	5.91	44	6.56	43	6.08	43
10	19.42	108	21.4	116	21.16	116
20	73.8	266	81.69	298	82.6	298
25	119.55	346	125.63	368	125.0	368
30	172.83	442	176.42	446	174.16	446
50	2810.94	711	2900.48	728	2902.25	728

n	TT.2.1 linesearch 4		TT. SEML	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
5	8.38	55	154.67	759
10	32.08	172	300.5	1333
20	164.03	551	351.17	1231
25	302.41	809	1409.67	1432
30	1458.61	1080	490.95	880
50	15988.75	2000	11048.97	1767

Bảng 2.1: Kết quả tính toán cho Ví dụ 2.3.1.



Hình 2.1: Số bước lặp trong Ví dụ 2.3.1 trong trường hợp $n = 25$

Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất một thuật toán để giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu trong không gian Banach thực. Mỗi bước lặp trong thuật toán là sự kết hợp giữa phương pháp đạo hàm tăng cường với bốn quy tắc tìm kiếm theo tia và kỹ thuật chiếu thu hẹp. Với giả thiết về tính liên tục, tính lồi của song hàm và tính khác rỗng của tập nghiệm bài toán cân bằng Minty, chúng tôi đã chỉ ra sự hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán của dãy lặp $\{x^k\}$. Đồng thời, cuối chương chúng tôi đưa ra một ví dụ minh họa cho Thuật toán 2.1 và so sánh nó với thuật toán SEML trong [46].

Chương 3

Phương pháp chiếu kiểu thích nghi giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Các phương pháp giải bài toán cân bằng EP(C, f) thường đòi hỏi tính lồi theo biến thứ hai và tính đơn điệu hoặc đơn điệu suy rộng của song hàm f. Tính đến nay, đã có một số kết quả đạt được cho lớp bài toán cân bằng lồi và đơn điệu này (xem [15, 16, 30, 31, 32]). Gần đây, một số tác giả đã xây dựng thuật toán kết hợp giữa phương pháp chiếu thu hẹp và quy tắc tìm kiếm theo tia để giải bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu (xem [13, 49, 58]). Tuy nhiên, tại mỗi bước lặp thứ $k+1$ để tìm x^{k+1}, ta cần phải thực hiện một phép chiếu thu hẹp trên tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc thứ k với một nửa không gian. Điều này dẫn tới chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Vì vậy, trong chương này, chúng tôi đề xuất các thuật toán sử dụng phương pháp chiếu mới khác với phương pháp chiếu thu hẹp, để giải bài toán không đơn điệu trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. Chương này gồm hai mục, mục thứ nhất dành cho bài toán bất đẳng thức biến phân, mục thứ hai dành cho bài toán tổng quát hơn là bài toán cân bằng. Trong mỗi mục, chúng tôi đều đặt ra bài toán nghiên cứu, nhắc lại một số bổ đề kỹ thuật dùng trong chứng minh, đề xuất các thuật toán mới và cuối cùng là đưa ra ví dụ số minh họa cho thuật toán.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trong hai bài báo [CT2] và [CT3] thuộc Danh mục các công trình liên quân đến Luận án.

[CT2] B.V. Dinh, H.D. Manh, T.T.H. Thanh (2022), A modified Solodov-Svaiter method for solving nonmonotone variational inequality problems, *Numerical Algorithms,* **90**, 1715–1734.

[CT3] T.T.H. Thanh, H.D. Manh, N.T.T. Ha, B.V. Dinh (2023), A novel method for solving nonmonotone equilibrium problems, (submitted 2023).

3.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân

3.1.1 Mở đầu

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, xét tích trong $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn tương ứng $\|\cdot\|$. Giả sử C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $F : C \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục. Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C, F):

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in C$$

và bài toán liên kết với VIP(C, F) là bài toán bất đẳng thức biến phân Minty MVIP(C, F):

$$\text{Tìm } u \in C \text{ sao cho } \langle F(y), u - y \rangle \leq 0, \ \forall y \in C.$$

Tập nghiệm của hai bài toán VIP(C, F) và MVIP(C, F) được ký hiệu lần lượt là S_{VIP} và S_{MVIP}. Ta đã biết rằng $S_{MVIP} \subset S_{VIP}$ nếu F là liên tục trên C, và $S_{VIP} \subset S_{MVIP}$ nếu F là giả đơn điệu trên C.

Có rất nhiều phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân và một trong những phương pháp đóng vai trò quan trọng đó là phương pháp đạo hàm tăng cường (hay còn gọi là phương pháp chiếu kép). Phương pháp này được đề xuất bởi tác giả G.M. Korpelevich trong [29] như sau

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y^k = P_C(x^k - \lambda F(x^k)), \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda F(y^k)), \end{cases}$$

trong đó P_C là phép chiếu lên C và $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$ (L hệ số Lipschitz của ánh xạ F). Trong [29], tác giả đã chứng minh rằng dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C, F) với giả thiết chính về tính giả đơn điệu và Lipschitz của ánh xạ F trên C. Để tìm được dãy $\{x^k\}$, ta phải thực hiện hai lần chiếu trên C, độ dài bước λ phụ thuộc vào hệ số Lipschitz L. Nếu hệ số L này lớn, thì độ dài bước λ nhỏ và x^{k+1} rất gần x^k, tức là sau mỗi bước lặp, x^{k+1} không cải tiến được nhiều so với x^k. Như vậy, trong trường hợp này và cả trường hợp khi ánh xạ giá F không liên tục Lipschitz hay hệ số Lipschitz không biết, khó ước lượng, thuật toán của tác giả G.M. Korpelevich sẽ kém hiệu quả khi áp dụng trực tiếp. Để khắc phục hạn chế này, các tác giả M.V. Solodov và B.F. Svaiter trong [48] đã đề xuất thuật toán sau:

Thuật toán Solodov-Svaiter. Chọn $x^0 \in C$ và hai tham số $\gamma \in (0,1)$ và $\sigma \in (0,1)$. Có x^k, tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$, thì dừng thuật toán. Trái lại, tính

$$z^k = x^k - \eta_k r(x^k),$$

trong đó $\eta_k = \gamma^{m_k}$, với m_k là số nguyên không âm nhỏ nhất m thỏa mãn

$$\langle F(x^k - \gamma^m r(x^k)), r(x^k)\rangle \geq \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C\cap H_k}(x^k),$$

trong đó

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle F(z^k), x - z^k\rangle \leq 0\}.$$

Các tác giả đã chỉ ra trong [48] rằng dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C,F) nếu ánh xạ giá F là giả đơn điệu trên C và tập nghiệm $S_{VIP} \neq \emptyset$. Bước 1 của thuật toán này tính $r(x^k)$ về cơ bản cũng giống như bước 1 của thuật toán đạo hàm tăng cường là tính y^k. Điểm khác nhau chính của hai thuật toán là trong thuật toán đạo hàm tăng cường, độ dài bước λ phụ thuộc vào hệ số Lipschitz L của F, còn thuật toán trong [48] độ dài bước η_k tìm được bằng cách thực hiện một quy tắc tìm kiếm theo tia. Như vậy, ưu điểm của thuật toán này là không cần đến giả thiết về tính Lipschitz của ánh xạ giá F, nhưng vẫn có nhược điểm là cần đến tính giả đơn điệu của F trên C. Chính vì vậy, các tác giả M.L. Ye và Y.R. He đã đề xuất trong [58] một thuật toán chiếu thu hẹp kết hợp với quy tắc tìm kiếm theo tia như sau:

Thuật toán YH (xem trong [58])

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và các tham số $\sigma, \gamma \in (0,1)$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, \ldots$). Có x^k ta thực hiện các bước sau.

Bước 1. Tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$ thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tính $z^k = x^k - \eta_k r(x^k)$, trong đó $\eta_k = \gamma^{m_k}$, với m_k là số nguyên không âm nhỏ nhất thỏa mãn:

$$\langle F(x^k) - F(x^k - \gamma^m r(x^k)), r(x^k)\rangle \leq \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Bước 3. Tính $x^{k+1} = P_{C\cap \widehat{H}_k}(x^k)$,

trong đó $\widehat{H}_k := \cap_{j=0}^{j=k} H_j$ với $H_j := \{v : \langle F(z^j), v - z^j\rangle \leq 0\}$, và quay lại *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Các tác giả M.L. Ye và Y.R. He đã chỉ ra rằng nếu F là liên tục và $S_{MVIP} \neq \emptyset$ thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trên hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C,F). Một ưu điểm của phương pháp này là ta áp dụng được để tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu. Đây cũng là cơ sở để mở rộng nghiên cứu phương pháp này cho bài toán bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert [13, 49]. Tuy nhiên, tại mỗi bước lặp thứ $k+1$ để tìm x^{k+1}, ta cần phải giải bài toán tối ưu mà tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc thứ k với nửa không gian H_k. Điều này dẫn tới chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Vậy liệu có một thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu mà không dùng phương pháp chiếu thu hẹp này hay không? Để trả lời cho câu hỏi này, chúng tôi đề xuất sửa đổi Thuật toán Solodov-Svaiter sang một thuật toán mới giải VIP(C,F) và đáp ứng được hai điều kiện trên. Đặc biệt, chúng tôi xét cả hai trường hợp khi F không là Lipschitz, độ dài bước tìm được bằng cách thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia, và trường hợp F là Lipschitz với hệ số L, độ dài bước được chỉ rõ và phụ thuộc vào L.

3.1.2 Một số thuật toán chiếu kiểu thích nghi giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu

Cho một điểm cố định $x \in \mathbb{R}^n$ và một số dương μ. Ánh xạ phần dư tự nhiên $r(x,\mu)$ của bài toán VIP(C,F) được định nghĩa như sau:

$$r(x,\mu) := x - P_C(x - \mu F(x)). \tag{3.1}$$

Khi $\mu = 1$, ta ký hiệu $r(x) = r(x,1)$.

Bổ đề 3.1.1. ([57]). *Giả sử $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập con lồi đóng, khác rỗng và $r(x,\mu)$ được định nghĩa như trong* (3.1)*. Khi đó, x là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $VIP(C,F)$ khi và chỉ khi $\|r(x,\mu)\| = 0$ với $\mu > 0$ bất kỳ.*

Bổ đề 3.1.2. ([11]). *Giả sử $r(x,\mu)$ được định nghĩa như trong* (3.1)*. Khi đó, với $x \in \mathbb{R}^n$ cố định, ta có các tính chất sau:*
(a) hàm $\mu \mapsto \|r(x,\mu)\|$ là không giảm với mọi $\mu > 0$ bất kỳ;
(b) hàm $\mu \mapsto \frac{\|r(x,\mu)\|}{\mu}$ là không tăng với mọi $\mu > 0$ bất kỳ.

Chứng minh. Giả sử α và β là hai số thỏa mãn $\alpha \geq \beta > 0$. Chúng ta cần chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\|x - P_C(x - \beta F(x))\| \leq \|x - P_C(x - \alpha F(x))\|$$
$$\frac{\|x - P_C(x - \alpha F(x))\|}{\alpha} \leq \frac{\|x - P_C(x - \beta F(x))\|}{\beta}.$$

Thật vậy, đặt $x_\alpha = P_C(x - \alpha F(x))$ và $x_\beta = P_C(x - \beta F(x))$. Do tính chất của phép chiếu nên ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x))\|^2 \\
&\leq \langle P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x)), x - \alpha F(x) - (x - \beta F(x))\rangle \\
&= (\beta - \alpha)\langle P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x)), F(x)\rangle
\end{aligned}$$

Do $\alpha \geq \beta$ nên từ đây ta suy ra

$$\langle P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x)), F(x)\rangle \leq 0. \tag{3.2}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
&\langle x - P_C(x - \beta F(x)), P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x))\rangle \\
&= \langle x - \beta F(x) - P_C(x - \beta F(x)), P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x))\rangle \\
&\quad + \beta\langle F(x), P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x))\rangle \\
&\leq \beta\langle F(x), P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x - \beta F(x))\rangle
\end{aligned}$$

$$\leq 0,$$

trong đó bất đẳng thức thứ nhất là do tính chất hình chiếu và bất đẳng thức thứ hai suy từ (3.2). Như vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&\langle x - P_C(x-\beta F(x)), P_C(x-\alpha F(x)) - P_C(x-\beta F(x))\rangle \\
&= \langle x - x_\beta, (x-x_\beta) - (x-x_\alpha)\rangle \\
&= \|x-x_\beta\|^2 - \langle x-x_\beta, x-x_\alpha\rangle \leq 0.
\end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\|x-x_\beta\|^2 \leq \langle x-x_\beta, x-x_\alpha\rangle \leq \|x-x_\beta\|\|x-x_\alpha\|.$$

Vì vậy, ta có bất đẳng thức cần chứng minh đầu tiên là

$$\|x-x_\beta\| \leq \|x-x_\alpha\|.$$

Bây giờ ta tiếp tục chứng minh bất đẳng thức còn lại. Theo tính chất hình chiếu ta có

$$\left\langle \frac{x-x_\alpha-\alpha F(x)}{\alpha}, x_\alpha - x_\beta \right\rangle \geq 0$$

$$\left\langle \frac{x_\beta - x + \beta F(x)}{\beta}, x_\alpha - x_\beta \right\rangle \geq 0.$$

Cộng hai bất đẳng thức này với nhau, ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle \frac{x-x_\alpha}{\alpha} - \frac{x-x_\beta}{\beta}, x_\alpha - x_\beta \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{x-x_\alpha}{\alpha} - \frac{x-x_\beta}{\beta}, (x-x_\beta)-(x-x_\alpha) \right\rangle \\
&= \frac{\langle x-x_\alpha, x-x_\beta\rangle}{\alpha} - \frac{\|x-x_\beta\|^2}{\beta} - \frac{\|x-x_\alpha\|^2}{\alpha} + \frac{\langle x-x_\alpha, x-x_\beta\rangle}{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\left(-\|x-x_\alpha\| + \frac{\alpha}{\beta}\|x-x_\beta\|\right).(\|x-x_\alpha\| - \|x-x_\beta\|),
\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai suy từ $\langle x-x_\alpha, x-x_\beta\rangle \leq \|x-x_\alpha\|.\|x-x_\beta\|$. Kết hợp với bất đẳng thức vừa chứng minh được là $\|x-x_\beta\| \leq \|x-x_\alpha\|$, ta suy ra

$$-\|x-x_\alpha\| + \frac{\alpha}{\beta}\|x-x_\beta\| \geq 0,$$

hay là

$$\frac{\|x - x_\alpha\|}{\alpha} \le \frac{\|x - x_\beta\|}{\beta}.$$

$\square$

Từ Bổ đề 3.1.2, ta nhận thấy với $\mu > 0$ cố định bất kỳ ta có

$$\min\{1,\mu\}\|r(x)\| \le \|r(x,\mu)\| \le \max\{1,\mu\}\|r(x)\|. \tag{3.3}$$

Bây giờ, giả sử rằng $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập con lồi, đóng và khác rỗng. Ánh xạ $F : C \to \mathbb{R}^n$. Chúng tôi đề xuất một cách giải bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C,F) mà không sử dụng phương pháp chiếu thu hẹp bằng thuật toán sau.

Thuật toán 3.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và hai tham số $\eta \in (0,1)$ và $\sigma \in (0,1)$, $k = 0$.

Bước lặp $k(k = 0,1,2,...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau.

Bước 1. Tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\langle F(x^k - \eta^m r(x^k)), r(x^k)\rangle \ge \sigma \|r(x^k)\|^2. \tag{3.4}$$

Đặt

$$z^k = x^k - \eta_k r(x^k),$$

với $\eta_k = \eta^{m_k}$.

Bước 3. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.5}$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\},$$

$$H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z^j), x - z^j\rangle \le 0\},$$

và quay về *Bước lặp* k với k được thay bởi $k+1$.

Nhận xét 3.1.3. *Điểm khác nhau chủ yếu giữa Thuật toán 3.1 và Thuật toán Solodov-Svaiter nằm trong Bước 3. Với Thuật toán 3.1, x^k được chiếu trên $C \cap H_{t_k}$ trong đó H_{t_k} được chọn từ tập $\{H_1, H_2, ..., H_k\}$ sao cho $d(x^k, H_{t_k}) = \max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\}$. Trong khi đó, với thuật toán Solodov-Svaiter, x^k được chiếu trên $C \cap H_k$. Định lý dưới đây chỉ ra rằng Thuật toán 3.1 không chỉ áp dụng được cho lớp bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu mà còn được sử dụng cả trong trường hợp không đơn điệu.*

Định lý 3.1.4. *Giả sử rằng ánh xạ F là liên tục và tập nghiệm của bài toán Minty S_{MVIP} là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán VIP(C, F).*

Chứng minh. Đầu tiên, ta chỉ ra rằng quy tắc tìm kiếm theo tia (3.4) là xác định tốt, tức là với mọi k ($k = 0, 1, 2, ...$) đều tồn tại một số nguyên dương m_0 sao cho

$$\langle F(x^k - \eta^{m_0} r(x^k)), r(x^k) \rangle \geq \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng với mọi số nguyên dương m, ta có

$$\langle F(x^k - \eta^m r(x^k)), r(x^k) \rangle < \sigma \|r(x^k)\|^2. \tag{3.6}$$

Vì $\eta \in (0, 1)$ nên ta có $x^k - \eta^m r(x^k) \to x^k$ khi $m \to \infty$. Cho $m \to \infty$ trong (3.6) và sử dụng tính liên tục của ánh xạ F, ta nhận được

$$\langle F(x^k), r(x^k) \rangle \leq \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Mặt khác, vì $\sigma \in (0, 1)$ và $r(x^k) \neq 0$ nên

$$\langle F(x^k), r(x^k) \rangle < \|r(x^k)\|^2.$$

Điều này nghĩa là

$$\langle x^k - F(x^k) - P_C(x^k - F(x^k)), x^k - P_C(x^k - F(x^k)) \rangle > 0.$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với tính chất (ii) của Mệnh đề 1.1.20. Do đó, quy tắc tìm kiếm theo tia là xác định tốt.

Chúng tôi chia phần chứng minh còn lại của định lý thành ba bước như sau.

Bước 1. Với bất kỳ $p \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$ cố định, tồn tại $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$ và

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = 0.$$

Thật vậy, vì $S_{MVIP} \neq \emptyset$ nên lấy $u \in S_{MVIP}$ và ta có

$$\langle F(y), u - y\rangle \leq 0, \ \forall y \in C.$$

Thay $y = z^k \in C$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$\langle F(z^k), u - z^k\rangle \leq 0, \ \forall k.$$

Điều này nghĩa là $u \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$.
Từ đó, ta có

$$S_{MVIP} \subset (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C.$$

Rõ ràng rằng $p \in H_{t_k} \cap C$, tức là $p \in C_k$. Vì vậy, $P_{C_k}(p) = p$. Sử dụng (3.5) và tính chất không giãn của phép chiếu, ta nhận được

$$\|x^{k+1} - p\| = \|P_{C_k}(x^k) - P_{C_k}(p)\| \leq \|x^k - p\|.$$

Do đó $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$ tồn tại. Vì vậy, dãy $\{x^k\}$ là dãy bị chặn. Kết hợp với tính liên tục của ánh xạ giá F, ta suy ra rằng hai dãy $\{P_C(x^k - F(x^k))\}, \{z^k\}$ cũng bị chặn.
Vì $x^{k+1} = P_{C_k}(x^k)$ và $p \in C_k$, nên ta có

$$d^2(x^k, C_k) = \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - p\|^2 - \|x^{k+1} - p\|^2. \tag{3.7}$$

Mặt khác, sử dụng định nghĩa của t_k và C_k, ta có

$$0 \leq d^2(x^k, H_k) \leq d^2(x^k, H_{t_k}) \leq d^2(x^k, C_k). \tag{3.8}$$

Từ (3.7), (3.8) và $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$ tồn tại, ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = 0. \tag{3.9}$$

Bước 2. Dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới một điểm $x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$.
Thật vậy, giả sử rằng x^* là một điểm tụ của $\{x^k\}$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{x^{k_l}\}$ của

dãy $\{x^k\}$ sao cho $\lim_{l\to\infty} x^{k_l} = x^*$.

Từ định nghĩa của t_k, ta có

$$0 \le d(x^k, H_i) \le d(x^k, H_{t_k}), \quad \text{với mỗi } \ i = 0, 1, ..., k.$$

Kết hợp với $\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = 0$, ta có $\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_i) = 0$ với bất kỳ $i \ge 0$ cố định. Vì vậy,

$$\lim_{l\to\infty} d(x^{k_l}, H_i) = 0.$$

Đặt $y^{k_l} := P_{H_i}(x^{k_l})$. Khi đó, ta có

$$\lim_{l\to\infty} \|x^{k_l} - y^{k_l}\| = 0.$$

Kết hợp với $\lim_{l\to\infty} x^{k_l} = x^*$ ta suy ra rằng $\lim_{l\to\infty} y^{k_l} = x^*$.

Vì $\{y^{k_l}\} \subset H_i$ và H_i là đóng nên ta suy ra $x^* \in H_i \cap C$. Vì vậy,

$$x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C.$$

Từ *Bước 1* trong chứng minh này, ta có $\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|$ tồn tại. Vì vậy,

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\| = \lim_{l\to\infty} \|x^{k_l} - x^*\| = 0.$$

Do đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới $x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$.

Bước 3. x^* trong *Bước 2* của chứng minh này là một nghiệm của bài toán VIP(C, F). Thật vậy, theo (3.9), ta có

$$0 = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle F(z^k), x^k - z^k \rangle}{\|F(z^k)\|}. \tag{3.10}$$

Bởi vì $\{z^k\}$ là dãy bị chặn và ánh xạ F là liên tục nên tồn tại một số $M > 0$ sao cho $\|F(z^k)\| \le M$ với $\forall k$. Kết hợp điều này với (3.4), ta có

$$\frac{\langle F(z^k), x^k - z^k \rangle}{\|F(z^k)\|} = \frac{\eta_k \langle F(z^k), r(x^k) \rangle}{\|F(z^k)\|} \ge \frac{\eta_k \sigma \|r(x^k)\|^2}{\|F(z^k)\|} \ge \frac{\eta_k \sigma \|r(x^k)\|^2}{M} \ge 0. \tag{3.11}$$

Từ (3.10) và (3.11), ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k \|r(x^k)\|^2 = 0. \tag{3.12}$$

Bây giờ ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\limsup_{k\to\infty} \eta_k > 0$.

Khi đó tồn tại $\bar{\eta} > 0$ và một dãy con $\{\eta_{k_i}\} \subset \{\eta_k\}$ sao cho $\eta_{k_i} > \bar{\eta}$, $\forall i$. Từ (3.12), ta có

$$\lim_{i\to\infty} \|r(x^{k_i})\| = 0,$$

hay là

$$\lim_{i\to\infty} \|x^{k_i} - P_C(x^{k_i} - F(x^{k_i}))\| = 0. \tag{3.13}$$

Vì $\lim_{i\to\infty} x^{k_i} = x^*$ và P_C và F là liên tục nên cho $i \to \infty$ trong (3.13) ta nhận được

$$\|x^* - P_C(x^* - F(x^*))\| = 0.$$

Vì vậy, $x^* \in S_{VIP}$.

Trường hợp 2. $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$.

Áp dụng tính chất (ii) Mệnh đề 1.1.20, ta có

$$\begin{aligned} -\langle F(x^k), r(x^k)\rangle + \|r(x^k)\|^2 &= \langle -F(x^k) + r(x^k), r(x^k)\rangle \\ &= \langle x^k - F(x^k) - P_C(x^k - F(x^k)), x^k - P_C(x^k - F(x^k))\rangle \le 0. \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\langle F(x^k), r(x^k)\rangle \ge \|r(x^k)\|^2. \tag{3.14}$$

Mặt khác, theo quy tắc tìm kiếm theo tia (3.4), với $m_k - 1$, ta có

$$\langle F(x^k - \eta^{m_k-1} r(x^k)), r(x^k)\rangle < \sigma \|r(x^k)\|^2. \tag{3.15}$$

Chú ý rằng $x^k \to x^*, \eta^{m_k-1} \to 0, r(x^k) \to r(x^*)$ khi $k \to \infty$. Do đó, cho $k \to \infty$ trong (3.14) và (3.15), ta nhận được

$$\|r(x^*)\|^2 \le \langle F(x^*), r(x^*)\rangle \le \sigma \|r(x^*)\|^2.$$

Vì vậy, $\langle F(x^*), r(x^*)\rangle = 0$ và $r(x^*) = 0$. Từ đó, ta suy ra x^* là một nghiệm của bài toán VIP(C,F). $\square$

Với mỗi $\mu > 0$, bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C,F) tương đương với bài toán sau

$$\langle \mu F(x), y-x\rangle \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Bằng cách đặt $r(x,\mu) = x - P_C(x - \mu F(x))$, chúng tôi đề xuất thuật toán sau.

Thuật toán 3.2

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và bốn tham số $\eta_{-1} > 0$, $\gamma, \sigma \in (0,1), \theta > 1$.

Bước lặp k ($k = 0,2,\ldots$). Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $r(x^k,\mu_k) = x^k - P_C(x^k - \mu_k F(x^k))$, trong đó $\mu_k := \min\{\theta\eta_{k-1}, 1\}$. Nếu $r(x^k,\mu_k) = 0$ thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\langle F(x^k - \gamma^m \mu_k r(x^k,\mu_k)), r(x^k,\mu_k)\rangle \geq \frac{\sigma}{\mu_k}\|r(x^k,\mu_k)\|^2. \qquad (3.16)$$

Đặt $\eta_k := \gamma^{m_k}.\mu_k$ và $z^k = x^k - \eta_k r(x^k,\mu_k)$.

Bước 3. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \qquad (3.17)$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k};$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\};$$

$$H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z^j), x - z^j\} \leq 0\},$$

và quay lại *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Định lý sau cho ta sự hội tụ của Thuật toán 3.2.

Định lý 3.1.5. *Giả sử ánh xạ giá F là liên tục và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân Minty S_{MVIP} là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.2 hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C,F).*

Chứng minh. Đầu tiên, ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\langle F(x^k), r(x^k, \mu_k)\rangle \geq \frac{1}{\mu_k}\|r(x^k, \mu_k)\|^2.$$

Thật vậy, sử dụng tính chất (ii) Mệnh đề 1.1.20, ta có

$$\begin{aligned}
&\|r(x^k, \mu_k)\|^2 - \mu_k\langle F(x^k), r(x^k, \mu_k)\rangle \\
&= \langle r(x^k, \mu_k) - \mu_k F(x^k), r(x^k, \mu_k)\rangle \\
&= \langle x^k - \mu_k F(x^k) - P_C(x^k - \mu_k F(x^k)), x^k - P_C(x^k - \mu_k F(x^k))\rangle \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức này và cách chứng minh tương tự như chứng minh của Định lý 3.1.4, ta có thể suy ra quy tắc tìm kiếm theo tia (3.16) là xác định tốt.

Hơn thế nữa, ta có

$$\frac{\langle F(z^k), x^k - z^k\rangle}{\|F(z^k)\|} = \frac{\eta_k\langle F(z^k), r(x^k, \mu_k)\rangle}{\|F(z^k)\|} \geq \frac{\eta_k\sigma\|r(x^k, \mu_k)\|^2}{\mu_k\|F(z^k)\|} \geq \frac{{\eta_k}^2\sigma\|r(x^k)\|^2}{M},$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy từ (3.3) và tính chất $\eta_k = \gamma^{m_k}\mu_k \leq \mu_k$, $\mu_k \leq 1$. Thay vì sử dụng (3.11), ta áp dụng bất đẳng thức trên và cách chứng minh tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.1.4, ta nhận được kết luận của định lý này. □

Một ưu điểm của Thuật toán 3.1 và Thuật toán 3.2 là có thể áp dụng được cho bài toán bất đẳng thức biến phân mà ánh xạ giá F là không đơn điệu và không thỏa mãn điều kiện Lipschitz. Tuy nhiên, trong *Bước 2* của các thuật toán này, chúng ta phải thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia để xác định độ dài bước. Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều n lớn và F có cấu trúc phức tạp. Vì vậy, chúng tôi đề xuất một thuật toán mà quy tắc tìm kiếm theo tia này có thể loại bỏ được nếu ánh xạ giá F thỏa mãn điều kiện Lipschitz như sau.

Thuật toán 3.3

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và các tham số $\sigma \in (0,1), 0 < \lambda \leq \frac{1-\sigma}{L}$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, \ldots$). Có x^k ta thực hiện các bước sau.

Bước 1. Tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$ thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tính

$$z^k = x^k - \lambda r(x^k),$$
$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.18}$$

trong đó,

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$
$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\},$$
$$H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z^j), x - z^j \rangle \le 0\},$$

và quay lại *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Bây giờ, chúng ta đi đến định lý sau đây về sự hội tụ của Thuật toán 3.3.

Định lý 3.1.6. *Giả sử F là liên tục Lipschitz với hệ số L trên C và tập nghiệm S_{MVIP} của bài toán MVIP(C,F) là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.3 hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C,F).*

Chứng minh. Ta có

$$\langle F(x^k), r(x^k) \rangle \ge \|r(x^k)\|^2. \tag{3.19}$$

Vì F là liên tục Lipschitz với hệ số L và $0 < \lambda < \frac{1-\sigma}{L}$ nên ta có

$$\begin{aligned}\langle F(x^k) - F(z^k), r(x^k) \rangle &\le \|F(x^k) - F(z^k)\| \|r(x^k)\| \\ &\le L\|x^k - z^k\| \|r(x^k)\| \\ &= L\lambda \|r(x^k)\|^2 \\ &\le (1-\sigma)\|r(x^k)\|^2,\end{aligned}$$

hay là

$$\langle F(z^k) - F(x^k), r(x^k) \rangle \ge (\sigma - 1)\|r(x^k)\|^2. \tag{3.20}$$

Cộng (3.19) và (3.20), ta nhận được

$$\langle F(z^k), r(x^k) \rangle \ge \sigma \|r(x^k)\|^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên và tính liên tục của ánh xạ giá F, ta thu được

$$\frac{\langle F(z^k), x^k - z^k\rangle}{\|F(z^k)\|} = \frac{\lambda\langle F(z^k), r(x^k)\rangle}{\|F(z^k)\|} \geq \frac{\lambda\sigma\|r(x^k)\|^2}{M}.$$

Ta thực hiện phần còn lại của chứng minh tương tự như cách chứng minh của Định lý 3.1.4 và thu được kết luận của định lý này. □

Nhận xét 3.1.7. *Khi áp dụng Thuật toán 3.3 để giải các bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu và thỏa mãn điều kiện Lipschitz, chúng ta không cần thực hiện quá trình tìm kiếm theo tia như trong các thuật toán được đề xuất trong [13, 49, 58] và trong Thuật toán 3.1 và 3.2. Trong phần ví dụ minh họa, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng thuật toán này hữu hiệu hơn các thuật toán còn lại, đặc biệt khi chi phí tính toán F lớn và hằng số Lipschitz L của F là nhỏ.*

3.1.3 Các ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi xét một số ví dụ minh họa cho sự hội tụ của các Thuật toán 3.1, 3.2 và 3.3 và so sánh chúng với các thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C,F), trong đó F là không đơn điệu và C là đa diện, của nhóm các tác giả M. L. Ye và Y. R. He (ký hiệu là Thuật toán YH) trong [58] và nhóm các tác giả B. V. Dinh, D. S. Kim (ký hiệu là thuật toán VD) trong [13] (cũng như của nhóm tác giả J. J. Strodiot và các cộng sự trong [49]). Thuật toán YH đã được chúng tôi nhắc lại ở mục trước. Sau đây, chúng tôi xin nhắc lại thuật toán VD.

Thuật toán VD. (xem trong [13, 49])

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$ và hai tham số $\eta \in (0,1)$ và $c > 0$.

Bước lặp $k (k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $r(x^k) = x^k - P_C(x^k - F(x^k))$. Nếu $r(x^k) = 0$ thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\langle F(x^k - \eta^m r(x^k)), r(x^k)\rangle \geq c\|r(x^k)\|^2. \tag{3.21}$$

Bước 3. Đặt $\eta_k := \eta^{m_k}, z^k := x^k - \eta_k r(x^k)$. Xác định

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(z^k), x - z^k \rangle \leq 0\}$$

$$C_k = \cap_{i=0}^k (C \cap H_i).$$

Bước 4. Tính $x^{k+1} = P_{C_k}(x^k)$ và quay lại *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Đầu tiên, chúng tôi mô tả cách tính x^{k+1} trong mỗi thuật toán. Vì C là đa diện nên $C_k = C \cap H_{t_k}$ vẫn là đa diện, nên ta có thể tính x^{k+1} trong Thuật toán 3.1, 3.2 và 3.3 như sau. Giả sử rằng $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là ma trận thực cỡ $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^m$ là một vec tơ.

Tại Bước lặp k, ta có

$$H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : F(z^j)^T x \leq F(z^j)^T z^j\}, j = 0, 1, ..., k.$$

Để tính t_k, ta phải tính

$$d(x^k, H_j) = \min\{\|x^k - y\| : y \in H_j\} = \begin{cases} \frac{|F(z^j)^T(x^k - z^j)|}{\|F(z^j)\|} & \text{nếu } F(z^j)^T(x^k - z^j) > 0 \\ 0 & \text{nếu } F(z^j)^T(x^k - z^j) \leq 0. \end{cases}$$

Vì $t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\}$ nên ta có $H_{t_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : F(z^{t_k})^T x \leq F(z^{t_k})^T z^{t_k}\}$. Bằng cách đặt

$$A_k = \begin{bmatrix} A \\ F(z^{t_k})^T \end{bmatrix}, b_k = \begin{bmatrix} b \\ F(z^{t_k})^T z^{t_k} \end{bmatrix},$$

ta nhận được $C_k = C \cap H_{t_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : A_k x \leq b_k\}$.

Do đó, tại Bước lặp k, để tính x^{k+1} trong Thuật toán 3.1, 3.2 và 3.3, ta phải giải bài toán tối ưu sau bằng công cụ Matlab:

$$\arg\min\left\{\frac{1}{2} y^T y - {x^k}^T y : y \in C_k\right\}.$$

Tương tự, để tính x^{k+1} trong Thuật toán YH và Thuật toán VD, ta thực hiện như sau. Đặt $\bar{A}_{-1} := A, \bar{b}_{-1} := b, C_0 := C = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{A}_{-1} x \leq b_{-1}\}$. Tại Bước lặp k, có

$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{A}_{k-1}x \leq \bar{b}_{k-1}\}$, đặt

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} \bar{A}_{k-1} \\ F(z^k)^T \end{bmatrix}, \bar{b}_k = \begin{bmatrix} \bar{b}_{k-1} \\ F(z^k)^T z^k \end{bmatrix}.$$

Vì vậy $\bar{C}_k = C \cap (\cap_{j=0}^k H_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{A}_k x \leq \bar{b}_k\}$. Khi đó, ta giải bài toán tối ưu sau bằng công cụ Matlab

$$\arg\min\{\frac{1}{2}y^T y - {x^k}^T y : y \in \bar{C}_k\}$$

để nhận được x^{k+1}. Chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng A_k là ma trận cỡ $(m+1)\times n$, không phụ thuộc vào k. Trong khi đó, cỡ của ma trận $\bar{A}_k$ là $(m+k)\times n$, phụ thuộc vào số bước lặp k.

Chúng tôi tiến hành tính toán cho tất cả các thuật toán bằng ngôn ngữ lập trình Matlab R2015 và thực hiện trên Laptop ASUS AMD Ryzen với cấu hình R3-3200U, 2.60 Ghz, Ram 4.00 GB.

Ví dụ 3.1.8. Chúng ta xét bài toán sau (tham khảo Exercise 4.7 trong [8]).

$$\min\{g(x) = \frac{f_0(x)}{cx+d} : x \in C\}, \qquad (OP)$$

trong đó $C = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m, Ax = b\}$, $f_0, f_1, ..., f_m$ là các hàm lồi xác định trên $\mathbb{R}^n$, A là ma trận cỡ $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ta có thể thấy rằng (OP) là bài toán tối ưu tựa lồi. Trong ví dụ này, ta chọn

$$C = \{x = (x_1, x_2, ..., x_5)^T \in \mathbb{R}^5 : x_i \geq 0, i = 1, ..., 5, \sum_{i=1}^5 x_i = a, (a > 0)\}$$

$g(x) = \frac{\frac{1}{2}x^T Hx + q^T x + r}{\sum_{i=1}^5 x_i}$, trong đó $H = hI$ với I là ma trận đơn vị cỡ 5×5 và $h \in (0.1, 1.6)$, $q = (-1, ..., -1)^T, r = 1$. Nhận thấy rằng g là hàm tựa lồi và trơn và đạt giá trị nhỏ nhất trên C.

Ký hiệu $F(x) = (F_1(x), ..., F_5(x))^T$, trong đó $F_i(x) = \frac{hx_i \sum_{j=1}^5 x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^5 x_j^2 - 1}{(\sum_{j=1}^5 x_j)^2}$ $(i = 1, ..., 5)$ là đạo hàm riêng theo biến thứ i của hàm $g(x)$. Khi đó, F là tựa đơn điệu trên C và bài toán (OP) dẫn đến bài toán VIP(C, F).

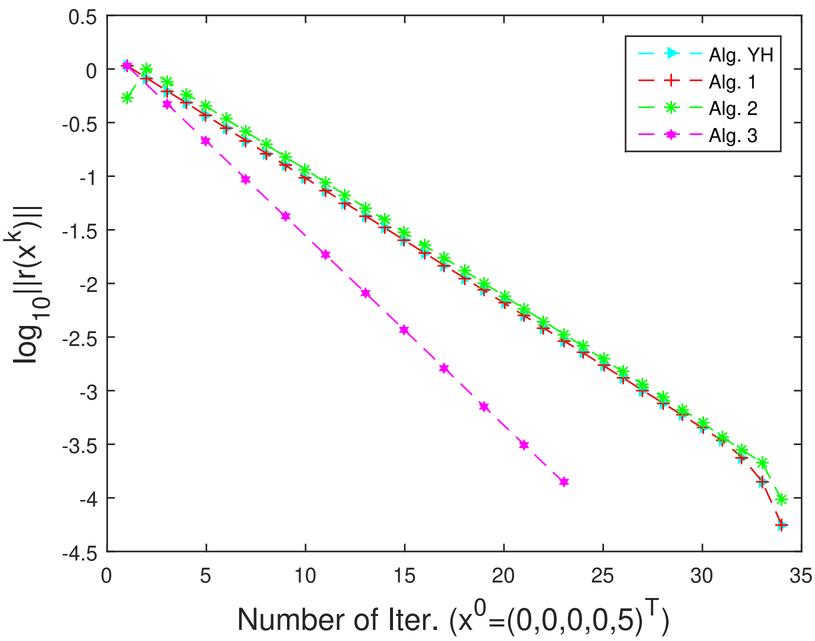
Ta kiểm tra được rằng $S_{MVIP} = \{(\frac{1}{5}a, ..., \frac{1}{5}a)^T\}$ (xem [58]). Bằng tính toán trực tiếp, ta nhận được $L = \sqrt{5\frac{a^4h^2+2a^2h(a^2+2)+5(a^2+2)^2}{a^6}}$. Lấy $h = 1.2$. Ta tiến hành tính toán Thuật toán YH với tham số $\sigma = 0.4$, Thuật toán 3.1 với tham số $\sigma = 0.4$, Thuật toán 3.2 với tham số $\sigma = 0.4, \theta = a, \eta_{-1} = 0.1$ và Thuật toán 3.3 với tham số $\sigma = 0.01, \lambda = \frac{1-\sigma}{L}$. Các tham số còn lại và điểm xuất phát được đưa ra như trong Bảng 3.1. Một số điểm xuất phát được chọn là $p = (0,0,0,0,5)^T, q = (5,0,0,0,5)^T, r = (1,2,3,3,1)^T$. Để kết thúc các thuật toán, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng $Err = \|r(x^k)\| \leq 10^{-4}$. Các kết quả được trình bày trong Bảng 3.1 và Hình 3.1.

x^0	a	TT. YH			TT. 3.1			TT. 3.2			TT. 3.3		
		γ	CPU(s)	Iter.	η	CPU(s)	Iter.	γ	CPU(s)	Iter.	σ	CPU(s)	Iter.
p	5	0.99	0.98	35	0.99	0.95	35	0.99	1.18	35	0.01	0.72	25
p	-	0.8	2.11	56	0.8	1.77	56	0.8	1.36	46	0.2	1.11	31
p	-	0.6	1.92	81	0.6	2.02	81	0.6	1.64	59	0.4	1.20	39
p	-	0.4	3.39	155	0.4	4.02	155	0.4	1.84	76	0.6	1.69	61
q	10	0.99	1.78	70	0.99	1.72	70	0.99	1.78	70	0.01	2.67	94
r	-	-	1.64	57	-	1.50	57	-	1.45	57	-	2.20	89

Bảng 3.1: Kết quả tính toán cho Ví dụ 3.1.8

Ví dụ 3.1.9. Trong ví dụ này, chúng tôi xét bài toán VIP(C,F), trong đó $C = [-1,1]^n$ và $F(x) = (F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))^T = (x_1^2, ..., x_n^2)^T$. Chúng tôi kiểm tra được rằng ánh xạ này không giả đơn điệu trên C. Thật vậy, với $\bar{x} = (0,0,...,0)^T$ và $\bar{y} = (-1,0,...,0)^T$ thì $\langle F(\bar{x}), \bar{y}-\bar{x}\rangle = 0$ và $\langle F(\bar{y}), \bar{y}-\bar{x}\rangle = -1 < 0$. Mặt khác, $S_{MVIP} = \{(-1,...,-1)^T\}$ (xem [58]). Hơn nữa, F thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên C với $L = 2\sqrt{n}$. Thật vậy, ta có $\|\nabla F_1\|^2 = \|(2x_1,0,...,0)\|^2 = 4x_1^2 \leq 4$, ..., $\|\nabla F_n\|^2 = \|(0,0,...,2x_n)\|^2 = 4x_n^2 \leq 4$. Do đó, $\|F(x) - F(y)\| \leq \sqrt{4n}\|x-y\|, \forall x,y \in C$.

Chúng tôi tiến hành tính toán Thuật toán YH với các tham số $\sigma = 0.4$, $\gamma = 0.99$, Thuật toán 3.1 với tham số $\sigma = 0.4$, $\eta = 0.99$, Thuật toán 3.2 với tham số $\sigma = 0.4$, $\gamma = 0.99$, $\theta = 10$, $\eta_{-1} = 0.8$ và Thuật toán 3.3 với tham số $\sigma = 10^{-4}$, $\lambda = \frac{1-\sigma}{L}$. Điểm xuất phát là $x^0 = (-\frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{2})^T$. Để kết thúc thuật toán, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng là $Err = \|r(x^k)\| \leq 10^{-4}$. Các kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 3.2 và Hình

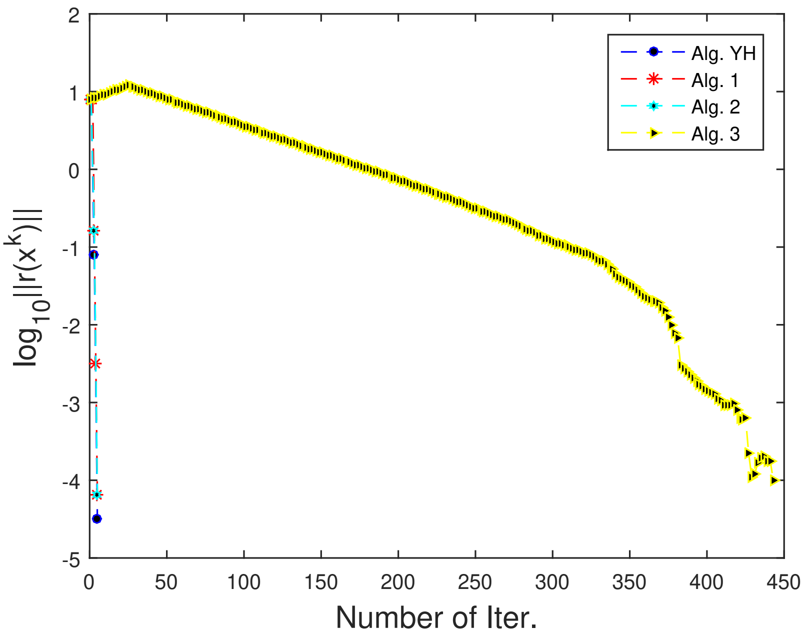


Hình 3.1: Số bước lặp trong Ví dụ 3.1.8

3.2.

n	TT. YH		TT. 3.1		TT. 3.2		TT. 3.3	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
50	0.47	6	0.44	6	0.44	6	6.67	103
100	0.47	6	0.42	6	0.43	6	16.87	103
200	0.94	6	0.78	6	0.82	6	177.84	241
500	1.36	6	1.18	6	1.20	6	349.92	277
1000	2.14	6	2.06	6	1.93	6	1953.46	445

Bảng 3.2: Kết quả tính toán cho Ví dụ 3.1.9



Hình 3.2: Số bước lặp trong Ví dụ 3.1.9 ($n = 1000, x^0 = (-\frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{2})^T$)

Ví dụ 3.1.10. Trong ví dụ này, chúng tôi xét bài toán VIP(C,F) với $C = [0,1]^n$ và $F(x) = Mx + d$, trong đó M là ma trận cấp $n \times n$ như sau

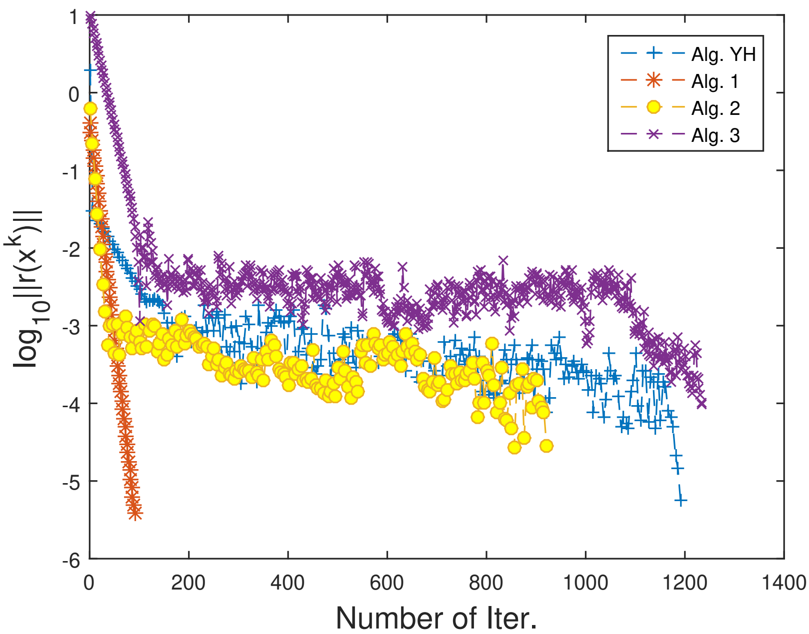
$$M = \begin{bmatrix} 4 & -2 & & & & & \\ 1 & 4 & -2 & & & & \\ & 1 & 4 & -2 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

và $d = (-1, ..., -1)^T$ (xem [2], [50], [58]). Chúng tôi tiến hành tính toán Thuật toán YH với tham số $\sigma = 0.3, \gamma = \frac{2}{\sqrt{n}}$, Thuật toán 3.1.8 với tham số $\sigma = 0.3, \eta = \frac{2}{\sqrt{n}}$, Thuật toán 3.2 với tham số $\sigma = 0.3, \gamma = \min\{\frac{5}{\sqrt{n}}, 0.98\}, \theta = n, \eta_{-1} = 0.5$ và Thuật toán 3.3 với tham số $\sigma = 0.01, \lambda = \frac{1-\sigma}{L}$. Điểm xuất phát $x^0 = (0, 0, ..., 0)^T$. Ánh xạ F thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên C với hệ số $L = \sqrt{21n - 5}$. Để kết thúc thuật toán, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng là $Err = \|r(x^k)\| \leq 10^{-4}$. Các kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 3.3 và Hình 3.3.

Ví dụ 3.1.11. Trong ví dụ cuối cùng của phần này, chúng tôi xét bài toán VIP(C,F)

n	TT. YH		TT. 3.1		TT. 3.2		TT. 3.3	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
5	1.39	56	0.50	15	0.73	22	1.12	49
20	14.18	285	1.09	36	3.39	78	13.31	275
50	84.23	694	5.64	159	14.76	222	66.85	609
80	254.0	711	3.14	75	78.67	578	190.64	394
100	1274.12	1192	3.30	92	685.21	925	1181.35	1236
200	14947.51	3832	28.80	194	2579.57	1330	5485.89	2351

Bảng 3.3: Kết quả tính toán cho Ví dụ 3.1.10



Hình 3.3: Số bước lặp trong Ví dụ 3.1.10 ($n = 100$)

với $C = [-\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}]^n$ và $F(x) = (\cos\frac{x_1}{n}, \cos\frac{x_2}{n}, \ldots, \cos\frac{x_n}{n})^T$.
Với $\bar{x} = (-\frac{n\pi}{3}, \frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}, \ldots, \frac{n\pi}{2})^T$ và $\bar{y} = (-\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3}, \frac{n\pi}{2}, \ldots, \frac{n\pi}{2})^T$ thì $\langle F(\bar{x}), \bar{y} - \bar{x}\rangle = \frac{n\pi}{24} > 0$ và $\langle F(\bar{y}), \bar{y} - \bar{x}\rangle = -\frac{(\sqrt{2}-1)n\pi}{12\sqrt{2}} < 0$. Do đó, F là không tựa đơn điệu trên C. Hơn thế nữa, ta có

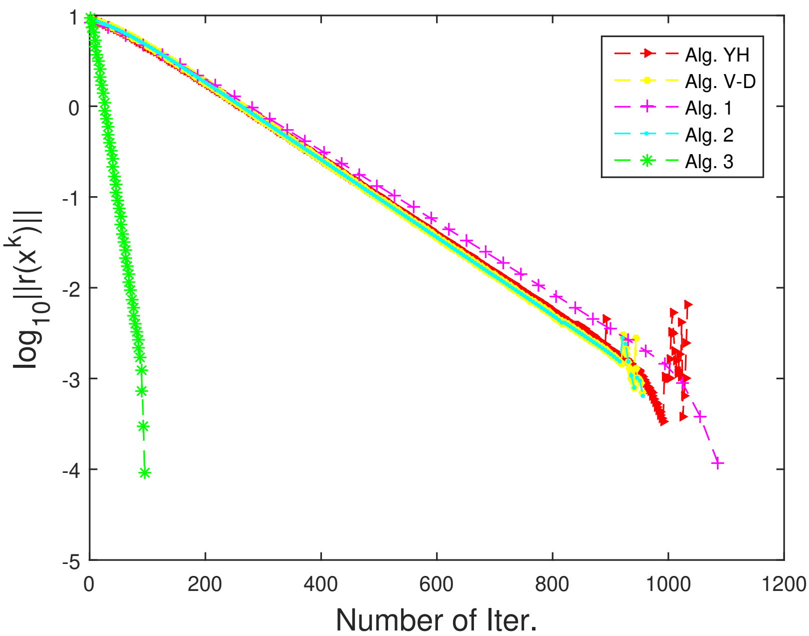
$$\|F(x) - F(y)\| = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n}\Big(\cos\frac{x_i}{n} - \cos\frac{y_i}{n}\Big)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} 4\sin^2\frac{x_i+y_i}{2n}\sin^2\frac{x_i-y_i}{2n}} \\
&\le \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} 4\sin^2\frac{x_i-y_i}{2n}} \\
&\le \sqrt{\Sigma_{i=1}^{n} 4(\frac{x_i-y_i}{2n})^2} \\
&= \frac{1}{n}\|x-y\|, \quad \forall x,y\in C.
\end{aligned}
$$

Vì vậy, F thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên C với hằng số $L=\frac{1}{n}$. Chúng tôi kiểm tra được rằng

$S_{VIP}=\{(x_1,x_2,...,x_n)^T : x_i\in\{-\frac{n\pi}{2};\frac{n\pi}{2}\}\}$ và $S_{MVIP}=\{(-\frac{n\pi}{2},-\frac{n\pi}{2},...,-\frac{n\pi}{2})^T\}$.

Chúng tôi tiến hành tính toán Thuật toán YH với tham số $\sigma=0.3,\gamma=0.98$, Thuật toán VD với tham số $c=0.1,\eta=0.99$, Thuật toán 3.1 với tham số $\sigma=0.3,\eta=0.95$, Thuật toán 3.2 với tham số $\sigma=0.3,\gamma=0.99,\theta=n,\eta_{-1}=0.5$ và Thuật toán 3.3 với tham số $\sigma=0.01,\lambda=\frac{(1-\sigma)}{L}$. Điểm xuất phát là $x^0=(-\frac{n\pi}{8},-\frac{n\pi}{8},-\frac{n\pi}{8},...,-\frac{n\pi}{8})^T$. Để kết thúc thuật toán, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng là $Err=\|r(x^k)\|\le 10^{-4}$. Các kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 3.4 và Hình 3.4.



Hình 3.4: Số bước lặp trong Ví dụ 3.1.11 ($n=100$)

n	TT. YH		TT. VD		TT. 3.1	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
10	3.52	93	2.63	92	2.90	108
20	7.56	200	7.00	196	6.12	222
50	53.59	462	59.97	457	20.51	565
100	741.79	1034	647.51	957	53.90	1093
150	1908.06	1389	1998.81	1365	268.89	1760
200	4961.718	1906	5049.12	1830	389.00	2318

n	TT. 3.2		TT. 3.3	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
10	2.95	92	0.98	29
20	7.53	196	1.43	42
50	53.32	457	4.54	70
100	651.84	957	11.95	96
150	1992.23	1365	45.43	125
200	5034.85	1830	79.65	143

Bảng 3.4: Kết quả tính toán cho Ví dụ 3.1.11

3.2 Bài toán cân bằng

3.2.1 Mở đầu

Giả sử Ω là một tập con lồi mở trong $\mathbb{R}^n$ và chứa một tập lồi đóng khác rỗng C, và $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$. Chúng tôi bắt đầu phần này bằng việc nhắc lại một thuật toán chiếu (ký hiệu là Thuật toán SVN) giải bài toán cân bằng không đơn điệu được đề xuất bởi nhóm tác giả J. Strodiot trong [49] (cũng như của các tác giả B.V. Dinh và D.S. Kim trong [13]).

Thuật toán SVN.

Bước khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$, chọn các tham số $\eta \in (0,1), \rho > 0$.

Bước lặp k $(k = 0,1,2,...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min\left\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho}\|y - x^k\|^2 : y \in C \right\}.$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Sử dụng một trong hai quy tắc tìm kiếm theo tia sau:

Quy tắc tìm kiếm theo tia 1: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{1}{\rho}\|x^k - y^k\|^2. \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 2: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) + f(x^k, y^k) \geq -\frac{1}{\rho}\|x^k - y^k\|^2. \end{cases}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Chọn

$$w^k \in \partial_2 f(z^k, z^k),$$

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - z^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.22}$$

trong đó

$$C_k = \cap_{i=0}^{k} [C \cap H_i],$$

và quay về *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Các tác giả trong [49] đã chỉ ra rằng với giả thiết về tính lồi và tính liên tục của song hàm f, tính khác rỗng của tập nghiệm bài toán Minty S_M, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán SVN hội tụ tới một nghiệm của bài toán cân bằng EP(C, f). Ưu điểm của thuật toán này là giúp tìm nghiệm của bài toán cân bằng mà không cần đến giả thiết về tính liên tục của song hàm f. Tuy nhiên, cũng như trong trường hợp bất đẳng thức biến phân ở mục trước, tại mỗi bước lặp, ta phải giải một bài toán tối ưu trên tập ràng buộc là giao của tập ràng buộc ở bước trước và một siêu phẳng (chính là thực hiện phép chiếu thu hẹp). Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian tăng lên. Thêm vào đó, trong thuật toán SVN, các tác giả sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước. Tuy nhiên, trong trường hợp khi song hàm f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz hay f có cấu trúc phức tạp, thì việc thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia gặp khó khăn cũng như chi phí tính toán lớn. Do đó chúng ta khó có thể áp dụng được thuật toán SVN trong những trường hợp này. Chính vì vậy, chúng tôi đề xuất sửa đổi Thuật toán SVN thành một thuật toán mới giải EP(C, f) mà không cần sử dụng phép chiếu thu hẹp cũng như giả thiết về tính đơn điệu của f trong ba trường hợp: f không thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và hệ số Lipschitz ước lượng được hoặc không ước lượng được.

3.2.2 Một số thuật toán chiếu kiểu thích nghi giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Trong phần này, chúng tôi giả thiết $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện sau:

$(\mathscr{B}_1)$ $f(x,.)$ là lồi và khả dưới vi phân trên C với mọi $x \in C$;

$(\mathscr{B}_2)$ $f(\cdot,\cdot)$ là liên tục trên $\Omega \times \Omega$;

$(\mathscr{B}_3)$ $f(\cdot,\cdot)$ thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C với hệ số $c_1, c_2 > 0$, tức là

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - c_1\|x-y\|^2 - c_2\|y-z\|^2, \ \forall x,y,z \in C.$$

Để chứng minh định lý hội tụ của các thuật toán, chúng tôi cần các bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.1. ([31, Proposition 2.1]). *Giả sử rằng G là một hàm khả vi liên tục và lồi mạnh trên C với hệ số $\tau > 0$. Khi đó, với giả thiết $(\mathscr{B}_1)$ và $(\mathscr{B}_2)$, một điểm $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán $EP(C,f)$ khi và chỉ khi nó là nghiệm của bài toán sau:*

$$\text{Tìm } x^* \in C : f(x^*,y) + G(y) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Bổ đề 3.2.2. ([45, Theorem 24.5]). *Giả sử rằng g là một hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$, và có giá trị hữu hạn trên tập lồi mở Ω. Giả sử $\{g_k\}$ là dãy hàm lồi hữu hạn trên Ω sao cho $\lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$, $\forall x \in \Omega$. Nếu $x \in \Omega$ và dãy $\{x^k\} \subset \Omega$ sao cho $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ thì với bất kỳ số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số k_0 sao cho*

$$\partial g_k(x^k) \subset \partial g(x) + \varepsilon B, \quad \forall k \geq k_0,$$

trong đó B là hình cầu đơn vị đóng trong $\mathbb{R}^n$.

Bổ đề 3.2.3. *Giả sử rằng G là hàm khả vi liên tục và lồi mạnh trên C với hệ số $\tau > 0$ và song hàm cân bằng f thỏa mãn các giả thiết $(\mathscr{B}_1)$ và $(\mathscr{B}_2)$. Nếu $\{x^k\} \subset C$ là dãy bị chặn, $\bar{\rho} > 0$, $\{\rho_k\} \subset (0, \bar{\rho}]$ và $\{y^k\}$ là dãy thỏa mãn*

$$y^k = \arg\min\{f(x^k,y) + \frac{1}{\rho_k}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k \rangle] : y \in C\}$$

thì $\{y^k\}$ là bị chặn.

Chứng minh. Chứng minh của bổ đề này có nhiều điểm giống với chứng minh Bổ đề 2.6 trong [13]. Đầu tiên, ta chỉ ra rằng nếu dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới x^* thì dãy $\{y^k\}$ là bị chặn. Thật vậy, vì

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k,y) + \frac{1}{\rho_k}[G(y) - G(x^k) - \langle\nabla G(x^k), y - x^k\rangle] : y \in C\Big\},$$

nên ta có

$$\begin{aligned} &f(x^k,y^k) + \frac{1}{\rho_k}[G(y^k) - G(x^k) - \langle\nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle] \\ &\leq f(x^k,x^k) + \frac{1}{\rho_k}[G(x^k) - G(x^k) - \langle\nabla G(x^k), x^k - x^k\rangle], \end{aligned}$$

hay là,

$$f(x^k,y^k) + \frac{1}{\rho_k}[G(y^k) - G(x^k) - \langle\nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle] \leq 0. \tag{3.23}$$

Áp dụng tính chất lồi mạnh của G, ta có

$$G(y^k) - G(x^k) - \langle\nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle \geq \tau\|y^k - x^k\|^2. \tag{3.24}$$

Kết hợp (3.23) và (3.24), ta thu được

$$f(x^k,y^k) + \frac{\tau}{\rho_k}\|y^k - x^k\|^2 \leq 0. \tag{3.25}$$

Hơn nữa, với mọi $\xi^k \in \partial_2 f(x^k,x^k)$, ta có

$$f(x^k,y^k) \geq \langle\xi^k, y^k - x^k\rangle \geq -\|\xi^k\|\|y^k - x^k\|. \tag{3.26}$$

Từ (3.25) và (3.26), ta có

$$-\|\xi^k\|\|y^k - x^k\| + \frac{\tau}{\rho_k}\|y^k - x^k\|^2 \leq 0,$$

hay là

$$\|y^k - x^k\| \leq \frac{\rho_k}{\tau}\|\xi^k\| \leq \frac{\bar{\rho}}{\tau}\|\xi^k\|.$$

Bởi vì dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới x^* và $\xi^k \in \partial_2 f(x^k,x^k)$, nên áp dụng Bổ đề 3.2.2 trong đó $f_k(y) := f(x^k,y)$, thì ta có dãy $\{\xi^k\}$ là bị chặn. Kết hợp với tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$, ta suy ra rằng dãy $\{y^k\}$ cũng bị chặn.

Bây giờ, ta đi chứng minh bổ đề này. Giả sử ngược lại, dãy $\{y^k\}$ là không bị chặn, tức là tồn tại một dãy con $\{y^{k_i}\} \subset \{y^k\}$ sao cho $\lim_{i\to\infty} \|y^{k_i}\| = +\infty$. Do $\{x^k\}$ là dãy bị chặn nên theo Định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại một dãy con hội tụ của dãy $\{x^k\}$. Không mất tổng quát, ta giả sử rằng dãy con $\{x^{k_i}\}$ hội tụ tới x^* nào đó. Lập luận tương tự như trên, ta suy ra dãy con $\{y^{k_i}\}$ là bị chặn. Điều này mâu thuẫn với điều giả sử. Vì vậy, dãy $\{y^k\}$ là bị chặn. □

Bây giờ, chúng tôi xét bài toán EP(C, f) trong đó, C là một tập lồi đóng khác rỗng được chứa trong một tập lồi mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng. Giả sử G là hàm khả vi liên tục và lồi mạnh trên C với hệ số $\tau > 0$.

Thuật toán 3.4

Bước khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$, chọn các tham số $\eta, \mu \in (0,1), \rho > 0$ và đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min \left\{ f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k \rangle] : y \in C \right\}.$$

Nếu $f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] \geq 0$, thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, thực hiện Bước 2.

Bước 2. Thực hiện một trong hai quy tắc tìm kiếm theo tia sau:

Quy tắc tìm kiếm theo tia 1: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \end{cases} \tag{3.27}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Quy tắc tìm kiếm theo tia 2: Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) + f(x^k, y^k) \geq -\frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \end{cases} \tag{3.28}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Chọn

$$w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k),$$

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - x^k \rangle + f(z^k, x^k) \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k), \tag{3.29}$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\},$$

và quay về *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Để chứng minh sự hội tụ của Thuật toán 3.4, chúng ta cần sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.4. *Tại mỗi bước lặp k, nếu $y^k \neq x^k$ thì ta có:*

(i) Quy tắc tìm kiếm theo tia 1 và 2 là xác định tốt;

(ii) $f(z^k, x^k) > 0$.

Chứng minh. Chứng minh của bổ đề này có nhiều điểm giống với chứng minh của các tác giả T. D. Quoc, L. D. Muu và N. V. Hien trong [42].

(i) Đầu tiên, chúng tôi chỉ ra rằng quy tắc tìm kiếm theo tia (3.27) là xác định tốt. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng với mọi số nguyên dương m, ta có

$$f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) < \frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \tag{3.30}$$

Vì $\eta \in (0,1)$ nên ta có $z^{k,m} \to x^k$ khi $m \to \infty$. Theo giả thiết $(\mathscr{B}_2)$, ta có $f(z^{k,m}, x^k) \to 0$ và $f(z^{k,m}, y^k) \to f(x^k, y^k)$ khi $m \to \infty$. Vì vậy, cho $m \to \infty$ trong (3.30), ta thu được

$$-f(x^k, y^k) \le \frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle],$$

hay là

$$f(x^k, y^k) + \frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] \ge 0.$$

Bởi vì $\mu \in (0,1), \rho > 0, [G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] \ge \tau \|y^k - x^k\|^2 \ge 0$, nên ta có

$$f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] \ge 0.$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện dừng của Thuật toán 3.4. Vì vậy, quy tắc tìm kiếm theo tia 1 là xác định tốt.

Bây giờ, chúng tôi chỉ ra rằng quy tắc tìm kiếm theo tia (3.28) là xác định tốt. Giả sử ngược lại rằng với mọi số nguyên dương m, ta có

$$f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) + f(x^k, y^k) < -\frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle].$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh với quy tắc tìm kiếm theo tia 1, cho $m \to \infty$ trong bất đẳng thức trên, ta có

$$f(x^k, x^k) - f(x^k, y^k) + f(x^k, y^k) \le -\frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle],$$

hay là $G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle \le 0$. Điều này chỉ xảy ra khi $x^k = y^k$, hay là $f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] = 0$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện dừng của Thuật toán 3.4. Do đó, quy tắc tìm kiếm theo tia 2 là xác định tốt.

(ii) Sử dụng giả thiết $(\mathscr{B}_1)$ và định nghĩa của hàm lồi, ta có

$$\begin{aligned} \eta_k f(z^k, y^k) + (1 - \eta_k) f(z^k, x^k) &\ge f(z^k, \eta_k y^k + (1 - \eta_k) x^k) \\ &= f(z^k, z^k) = 0. \end{aligned}$$

Điều này dẫn tới

$$\eta_k [f(z^k, x^k) - f(z^k, y^k)] \le f(z^k, x^k). \tag{3.31}$$

Trường hợp 1. Ta lựa chọn quy tắc tìm kiếm theo tia 1 trong tính toán. Khi đó, ta có

$$f(z^k,x^k) - f(z^k,y^k) \geq \frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] > 0, \tag{3.32}$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai nhận được từ tính lồi mạnh của φ và $x^k \neq y^k$. Từ (3.31) và (3.32), ta có

$$f(z^k,x^k) \geq \frac{\eta_k \mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] > 0. \tag{3.33}$$

Trường hợp 2. Ta lựa chọn quy tắc tìm kiếm theo tia 2 trong tính toán. Từ quy tắc tìm kiếm theo tia 2 và điều kiện dừng của Thuật toán 3.4 ta có

$$\begin{aligned} f(z^k,x^k) - f(z^k,y^k) &\geq -f(x^k,y^k) - \frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] \\ &> \frac{1-\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \end{aligned}$$

Kết hợp với (3.31), ta có

$$f(z^k,x^k) \geq \eta_k[f(z^k,x^k) - f(z^k,y^k)] > \frac{\eta_k(1-\mu)}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] > 0. \tag{3.34}$$

□

Bây giờ, chúng tôi sẽ chỉ ra sự hội tụ của Thuật toán 3.4 trong định lý sau đây.

Định lý 3.2.5. *Giả sử rằng f thỏa mãn hai điều kiện $(\mathscr{B}_1), (\mathscr{B}_2)$, G là hàm khả vi liên tục và lồi mạnh trên C với hệ số $\tau > 0$, và tập nghiệm S_M là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.4 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán EP(C, f).*

Chứng minh. Chúng tôi chia chứng minh của định lý này thành ba bước như sau.

Bước 1. Chúng tôi chỉ ra $(\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C \neq \emptyset$, tồn tại giới hạn $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$ với mỗi $p \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$ và

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = 0.$$

Thật vậy, vì $S_M \neq \emptyset$, nên lấy $p \in S_M$, ta có

$$f(y,p) \leq 0, \ \forall y \in C.$$

Thay thế $y = z^k \in C$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$f(z^k, p) \le 0, \ \forall k. \tag{3.35}$$

Vì $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$, nên ta có

$$f(z^k, p) \ge f(z^k, x^k) + \langle w^k, p - x^k \rangle. \tag{3.36}$$

Từ (3.35) và (3.36), ta thu được

$$f(z^k, x^k) + \langle w^k, p - x^k \rangle \le 0, \quad \forall k.$$

Điều này có nghĩa là $p \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$. Tức là, ta có

$$S_M \subset (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C.$$

Rõ ràng rằng $p \in H_{t_k} \cap C$, tức là, $p \in C_k$. Vì vậy, $P_{C_k}(p) = p$. Sử dụng (3.29) và tính chất không giãn của phép chiếu, ta thu được

$$\|x^{k+1} - p\| = \|P_{C_k}(x^k) - P_{C_k}(p)\| \le \|x^k - p\|.$$

Do đó, giới hạn $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$ tồn tại. Vì vậy, $\{x^k\}$ là dãy bị chặn. Theo Bổ đề 3.2.3, $\{y^k\}$ cũng bị chặn. Từ đó, ta nhận được tính bị chặn của dãy $\{z^k\}$. Áp dụng Bổ đề 3.2.2, ta cũng thu được tính bị chặn của dãy $\{w^k\}$.

Vì $x^{k+1} = P_{C_k}(x^k)$ và $p \in C_k$ nên ta có

$$d^2(x^k, C_k) = \|x^k - x^{k+1}\|^2 \le \|x^k - p\|^2 - \|x^{k+1} - p\|^2. \tag{3.37}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của t_k và C_k, ta có

$$0 \le d^2(x^k, H_k) \le d^2(x^k, H_{t_k}) \le d^2(x^k, C_k). \tag{3.38}$$

Từ (3.37), (3.38) và việc tồn tại giới hạn $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$, ta có

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = 0. \tag{3.39}$$

Bước 2. Ta chỉ ra rằng dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới một điểm $x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$. Thật vậy, giả sử rằng x^* là một điểm tụ của dãy $\{x^k\}$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{x^{k_l}\}$

của dãy $\{x^k\}$ sao cho $\lim_{l\to\infty} x^{k_l} = x^*$.

Từ định nghĩa của t_k, ta có

$$0 \leq d(x^k, H_i) \leq d(x^k, H_{t_k}), \quad \text{với mỗi } \ i = 0, 1, ..., k.$$

Kết hợp với $\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = 0$, ta có $\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_i) = 0$ với bất kỳ $i \geq 0$ cố định. Vì vậy,

$$\lim_{l\to\infty} d(x^{k_l}, H_i) = 0.$$

Đặt $y^{k_l} := P_{H_i}(x^{k_l})$. Khi đó, ta có

$$\lim_{l\to\infty} \|x^{k_l} - y^{k_l}\| = 0.$$

Kết hợp với $\lim_{l\to\infty} x^{k_l} = x^*$ ta suy ra $\lim_{l\to\infty} y^{k_l} = x^*$.

Vì $\{y^{k_l}\} \subset H_i$ và H_i là tập đóng, nên ta suy ra $x^* \in H_i \cap C$. Vì vậy,

$$x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C.$$

Do đó, từ Bước 1 trong chứng minh này, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\| = \lim_{l\to\infty} \|x^{k_l} - x^*\| = 0.$$

Vì vậy, $\{x^k\}$ là dãy hội tụ tới $x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$.

Bước 3. x^* trong Bước 2 của chứng minh là một nghiệm của bài toán EP(C, f).

Từ Bước 1, ta có

$$0 = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z^k, x^k)}{\|w^k\|}.$$

Kết hợp với tính bị chặn của dãy $\{w^k\}$ và (3.33) (nếu ta dùng quy tắc tìm kiếm theo tia 1), hoặc (3.34) (nếu ta dùng quy tắc tìm kiếm theo tia 2), ta có

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k [G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] = 0. \tag{3.40}$$

Bây giờ, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\limsup_{k\to\infty} \eta_k > 0$.

Khi đó, tồn tại $\bar{\eta} > 0$ và một dãy con $\{\eta_{k_i}\} \subset \{\eta_k\}$ sao cho $\eta_{k_i} > \bar{\eta}$, $\forall i$. Từ (3.40), ta có

$$\lim_{i\to\infty} [G(y^{k_i}) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y^{k_i} - x^{k_i} \rangle] = 0,$$

Kết hợp với tính chất lồi mạnh của G

$$G(y^{k_i}) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y^{k_i} - x^{k_i} \rangle \geq \tau \|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2 \geq 0,$$

ta thu được

$$\lim_{i\to\infty} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| = 0.$$

Do $x^{k_i} \to x^*$ nên suy ra $y^{k_i} \to x^*$.

Bây giờ, từ Bước 1 của Thuật toán 3.4, ta có

$$y^{k_i} = \arg\min \left\{ f(x^{k_i}, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y - x^{k_i} \rangle] : \ y \in C \right\}.$$

Áp dụng điều kiện tối ưu, ta thu được

$$0 \in \partial_2 f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{\rho}[\nabla G(y^{k_i}) - \nabla G(x^{k_i})] + N_C(y^{k_i}).$$

Do đó, tồn tại $v^{k_i} \in \partial_2 f(x^{k_i}, y^{k_i})$ sao cho

$$-v^{k_i} - \frac{1}{\rho}[\nabla G(y^{k_i}) - \nabla G(x^{k_i})] \in N_C(y^{k_i}).$$

Điều này nghĩa là

$$\langle v^{k_i}, y - y^{k_i} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \nabla G(y^{k_i}) - \nabla G(x^{k_i}), y - y^{k_i} \rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{3.41}$$

Mặt khác, $v^{k_i} \in \partial_2 f(x^{k_i}, y^{k_i})$. Theo định nghĩa dưới vi phân, ta có

$$f(x^{k_i}, y) - f(x^{k_i}, y^{k_i}) - \langle v^{k_i}, y - y^{k_i} \rangle \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{3.42}$$

Từ (3.41) và (3.42), ta có

$$f(x^{k_i}, y) - f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{\rho} \langle \nabla G(y^{k_i}) - \nabla G(x^{k_i}), y - y^{k_i} \rangle \geq 0, \ \forall y \in C,$$

Cho $i \to \infty$, sử dụng giả thiết $(\mathscr{B}_2)$, $x^{k_i} \to x^*, y^{k_i} \to x^*$ và tính khả vi liên tục của G, ta có

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Do đó, x^* là một nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$.

Trường hợp 2. $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$.

Từ tính bị chặn của dãy $\{y^k\}$, ta suy ra tồn tại một dãy $\{y^{k_i}\} \subset \{y^k\}$ sao cho $y^{k_i} \to \bar{y}$ khi $i \to \infty$. Mặt khác, ta có

$$y^{k_i} = \arg\min \Big\{ f(x^{k_i}, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y - x^{k_i} \rangle] : \ y \in C \Big\}.$$

Từ đó, ta suy ra

$$f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{\rho}[G(y^{k_i}) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y^{k_i} - x^{k_i} \rangle] \le f(x^{k_i}, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y - x^{k_i} \rangle,$$

với mọi $y \in C$. Cho $i \to \infty$ và sử dụng giả thiết $(\mathscr{B}_2)$, $x^{k_i} \to x^*, y^{k_i} \to \bar{y}$, tính chất khả vi liên tục của G, ta có

$$f(x^*, \bar{y}) + \frac{1}{\rho}[G(\bar{y}) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), \bar{y} - x^* \rangle] \le f(x^*, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), y - x^* \rangle], \tag{3.43}$$

với mọi $y \in C$. Theo quy tắc tìm kiếm theo tia (3.27), với $m_{k_i} - 1$, $z^{k_i, m_{k_i} - 1} = (1 - \eta^{m_{k_i} - 1}) x^{k_i} + \eta^{m_{k_i} - 1} y^{k_i}$, ta có

$$f(z^{k_i, m_{k_i} - 1}, x^{k_i}) - f(z^{k_i, m_{k_i} - 1}, y^{k_i}) < \frac{\mu}{\rho}[G(y^{k_i}) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y^{k_i} - x^{k_i} \rangle].$$

Cho $i \to \infty$, sử dụng $(\mathscr{B}_2)$, $\mu \in (0,1)$ ta suy ra rằng

$$f(x^*, x^*) - f(x^*, \bar{y}) \le \frac{\mu}{\rho}[G(\bar{y}) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), \bar{y} - x^* \rangle] \le \frac{1}{\rho}[G(\bar{y}) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), \bar{y} - x^* \rangle],$$

hay ta có

$$f(x^*, \bar{y}) + \frac{1}{\rho}[G(\bar{y}) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), \bar{y} - x^* \rangle] \ge 0. \tag{3.44}$$

Từ (3.43) và (3.44), ta có

$$f(x^*, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), y - x^* \rangle] \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Do đó, theo Bổ đề 3.2.3, ta suy ra rằng x^* là một nghiệm của bài toán EP(C, f).

Bây giờ, ta chỉ ra rằng nếu ta sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia (3.28), thì x^* cũng là một nghiệm của bài toán EP(C,f). Thật vậy, theo quy tắc tìm kiếm theo tia (3.28), với $m_{k_i}-1$, $z^{k_i,m_{k_i}-1} = (1-\eta^{m_{k_i}-1})x^{k_i} + \eta^{m_{k_i}-1}y^{k_i}$, ta có

$$f(z^{k_i,m_{k_i}-1},x^{k_i}) - f(z^{k_i,m_{k_i}-1},y^{k_i}) + f(x^{k_i},y^{k_i}) < -\frac{\mu}{\rho}[G(y^{k_i}) - G(x^{k_i}) - \langle \nabla G(x^{k_i}), y^{k_i} - x^{k_i}\rangle].$$

Cho $i \to \infty$, sử dụng giả thiết $(\mathscr{B}_2)$, $\mu \in (0,1)$ và $\eta_{k_i} = \eta^{m_{k_i}} \to 0$, $x^{k_i} \to x^*$, $y^{k_i} \to \bar{y}$, $z^{k_i,m_{k_i}-1} \to x^*$, ta thu được

$$f(x^*,x^*) - f(x^*,\bar{y}) + f(x^*,\bar{y}) \leq -\frac{\mu}{\rho}[G(\bar{y}) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), \bar{y} - x^*\rangle].$$

Từ đây suy ra rằng

$$G(\bar{y}) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), \bar{y} - x^*\rangle \leq 0.$$

Kết hợp với tính lồi mạnh của G, ta có $x^* = \bar{y}$. Thay thế $x^* = \bar{y}$ vào vế trái của (3.43), ta cũng thu được

$$f(x^*,y) + \frac{1}{\rho}[G(\bar{y}) - G(x^*) - \langle \nabla G(x^*), \bar{y} - x^*\rangle] \geq 0, \ \forall y \in C,$$

hay x^* là một nghiệm của bài toán EP(C,f) theo Bổ đề 3.2.3.

□

Một ưu điểm của Thuật toán 3.4 là áp dụng để giải được cho bài toán cân bằng không đơn điệu và không Lipschitz mà không cần sử dụng phương pháp chiếu thu hẹp. Tuy nhiên, trong Bước 2 của thuật toán này, chúng ta cần phải thực hiện một quy tắc tìm kiếm theo tia để xác định độ dài bước. Điều này dẫn đến chi phí tính toán lớn, đặc biệt khi số chiều không gian n lớn và f có cấu trúc phức tạp. Do đó, chúng tôi đề xuất thuật toán sau áp dụng khi song hàm f thỏa mãn thêm một giả thiết là điều kiện kiểu Lipschitz với hai hằng số c_1 và c_2. Khi đó, quy tắc tìm kiếm theo tia trong Bước 2 của Thuật toán 3.4 có thể được loại bỏ.

Thuật toán 3.5

Bước khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$, chọn các tham số $\mu \in (0,1)$ và ρ, λ sao cho $0 < \rho < \frac{(1-\mu)\tau}{c_2}, 0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{(1-\mu)\tau - \rho c_2}{\rho c_1}}$, hoặc $0 < \rho < \frac{\tau\mu}{c_2}, 0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{\tau\mu - \rho c_2}{\rho c_1}}$. Đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, ...)$. Có x^k thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \arg\min\left\{ f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k \rangle] : y \in C \right\}.$$

Nếu $f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] \geq 0$, thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Tính $z^k = (1-\lambda)x^k + \lambda y^k$.

Bước 3. Chọn $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$. Đặt

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - x^k \rangle + f(z^k, x^k) \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\},$$

và quay về *Bước lặp k* với k được thay bởi $k+1$.

Chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ của Thuật toán 3.5 trong nội dung định lý sau.

Định lý 3.2.6. *Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết $(\mathscr{B}_1)$ - $(\mathscr{B}_3)$ (với các hằng số c_1, c_2 đã xác định được), G là một hàm khả vi liên tục và lồi mạnh với hệ số $\tau > 0$ và S_M là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.5 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán EP(C, f).*

Chứng minh. Ta luôn có (điều kiện dừng của Thuật toán 3.5)

$$f(x^k, y^k) < -\frac{1}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \tag{3.45}$$

Bây giờ, ta xét hai trường hợp sau.
Trường hợp 1. Hai tham số ρ, λ thỏa mãn $0 < \rho < \frac{(1-\mu)\tau}{c_2}$, $0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{(1-\mu)\tau - \rho c_2}{\rho c_1}}$.
Vì f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với hệ số c_1 và c_2, $\lambda > 0, \lambda^2 \leq \frac{(1-\mu)\tau-\rho c_2}{\rho c_1}$ và do tính lồi mạnh của φ, ta có

$$\begin{aligned} f(z^k,y^k) - f(z^k,x^k) - f(x^k,y^k) &\leq c_1\|z^k - x^k\|^2 + c_2\|x^k - y^k\|^2 \\ &= (c_1\lambda^2 + c_2)\|x^k - y^k\|^2 \\ &\leq (c_1(\frac{(1-\mu)\tau}{\rho c_1} - \frac{c_2}{c_1}) + c_2)\|x^k - y^k\|^2 \\ &= \frac{(1-\mu)\tau}{\rho}\|x^k - y^k\|^2 \\ &\leq \frac{1-\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Cộng (3.45) với (3.46), ta nhận được

$$f(z^k,y^k) - f(z^k,x^k) < -\frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle]. \tag{3.47}$$

Sử dụng giả thiết $(\mathscr{B}_1)$ và định nghĩa của hàm lồi, ta có

$$0 = f(z^k,z^k) = f(z^k,(1-\lambda)x^k + \lambda y^k) \leq (1-\lambda)f(z^k,x^k) + \lambda f(z^k,y^k). \tag{3.48}$$

Kết hợp với (3.47), ta có

$$\begin{aligned} f(z^k,x^k) &\geq \lambda(f(z^k,x^k) - f(z^k,y^k)) \\ &> \frac{\lambda\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k\rangle] > 0. \end{aligned}$$

Phần còn lại của chứng minh được thực hiện tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.2.5. Chúng ta kết thúc chứng minh của định lý này cho Trường hợp 1.
Trường hợp 2. Hai tham số ρ, λ thỏa mãn $0 < \rho < \frac{\tau\mu}{c_2}, 0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{\tau\mu - \rho c_2}{\rho c_1}}$.
Vì f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với hai hằng số c_1 và c_2, $\lambda > 0, \lambda^2 \leq \frac{\tau\mu-\rho c_2}{\rho c_1}$, kết hợp với tính chất lồi mạnh của G, ta có

$$\begin{aligned} f(z^k,x^k) + f(x^k,y^k) - f(z^k,y^k) &\geq -c_1\|z^k - x^k\|^2 - c_2\|x^k - y^k\|^2 \\ &= -(c_1\lambda^2 + c_2)\|x^k - y^k\|^2 \end{aligned}$$

$$\geq -\frac{c_1\lambda^2 + c_2}{\tau}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]$$
$$\geq \frac{c_1 \frac{\rho c_2 - \tau\mu}{\rho c_1} - c_2}{\tau}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]$$
$$= -\frac{\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle]. \qquad (3.49)$$

Cộng (3.45) với (3.49), ta có

$$f(z^k, x^k) - f(z^k, y^k) > \frac{1-\mu}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] \qquad (3.50)$$

Kết hợp với (3.48), ta thu được

$$f(z^k, x^k) \geq \lambda(f(z^k, x^k) - f(z^k, y^k)) > \frac{\lambda(1-\mu)}{\rho}[G(y^k) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y^k - x^k \rangle] > 0.$$

Phần còn lại của chứng minh được thực hiện tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.2.5. Chúng ta kết thúc chứng minh của định lý này cho Trường hợp 2. □

Ưu điểm của Thuật toán 3.5 là ta có thể áp dụng cho một lớp các bài toán cân bằng không đơn điệu và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, mà không cần thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước. Tuy nhiên, độ dài bước này tỷ lệ nghịch với $\frac{1}{c}$ trong đó $c = \max\{c_1, c_2\}$, vì vậy, khi hệ số kiểu Lipschitz của f là lớn thì độ dài bước nhỏ và thuật toán có thể chậm. Do đó, khi hệ số c của f là chưa biết hoặc là lớn, thì chúng tôi đề xuất một thuật toán có độ dài bước không phụ thuộc vào hệ số Lipschitz của f như sau.

Thuật toán 3.6

Bước khởi tạo. Lấy $x^{-1}, x^0, y^0 \in C$. Chọn các tham số như sau $\rho > 0$, $\theta \in (0, \frac{4\tau}{3\rho})$, $\lambda_{-1} \in (0, \infty)$. Lấy $\{\delta_i\} \subset (0, \infty)$ là một dãy không tăng thỏa mãn $\lim_{i\to\infty} \delta_i = 0$. Đặt $C_0 = C$ và $i = k = 0$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Có x^k, y^k, λ_k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lấy $w^k \in \partial_2 f(y^k, x^k)$. Đặt

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w^k, x - x^k \rangle + f(y^k, x^k) \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \le j \le k\}.$$

Bước 2. Nếu

$$\lambda_{k-1}\Big(f(x^{k-1}, x^k) - f(x^{k-1}, y^k) - f(y^k, x^k)\Big) \le \frac{\theta}{2}(\|x^{k-1} - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2)$$

thì đặt $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ ngược lại đặt $i = i+1$ và $\lambda_k = \delta_i$. Tính

$$y^{k+1} = \arg\min\Big\{\lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k\rangle] : y \in C\Big\}.$$

Nếu $y^{k+1} = x^k$ thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f). Trái lại, chuyển sang Bước lặp k với k được thay bởi $k+1$.

Sau đây, chúng tôi trình bày kết quả hội tụ cho Thuật toán 3.6 thông qua nội dung của định lý sau.

Định lý 3.2.7. *Giả sử song hàm cân bằng f thỏa mãn các điều kiện $(\mathscr{B}_1)$ - $(\mathscr{B}_3)$ (với hằng số c_1, c_2 chưa biết), G là một hàm khả vi liên tục và lồi mạnh với hệ số $\tau > 0$ và tập nghiệm S_M là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.6 hội tụ tới một nghiệm x^* của bài toán cân bằng EP(C, f).*

Chứng minh. Chúng tôi chia chứng minh của định lý này thành ba bước nhỏ như sau:

Bước 1. Ta chỉ ra rằng với bất kỳ $p \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$ cố định, tồn tại $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$, và

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = \lim_{k\to\infty} \|x^k - x^{k+1}\| = 0.$$

Thật vậy, vì $S_M \neq \emptyset$ nên lấy $p \in S_M$, ta có

$$f(y, p) \le 0, \ \forall y \in C.$$

Thay thế $y = y^k \in C$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$f(y^k, p) \leq 0, \ \forall k. \tag{3.51}$$

Vì $w^k \in \partial_2 f(y^k, x^k)$, nên ta có

$$f(y^k, p) \geq f(y^k, x^k) + \langle w^k, p - x^k \rangle. \tag{3.52}$$

Từ (3.51) và (3.52), ta nhận được

$$f(y^k, x^k) + \langle w^k, p - x^k \rangle \leq 0, \quad \forall k.$$

Điều này có nghĩa là $p \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$,
hay là

$$S_M \subset (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C.$$

Rõ ràng rằng $p \in H_{t_k} \cap C$, tức là, $p \in C_k$. Vì vậy, $P_{C_k}(p) = p$. Sử dụng $x^{k+1} = P_{C_k}(x^k)$ và tính chất không giãn của phép chiếu, ta thu được

$$\|x^{k+1} - p\| = \|P_{C_k}(x^k) - P_{C_k}(p)\| \leq \|x^k - p\|.$$

Vì vậy, giới hạn $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$ là tồn tại và dãy $\{x^k\}$ là bị chặn.
Từ định nghĩa của dãy $\{\lambda_k\}$ và tính chất dãy dương không tăng của $\{\delta_i\}$, ta suy ra rằng $\{\lambda_k\}$ là dãy dương không tăng. Bây giờ, ta chứng minh rằng $\{\lambda_k\} \nrightarrow 0$. Giả sử ngược lại rằng $\lambda_k \to 0$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{\lambda_{k_n}\} \subset \{\lambda_k\}$ sao cho

$$\lambda_{k_n-1}\left(f(x^{k_n-1}, x^{k_n}) - f(x^{k_n-1}, y^{k_n}) - f(y^{k_n}, x^{k_n})\right) > \frac{\theta}{2}(\|x^{k_n-1} - y^{k_n}\|^2 + \|y^{k_n} - x^{k_n}\|^2).$$

Kết hợp với giả thiết $(\mathscr{B}_3)$ và đặt $c = \max\{c_1, c_2\}$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{2}(\|x^{k_n-1} - y^{k_n}\|^2 + \|y^{k_n} - x^{k_n}\|^2) &< \lambda_{k_n-1}\left(f(x^{k_n-1}, x^{k_n}) - f(x^{k_n-1}, y^{k_n}) - f(y^{k_n}, x^{k_n})\right) \\
&\leq \lambda_{k_n-1}(c_1\|x^{k_n-1} - y^{k_n}\|^2 + c_2\|y^{k_n} - x^{k_n}\|^2) \\
&\leq \lambda_{k_n-1}c(\|x^{k_n-1} - y^{k_n}\|^2 + \|y^{k_n} - x^{k_n}\|^2).
\end{aligned}$$

Điều này nghĩa là $\frac{\theta}{2} < c\lambda_{k_n-1}$ với mọi $n \geq 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\lambda_k \to 0$. Do đó, $\lambda_k \nrightarrow 0$. Vì vậy, tồn tại một số $k_0 > 0$ sao cho

$$\lambda_{k-1}\left(f(x^{k-1}, x^k) - f(x^{k-1}, y^k) - f(y^k, x^k)\right) \leq \frac{\theta}{2}(\|x^{k-1} - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2), \tag{3.53}$$

và $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ với mọi $k \geq k_0$.

Nếu $k \geq k_0$ thì $\lambda_k = \lambda_{k-1} = ... = \lambda_{k_0}$ và

$$y^{k+1} = \arg\min\{\lambda_{k_0} f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k \rangle] : y \in C\}.$$

Theo Bổ đề 3.2.3, ta nhận được tính bị chặn của dãy $\{y^k\}_{k \geq k_0}$. Nếu $k < k_0$, thì đặt $M = \max\{\|y^0\|, \|y^1\|, ..., \|y^{k_0-1}\|\}$ và ta luôn có $\|y^k\| \leq M$ với mọi $k < k_0$. Tóm lại, ta luôn có $\{y^k\}$ là dãy bị chặn. Xét dãy $\{w^k\}$ với $w^k \in \partial_2 f(y^k, x^k)$, theo Bổ đề 3.2.2, ta thu được tính bị chặn của dãy $\{w^k\}$.

Bởi vì $x^{k+1} = P_{C_k}(x^k)$ và $p \in C_k$, nên ta có

$$d^2(x^k, C_k) = \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - p\|^2 - \|x^{k+1} - p\|^2. \tag{3.54}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của t_k và C_k, ta có

$$0 \leq d^2(x^k, H_k) \leq d^2(x^k, H_{t_k}) \leq d^2(x^k, C_k). \tag{3.55}$$

Từ (3.54), (3.55) và giới hạn $\lim_{k\to\infty} \|x^k - p\|$ tồn tại, ta thu được

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = \lim_{k\to\infty} \|x^k - x^{k+1}\| = 0. \tag{3.56}$$

Bước 2. Ta chỉ ra dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới điểm $x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C$ nào đó.

Thật vậy, giả sử rằng x^* là một điểm tụ của dãy $\{x^k\}$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{x^{k_l}\}$ của dãy $\{x^k\}$ sao cho $\lim_{l\to\infty} x^{k_l} = x^*$.

Từ định nghĩa của t_k, ta có

$$0 \leq d(x^k, H_i) \leq d(x^k, H_{t_k}), \quad \text{với mỗi } \; i = 0, 1, ..., k.$$

Kết hợp với $\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_{t_k}) = 0$, ta có $\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_i) = 0$ với bất kỳ $i \geq 0$ cố định. Vì vậy,

$$\lim_{l\to\infty} d(x^{k_l}, H_i) = 0.$$

Đặt $y^{k_l} := P_{H_i}(x^{k_l})$. Khi đó,

$$\lim_{l\to\infty} \|x^{k_l} - y^{k_l}\| = 0.$$

Kết hợp với $\lim_{l\to\infty} x^{k_l} = x^*$ ta có $\lim_{l\to\infty} y^{k_l} = x^*$.

Vì $\{y^{k_l}\} \subset H_i$ và H_i là tập đóng nên ta suy ra $x^* \in H_i \cap C$. Do đó,

$$x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C.$$

Từ kết quả trong Bước 1 của chứng minh này, ta có $\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|$ tồn tại. Vì vậy,

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\| = \lim_{l\to\infty} \|x^{k_l} - x^*\| = 0.$$

Do đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới $x^* \in (\cap_{j=0}^{\infty} H_j) \cap C.$

Bước 3. Ta chỉ ra rằng x^* trong Bước 2 chứng minh là nghiệm của bài toán EP(C, f). Bây giờ, từ *Bước 2* của Thuật toán 3.6, ta có

$$y^{k+1} = \arg\min\{\lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}[G(y) - G(x^k) - \langle \nabla G(x^k), y - x^k \rangle] : y \in C\}.$$

Sử dụng điều kiện tối ưu, ta có

$$0 \in \lambda_k \partial_2 f(x^k, y^{k+1}) + \frac{1}{\rho}[\nabla G(y^{k+1}) - \nabla G(x^k)] + N_C(y^{k+1}).$$

Do đó, tồn tại $v^k \in \partial_2 f(x^k, y^{k+1})$ sao cho

$$-\lambda_k v^k - \frac{1}{\rho}[\nabla G(y^{k+1}) - \nabla G(x^k)] \in N_C(y^{k+1}).$$

Điều này nghĩa là

$$\langle \lambda_k v^k + \frac{1}{\rho}[\nabla G(y^{k+1}) - \nabla G(x^k)], z - y^{k+1} \rangle \geq 0, \ \forall z \in C,$$

hay là

$$\frac{1}{\rho}\langle \nabla G(x^k) - \nabla G(y^{k+1}), z - y^{k+1} \rangle \leq \lambda_k \langle v^k, z - y^{k+1} \rangle, \ \forall z \in C. \tag{3.57}$$

Vì $v^k \in \partial_2 f(x^k, y^{k+1})$ nên ta có

$$f(x^k, z) - f(x^k, y^{k+1}) \geq \langle v^k, z - y^{k+1} \rangle, \ \forall z \in C. \tag{3.58}$$

Từ (3.57) và (3.58), ta nhận được

$$\frac{1}{\rho}\langle \nabla G(x^k) - \nabla G(y^{k+1}), z - y^{k+1} \rangle \leq \lambda_k \left(f(x^k, z) - f(x^k, y^{k+1}) \right), \ \forall z \in C. \tag{3.59}$$

Theo Bước 1 trong chứng minh này, ta có

$$\lim_{k\to\infty} d(x^k, H_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{|f(y^k, x^k)|}{\|w^k\|} = 0.$$

Kết hợp với tính bị chặn của dãy $\{w^k\}$, ta thu được

$$\lim_{k\to\infty} f(y^k, x^k) = 0. \tag{3.60}$$

Sử dụng giả thiết $(\mathscr{B}_2)$ và $x^k \to x^*$, ta có

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k, x^{k+1}) = 0. \tag{3.61}$$

Với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|x^{k+1} - x^k + x^k - x^*\|^2 \\
&= \|x^k - x^*\|^2 + \|x^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^k - x^*\rangle \\
&= \|x^k - x^*\|^2 + \|x^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^k - x^{k+1} + x^{k+1} - x^*\rangle \\
&= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x^*\rangle \\
&= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - y^{k+1} + y^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x^*\rangle \\
&= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 - \|y^{k+1} - x^k\|^2 \\
&\quad + 2\langle y^{k+1} - x^k, y^{k+1} - x^{k+1}\rangle + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x^*\rangle.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
2\langle y^{k+1} - x^k, y^{k+1} - x^{k+1}\rangle &= 2\|y^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle y^{k+1} - x^k, x^k - x^{k+1}\rangle \\
&\leq \frac{2}{\tau}\langle \nabla G(y^{k+1}) - \nabla G(x^k), y^{k+1} - x^k\rangle + 2\langle y^{k+1} - x^k, x^k - x^{k+1}\rangle \\
&\leq \frac{-2\lambda_k \rho}{\tau} f(x^k, y^{k+1}) + 2\langle y^{k+1} - x^k, x^k - x^{k+1}\rangle
\end{aligned} \tag{3.63}$$

trong đó bất đẳng thức đầu tiên suy từ tính chất lồi mạnh của G và bất đẳng thức thứ hai suy từ (3.59) với $z = x^k$ và

$$\|x^{k+1} - y^{k+1}\|^2 = \|y^{k+1} - x^k\|^2 + \|x^{k+1} - x^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^k - y^{k+1}\rangle. \tag{3.64}$$

Từ (3.62), (3.63) và (3.64), với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - 2\|y^{k+1} - x^k\|^2 - \|x^{k+1} - x^k\|^2 - \frac{2\lambda_k \rho}{\tau} f(x^k, y^{k+1})$$

$$
\begin{aligned}
&+2\langle x^{k+1}-x^k, x^{k+1}-x^*\rangle\\
&\le \|x^k-x^*\|^2-2\|y^{k+1}-x^k\|^2-\|x^{k+1}-x^k\|^2\\
&\quad+\frac{2\rho}{\tau}\lambda_k(f(y^{k+1},x^{k+1})-f(x^k,x^{k+1}))\\
&\quad+\frac{\rho\theta}{\tau}(\|x^k-y^{k+1}\|^2+\|y^{k+1}-x^{k+1}\|^2)+2\langle x^{k+1}-x^k, x^{k+1}-x^*\rangle\\
&=\|x^k-x^*\|^2-(2-\frac{\rho\theta}{\tau})\|y^{k+1}-x^k\|^2-\|x^{k+1}-x^k\|^2+\frac{\rho\theta}{2\tau}\|y^{k+1}-x^{k+1}\|^2\\
&\quad+\frac{2\lambda_{k_0}\rho}{\tau}[f(y^{k+1},x^{k+1})-f(x^k,x^{k+1})]+2\langle x^{k+1}-x^k, x^{k+1}-x^*\rangle,
\end{aligned}
$$

trong đó bất đẳng thức thứ hai suy từ (3.53) bằng cách đặt $k := k-1$ và đẳng thức nhận được từ $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ với mọi $k \ge k_0$. Thay thế (3.64) vào bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$
\begin{aligned}
\|x^{k+1}-x^*\|^2 \le \|x^k-x^*\|^2&-(2-\frac{3\rho\theta}{2\tau})\|y^{k+1}-x^k\|^2-(1-\frac{\rho\theta}{2\tau})\|x^{k+1}-x^k\|^2\\
&+\frac{2\rho\lambda_{k_0}}{\tau}[f(y^{k+1},x^{k+1})-f(x^k,x^{k+1})]\\
&+\frac{\rho\theta}{\tau}\langle x^{k+1}-x^k, x^k-y^{k+1}\rangle+2\langle x^{k+1}-x^k, x^{k+1}-x^*\rangle.
\end{aligned}
$$

Vì vậy,

$$
\begin{aligned}
0\le(2-\frac{3\rho\theta}{2\tau})\|y^{k+1}-x^k\|^2 \le \|x^k-x^*\|^2&-\|x^{k+1}-x^*\|^2-(1-\frac{\rho\theta}{2\tau})\|x^{k+1}-x^k\|^2\\
&+\frac{2\rho\lambda_{k_0}}{\tau}[f(y^{k+1},x^{k+1})-f(x^k,x^{k+1})]\\
&+\frac{\rho\theta}{\tau}\langle x^{k+1}-x^k, x^k-y^{k+1}\rangle+2\langle x^{k+1}-x^k, x^{k+1}-x^*\rangle.
\end{aligned}
$$

Cho $k\to\infty$, sử dụng $\theta \in (0, \frac{4\tau}{3\rho}), \lim_{k\to\infty}\|x^k-x^*\| = 0$, tính bị chặn của các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$, các đẳng thức (3.56), (3.60) và (3.61) ta có

$$
\lim_{k\to\infty}\|x^k-y^{k+1}\| = 0. \tag{3.65}
$$

Kết hợp với $x^k \to x^*$, ta có $y^{k+1}\to x^*$. Từ (3.59), ta có với mọi $z \in C$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{k_0}f(x^k,z) &\ge \frac{1}{\rho}\langle \nabla G(x^k)-\nabla G(y^{k+1}), z-y^{k+1}\rangle+\lambda_{k_0}f(x^k,y^{k+1})\\
&\ge \frac{1}{\rho}\langle \nabla G(x^k)-\nabla G(y^{k+1}), z-y^{k+1}\rangle+\lambda_{k_0}\langle u^k, y^{k+1}-x^k\rangle\\
&\ge -\frac{1}{\rho}\|\nabla G(x^k)-\nabla G(y^{k+1})\|.\|z-y^{k+1}\|-\lambda_{k_0}\|u^k\|\|y^{k+1}-x^k\|,
\end{aligned} \tag{3.66}
$$

trong đó $u^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$. Do $x^k \to x^*$ và Bổ đề 3.2.2, ta có tính bị chặn của dãy $\{u^k\}$. Cho $k \to \infty$ trong (3.66), sử dụng giả thiết $(\mathscr{B}_2)$, (3.65), tính bị chặn của dãy $\{u^k\}, \{y^k\}$, $x^k \to x^*, y^{k+1} \to x^*$ và tính khả vi liên tục của G, ta có

$$\lambda_{k_0} f(x^*, z) \geq 0, \ \forall z \in C,$$

hay là $f(x^*, z) \geq 0, \forall z \in C$. Vì vậy, x^* là một nghiệm của bài toán EP(C, f).

$\square$

Trong trường hợp, nếu $f(x,y) = \langle F(x), y - x \rangle$, với $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số L, thì chúng tôi đề xuất thuật toán mới sau để giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu và thỏa mãn điều kiện Lipschitz, trong đó hằng số Lipschitz chưa biết, mà không cần sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia để tìm độ dài bước.

Thuật toán 3.7

Bước khởi tạo. Lấy $x^{-1}, x^0, y^0 \in C$. Chọn các tham số $\rho > 0$, $\theta \in (0, \frac{4\tau}{3\rho}), \lambda_{-1} \in (0, \infty)$. Chọn $\{\delta_i\} \subset (0, \infty)$ là dãy không tăng thỏa mãn $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$. Đặt $C_0 = C$, và $i = k = 0$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Có x^k, y^k, λ_k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Đặt

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle F(y^k), x - y^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k),$$

trong đó

$$C_k = C \cap H_{t_k},$$

$$t_k \in \arg\max\{d(x^k, H_j) : 0 \leq j \leq k\}.$$

Bước 2. Nếu $\lambda_{k-1} \langle F(x^{k-1}) - F(y^k), x^k - y^k \rangle \leq \frac{\theta}{2}(\|x^{k-1} - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2)$ thì đặt $\lambda_k = \lambda_{k-1}$ ngược lại đặt $i = i + 1$ và $\lambda_k = \delta_i$. Tính

$$y^{k+1} = P_C(x^k - \rho \lambda_k F(x^k)).$$

Nếu $y^{k+1} = x^k$ thì dừng thuật toán và x^k là một nghiệm của bài toán VIP(C,F).

Ngược lại, chuyển sang Bước lặp k với k được thay bởi $k+1$.

Hệ quả 3.2.8. *Giả sử F là liên tục Lipschitz với hệ số L trên Ω (với hằng số Lipschitz L chưa biết), và tập nghiệm của bài toán MVIP(C,F) là khác rỗng. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.7 hội tụ tới một nghiệm của bài toán VIP(C,F).*

3.2.3 Các ví dụ minh họa

Hai ví dụ trong phần này được chúng tôi đề xuất để so sánh ba thuật toán 3.4, 3.5 và 3.6 của chúng tôi với thuật toán SVN. Các chương trình được viết bằng ngôn ngữ lập trình Matlab, phiên bản R2014 trên Laptop Dell với cấu hình Intel(R) Core(TM) i7-4600U, 2.7GHz, Ram 8.00 GB.

Ví dụ 3.2.9. Chúng tôi xét bài toán cân bằng EP(C,f) với $C = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ và

$$f(x,y) = \|x\|^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i),$$

với $x = (x_1, ..., x_n)^T, y = (y_1, ..., y_n)^T \in C$.

Nhận thấy rằng song hàm f là không đơn điệu trên C. Thật vậy, với $\bar{x} = (0,0,...,0)^T \in C$ và $\bar{y} = (-1,0,...,0)^T \in C$ ta có

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 \textstyle\sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{x}_i) = 0 \text{ và } f(\bar{y},\bar{x}) = \|\bar{y}\|^2 \textstyle\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i - \bar{y}_i) = 1 > 0.$$

Bây giờ, ta đi tìm hệ số kiểu Lipschitz của f. Ta có

$$\begin{aligned}
f(x,z) - f(x,y) - f(y,z) &= (\|x\|^2 - \|y\|^2) \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i) \\
&\le \sqrt{n(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} \\
&= \sqrt{n(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - y_i^2))^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} \\
&= \sqrt{n(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)(x_i - y_i))^2} \|z - y\| \\
&\le \sqrt{n(2\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i))^2} \|z - y\| \\
&\le \sqrt{4n^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \|z - y\|
\end{aligned}$$

$$= 2n\|x-y\|\|z-y\|$$
$$\leq 2n^2\|x-y\|^2 + \frac{1}{2}\|y-z\|^2.$$

Vì vậy, f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C với hệ số $c_1 = 2n^2, c_2 = \frac{1}{2}$. Tập nghiệm của bài toán này và bài toán Minty lần lượt là

$$S = \{(0,0,...,0)^T, (-1,-1,...,-1)^T\} \text{ và } S_M = \{(-1,-1,...,-1)^T\}$$

Chúng tôi xét Thuật toán 3.4, 3.5 và 3.6 với $G(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ và $\tau = \frac{1}{2}$. Chúng tôi tiến hành tính toán Thuật toán SVN với tham số $\rho = 1, \eta = 0.99$, Thuật toán 3.4 với các tham số $\rho = 1$, $\eta = 0.99$, $\mu = 0.5$, Thuật toán 3.5 với tham số $\mu = 0.5$, $\rho = 0.45$, $\lambda = \sqrt{\frac{(1-\mu)\tau - \rho c_2}{\rho c_1}}$, Thuật toán 3.6 với tham số $\rho = 1$, $\theta = \lambda_{-1} = 0.5$, $\{\delta_k\} = \{\frac{1}{k+1}\}_{k\geq 1}$. Điểm xuất phát của Thuật toán SVN, Thuật toán 3.4 và Thuật toán 3.5 là $x^0 = (-0.5,-0.5,...,-0.5)^T$. Điểm xuất phát của Thuật toán 3.6 là $x^{-1} = x^0 = y^0 = (-0.5,-0.5,...,-0.5)^T$. Để kết thúc Thuật toán SVN, Thuật toán 3.4 và Thuật toán 3.5, chúng tôi dùng tiêu chuẩn dừng $Err = \frac{\|x^{k+1}-x^k\|}{\|x^k\|} \leq 10^{-4}$. Để kết thúc Thuật toán 3.6, chúng tôi dùng tiêu chuẩn dừng $Err = \frac{\|x^k - y^k\|}{\|x^k\|} \leq 10^{-4}$. Các kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 3.5.

Từ tính toán thực tế, chúng tôi nhận thấy rằng nếu song hàm f không quá phức tạp và hệ số Lipschitz lớn, thì Thuật toán 3.5 không hiệu quả, thời gian tính toán và số bước lặp lớn hơn nhiều so với các thuật toán còn lại.

Ví dụ 3.2.10. Trong ví dụ này, chúng tôi xét bài toán cân bằng EP(C,f) với

$$C = \left[-n\pi, \frac{n\pi}{2}\right]^n \text{ và } f(x,y) = \textstyle\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)\cos\frac{x_i}{n} + G(y) - G(x),$$

trong đó $G(x) = G(x_1,x_2,...,x_n) = \max\{0, -\frac{n\pi}{2} - x_1, -\frac{n\pi}{2} - x_2, ..., -\frac{n\pi}{2} - x_n\}$.

Xét $\bar{x} = \left(-\frac{n\pi}{3}, \frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}, ..., \frac{n\pi}{2}\right)^T$ và $\bar{y} = \left(-\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{3}, \frac{n\pi}{2}, ..., \frac{n\pi}{2}\right)^T$, ta có $G(\bar{x}) = G(\bar{y}) = 0$, $f(\bar{x},\bar{y}) = \frac{n\pi}{24} > 0$ và $f(\bar{y},\bar{x}) = \frac{(\sqrt{2}-1)n\pi}{12\sqrt{2}} > 0$. Do đó, f là không đơn điệu trên C. Ta nhận thấy rằng

$$S = \left\{\left(-\frac{n\pi}{2}, -\frac{n\pi}{2}, ..., -\frac{n\pi}{2}\right)^T; \left(\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}, ..., \frac{n\pi}{2}\right)^T\right\} \text{ và } S_M = \left\{\left(-\frac{n\pi}{2}, -\frac{n\pi}{2}, ..., -\frac{n\pi}{2}\right)^T\right\}.$$

Vì

$$f(x,z) - f(x,y) - f(y,z) = \sum_{i=1}^n (z_i - x_i)\cos\frac{x_i}{n} + G(z) - G(x) - \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)\cos\frac{x_i}{n}$$

n	TT. SVN lin1		TT. SVN lin2		TT. 3.4 lin1	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
10	0.0624	4	0.0468	4	0.0624	4
20	0.078	4	0.0936	4	0.0468	4
50	0.0468	4	0.078	4	0.0468	4
100	0.0936	4	0.1248	4	0.0936	4
n	TT. 3.4 lin2		TT. 3.5		TT. 3.6	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
10	0.0312	4	8.9077	293	0.0936	4
20	0.0468	4	22.67	445	0.2028	4
50	0.078	4	67.2676	835	0.1872	4
100	0.078	4	129.8396	1300	0.5772	4

Bảng 3.5: Kết quả tính toán cho Ví dụ 3.2.9

$$
\begin{aligned}
&- G(y) + G(x) - \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)\cos\frac{y_i}{n} - G(z) + G(y) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)\left(\cos\frac{x_i}{n} - \cos\frac{y_i}{n}\right) \\
&\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{x_i}{n} - \cos\frac{y_i}{n}\right)^2} \\
&= \|z - y\|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 4\left(\sin\frac{x_i - y_i}{2n}\sin\frac{x_i + y_i}{2n}\right)^2} \\
&\le \|z - y\|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 4\sin^2\frac{x_i - y_i}{2n}} \\
&= \frac{1}{n}\|z - y\|\|x - y\| \\
&\le \frac{1}{2n^2}\|x - y\|^2 + \frac{1}{2}\|z - y\|^2,
\end{aligned}
$$

nên f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với hằng số $c_1 = \frac{1}{2n^2}$ và $c_2 = \frac{1}{2}$.

Bây giờ, ta tìm dưới vi phân $\partial G(x)$ bằng cách xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1.

Trường hợp 1.1. Nếu $-\frac{n\pi}{2} < x_i \le \frac{n\pi}{2}$ với mọi $i = 1, ..., n$, thì $G(x) = 0$ và dưới vi phân $\partial G(x) = \{(0, 0, ..., 0)^T\}$.

Trường hợp 1.2. Nếu tồn tại một tập $I_a = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, $(k \ge 1)$ sao cho

$$G(x) = 0 = -\frac{n\pi}{2} - x_{i_1} = -\frac{n\pi}{2} - x_{i_2} = ... = -\frac{n\pi}{2} - x_{i_k},$$

thì $\partial G(x) = \{-\sum_{i\in I_a} \alpha_i e_i : \sum_{i\in I_a} \alpha_i \le 1, 0 \le \alpha_i \le 1,\ \forall i \in I_a\}$, trong đó $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)^T$ là vec tơ đơn vị thứ i.

Trường hợp 2. Nếu tồn tại một tập $I_a = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, $(k \ge 1)$ sao cho

$$G(x) = -\frac{n\pi}{2} - x_{i_1} = -\frac{n\pi}{2} - x_{i_2} = ... = -\frac{n\pi}{2} - x_{i_k},$$

thì $\partial G(x) = \{-\sum_{i\in I_a} \alpha_i e_i : \sum_{i\in I_a} \alpha_i = 1, 0 \le \alpha_i \le 1,\ \forall i \in I_a\}$, trong đó $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)^T$ là vec tơ đơn vị thứ i.

Do đó, ta có

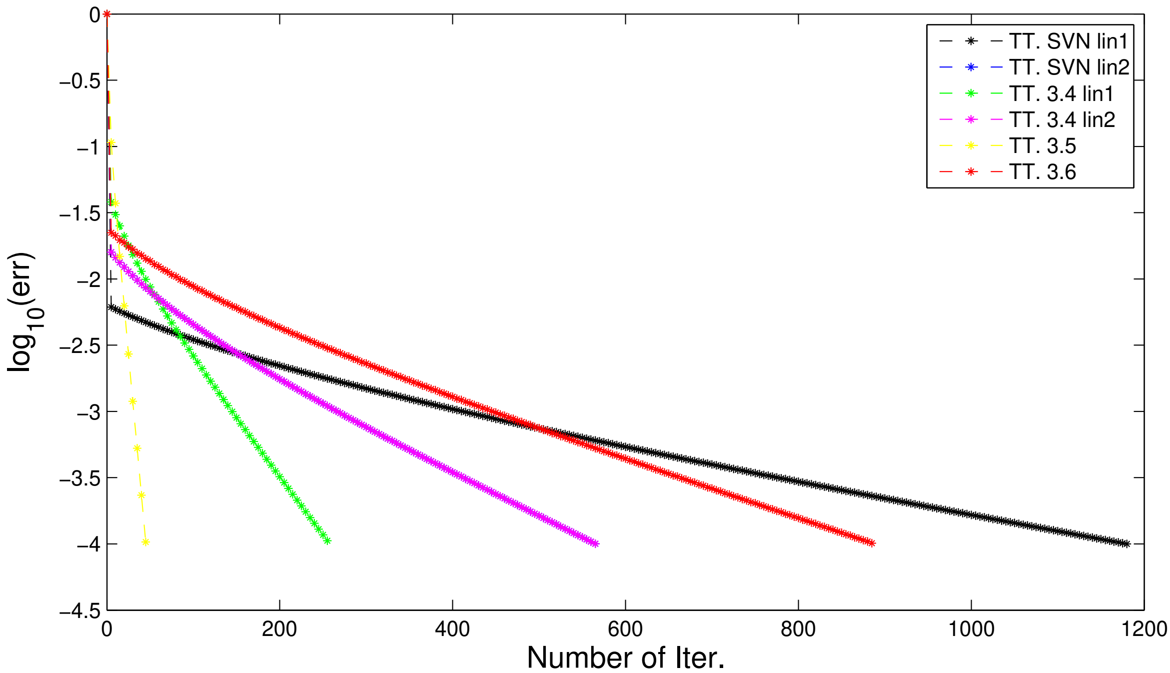
$$\partial_2 f(z^k, x^k) = \left\{ \left(\cos\frac{z_1^k}{n}, ..., \cos\frac{z_n^k}{n} \right) + u^k : u^k \in \partial\varphi(x^k) \right\}.$$

Chúng tôi xét Thuật toán 3.4 đến Thuật toán 3.6 với $G(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ và $\tau = \frac{1}{2}$. Chúng tôi tiến hành tính toán Thuật toán SVN với tham số $\rho = 1, \eta = 0.99$, Thuật toán 3.4 với tham số $\rho = 1, \eta = 0.99, \mu = 0.5$, Thuật toán 3.5 với các tham số $\mu = 0.5$, $\rho = 0.45$, $\lambda = \sqrt{\frac{\tau\mu - \rho c_2}{\rho c_1}}$, Thuật toán 3.6 với các tham số $\rho = 1$, $\theta = \lambda_{-1} = 0.5$, $\{\delta_k\} = \{\frac{1}{k+1}\}_{k\ge 1}$. Điểm xuất phát của Thuật toán SVN, Thuật toán 3.4 và Thuật toán 3.5 là $x^0 = \left(-\frac{n\pi}{8}, ..., -\frac{n\pi}{8}\right)^T$. Điểm xuất phát của Thuật toán 3.6 là $x^{-1} = x^0 = y^0 = \left(-\frac{n\pi}{8}, ..., -\frac{n\pi}{8}\right)^T$. Để kết thúc Thuật toán SVN, Thuật toán 3.4 và Thuật toán 3.5, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng $Err = \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} \le 10^{-4}$. Để kết thúc Thuật toán 3.6, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng $Err = \frac{\|x^k - y^k\|}{\|x^k\|} \le 10^{-4}$. Kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 3.6 và Hình 3.5.

n	TT. SVN lin1		TT. SVN lin2		TT. 3.4 lin1	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
10	42.2	354	16.4	157	3.6	67
20	81.67	608	24.45	276	6.68	122
50	685.16	1181	215.77	567	21.89	259
100	3885.78	1869	988.11	948	56.83	449

n	TT. 3.4 lin2		TT. 3.5		TT. 3.6	
	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.
10	11.34	157	2.81	47	14.18	240
20	16.7	276	2.32	47	27.1	427
50	58.38	567	3.5	47	98.48	890
100	144.66	948	4.79	47	262.28	1508

Bảng 3.6: Kết quả tính toán cho Ví dụ 3.2.10



n=100bai3-eps-converted-to.pdf

Hình 3.5: Số bước lặp trong Ví dụ 3.2.10 trong trường hợp $n = 50$ và $n = 100$

Kết luận chương 3

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất được ba thuật toán tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và ba thuật toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng. Các thuật toán này đều dành cho bài toán không đơn điệu, và là sự kết hợp giữa phương pháp chiếu mới (khác với phương pháp chiếu thu hẹp ở Chương 2) và quy tắc tìm kiếm theo tia hoặc không sử dụng quy tắc tìm kiếm theo tia. Sự hội tụ của các thuật toán được chỉ rõ qua các định lý trong chương. Chúng tôi cũng đưa ra một vài ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của các thuật toán đề xuất.

Kết luận

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu phương pháp giải bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- *Xây dựng được Thuật toán 2.1 bằng cách kết hợp phương pháp chiếu thu hẹp và các kiểu quy tắc tìm kiếm theo tia tương ứng để giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu trong không gian Banach. Chứng minh được dãy lặp sinh bởi thuật toán đó hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng (Định lý 2.2.6), đồng thời áp dụng thuật toán vào Ví dụ số minh họa 2.3.1. Kết quả này được thể hiện ở [CT1].*

- *Xây dựng được hai Thuật toán 3.1 và 3.2 để giải bài toán bất đẳng thức biến phân $VIP(C,F)$ không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Trong trường hợp ánh xạ giá F thỏa mãn thêm điều kiện Lipschitz, chúng tôi chỉ cần sử dụng phương pháp chiếu kiểu thích nghi, mà không cần thực hiện quy tắc tìm kiếm theo tia. Điều này được chỉ ra trong Thuật toán 3.3. Chúng tôi cũng đã chứng minh được dãy lặp sinh bởi các thuật toán trên hội tụ tới nghiệm của bài toán đang xét (Định lý 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6) và đưa ra ví dụ số minh họa cho các thuật toán. Các kết quả cho bài toán bất đẳng thức biến phân được thể hiện ở [CT2].*

- *Xây dựng được Thuật toán 3.4 để giải bài toán cân bằng $EP(C,f)$ không đơn điệu trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Trong trường hợp song hàm f thỏa mãn thêm điều kiện kiểu Lipschitz, chúng tôi đề xuất thêm hai Thuật toán 3.5 và 3.6 mà không cần dùng đến quy tắc tìm kiếm theo tia. Chúng tôi cũng chứng minh được* *dãy lặp sinh bởi các thuật toán trên hội tụ tới nghiệm của bài toán đang xét (Định lý 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7), đồng thời trình bày một số ví dụ minh họa cho các thuật toán đề xuất. Kết quả này được thể hiện ở [CT3].*

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề chúng tôi tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới là:

- *Xây dựng một số thuật toán chiếu kiểu thích nghi giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert.*
- *Xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng tách, bài toán cân bằng hai cấp không đơn điệu.*
- *Nghiên cứu đề xuất thuật toán hội tụ yếu tới nghiệm của dãy lặp cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Banach.*

Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án

[CT1] B.V. Dinh, H.D. Manh, T.T.H. Thanh (2023), Extragradient algorithms with linesearches for solving nonmonotone equilibrium problems in Banach spaces, *Vietnam Journal of Mathematics,* http://doi.org/10.1007/s10013-023-00649-9 (Scopus).

[CT2] B.V. Dinh, H.D. Manh, T.T.H. Thanh (2022), A modified Solodov-Svaiter method for solving nonmonotone variational inequality problems, *Numerical Algorithms,* **90**, 1715–1734 (SCIE).

[CT3] T.T.H. Thanh, H.D. Manh, N.T.T. Ha, B.V. Dinh (2023), A novel method for solving nonmonotone equilibrium problems (submitted).

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Xuân Liêm (2016), *Giải tích hàm*. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Tiếng Anh

[2] B.H. Ahn (1983), Iterative methods for linear complementarity problems with upper bounds on primary variables, *Mathematical Programming*, **26**, pp. 295-315.

[3] Y.I. Alber (1996), Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. In: Kartosator, A.G. (ed.) Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, vol. 178 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York, pp. 15-50.

[4] V. Barbu, T. Precupanu (2014), *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Springer Dordrecht.

[5] M. Bianchi, S. Schaible (1996), Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **90**, pp. 31-43.

[6] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, M. Passacantando (2019), *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria*, Springer.

[7] E. Blum, W. Oettli (1994), From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Mathematics Student-India*, **63**, pp. 127-149.

[8] S. Boyd, L. Vandenberghe (2004), *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge.

[9] R. Burachik, G. Kassay (2012), On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**, pp. 6456-6464.

[10] I. Cioranescu (1990), *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems, Mathematics and Its Applications*, **62**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[11] S.V. Denisov, V.V. Semenov, L.M. Chabak (2015), Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators, *Cybernetics and Systems Analysis*, **51**, pp. 757–765.

[12] X.P. Ding (2010), Auxiliary principle and algorithm for mixed equilibrium problems and bilevel equilibrium problems in Banach spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **146**, pp. 347-357.

[13] B.V. Dinh, D.S. Kim (2016), Projection algorithms for solving nonmonotone equilibrium problems in Hilbert space, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **302**, pp. 106-117.

[14] B.V. Dinh, D.S. Kim (2017), Extragradient algorithms for equilibrium problems and symmetric generalized hybrid mappings, *Optimization Letters*, **11**, pp. 537-553.

[15] B.V. Dinh, L.D. Muu (2015), A projection algorithm for solving pseudomonotone equilibrium problems and it's application to a class of bilevel equilibria, *Optimization*, **64**, pp. 559-575.

[16] B.V. Dinh, P.G. Hung, L.D. Muu (2014), Bilevel optimization as a regularization approach to pseudomonotone equilibrium problems, *Numerical Functional Analysis and Optimization* **35**, 539-563 (2014)

[17] K. Fan (1972), A minimax inequality and applications, in: O. Shisha, *Inequalities III, Proceeding of the Third Symposium on Inequalities*, Academic Press, New York, pp. 103–113.

[18] E.M. Gafni, D.P. Bertsekas (1984), Two-metric projection methods for constrained optimization, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **22**, pp. 936-964.

[19] P. Hartman, G. Stampacchia (1966), On some nonlinear elliptic differential functional equations, *Acta Mathematical*, **115**, pp. 153-188.

[20] D.V. Hieu, L.D. Muu, P.K. Quy, H.N. Duong (2021), New extragradient methods for solving equilibrium problems in Banach spaces, *Banach Journal of Mathematical Analysis*, **15**, pp. 1-24.

[21] A.N. Iusem, W. Sosa (2003), Iterative algorithms for equilibrium problems, *Optimization*, **52**, pp. 301-316.

[22] A.N. Iusem, V. Mohebbi (2020), Extragradient methods for nonsmooth equilibrium problems in Banach spaces, *Optimization*, **69**(11), pp. 2383-2403.

[23] A.N. Iusem, M. Nasri (2011), Korpolevich's method for variational inequality problems in Banach spaces, *Journal of Global Optimization*, **50**, pp. 59-76.

[24] S. Kamimura, W. Takahashi (2003), Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space, *SIAM Journal on Optimization*, **13** (3), pp. 938-945.

[25] G. Kassay, V.D. Rădulescu (2019), *Equilibrium problems and applications*, Elsevier - Academic Press.

[26] I.V. Konnov (2001), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer.

[27] I.V. Konnov, D.A. Dyabilkin (2011), Nonmonotone equilibrium problems: coercivity and weak regularization, *Journal of Global Optimization*, **49**, pp. 575–587.

[28] I.V. Konnov, O.V. Pinyagina (2003), D-gap functions for a class of monotone equilibrium problems in Banach spaces, *Computational Methods in Applied Mathematic*, **3**, pp. 274-286.

[29] G.M. Korpelevich (1976), The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Matekon.*, **12**, pp. 747-756.

[30] G. Mastroeni (2003), Gap function for equilibrium problems, *Journal of Global Optimization*, **27**(4), pp. 411-426.

[31] G. Mastroeni (2003), On Auxiliary Principle for Equilibrium Problems, Vol. 68 of the Series Nonconvex Optimization and Its Applications, pp. 289-298.

[32] A. Moudafi (1999), Proximal point algorithm extended to equilibrum problem, *Journal of Natural Geometry*, **15**, pp. 91-100.

[33] L.D. Muu, W. Oettli (1992), Convergence of an adative penalty scheme for finding constrained equilibria, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **18** (12), pp. 1159-1166.

[34] L.D. Muu and T.D. Quoc (2009), Regularization algorithms for solving monotone Ky Fan inequalities with application to a Nash-Cournot equilibrium model, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **142**, pp. 185-204.

[35] L.D. Muu, N.V. Quy, and V.H. Nguyen (2007), On Nash-Cournot oligopolistic market equilibrium models with concave cost functions, *Journal of Global Optimization*, **41**, pp. 351-364.

[36] L.D. Muu, X.T. Le (2018), A splitting algorithm for finding fixed points of nonexpansive mappings and solving equilibrium problems, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **20**,130, https://doi.org/10.1007/s11784-018-0612-8.

[37] H. Nikaido, K. Isoda (1955), Note on noncooperative convex games, *Pacific Journal of Mathematics*,**5**, pp. 807-815.

[38] M.A. Noor (2004), Auxiliary principle technique for equilibrium problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **122**, pp. 371-386.

[39] J. Peypouquet (2015), *Convex Optimization in Normed Spaces Theory, Methods and Examples*, Springer

[40] X. Qin, Y.J. Cho, S.M. Kang (2009), Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **225**, pp. 20-30.

[41] T.D. Quoc, P.N. Anh, L.D. Muu (2012), Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *Journal of Global Optimization*, **52**, pp. 139-159.

[42] T.D. Quoc, L.D. Muu, N.V. Hien (2008), Extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *Optimization*, **57**, pp. 749–776.

[43] S. Reich, S. Sabach (2012), Three strong convergence theorems regarding iterative methods for solving equilibrium problems in reflexive Banach spaces, *Contemporary Mathematics*, **568**, pp. 225-240.

[44] M. Renardy, R.C. Rogers (2004), *An introduction to partial differential equations*, Texts in Applied Mathematics, **13** (second ed.), Springer-Verlag, New York.

[45] R.T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press.

[46] D. Rouhani, V. Mohebbi (2022), Extragradient methods for quasi-equilibrium problems in Banach spaces, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **112**, pp. 90-114.

[47] S. Saewan, P. Kumam (2011), A modified hybrid projection method for solving generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, **62**, pp. 1723-1735.

[48] M.V. Solodov, B.F. Svaiter (1999), A new projection method for variational inequality problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37** (3), pp. 765-776.

[49] J.J. Strodiot, P.T. Vuong, N.T.T. Van (2016), A class of shrinking projection extragradient methods for solving non-monotone equilibrium problems in Hilbert spaces, *Journal of Global Optimization*, **64**, pp. 159-178.

[50] D. Sun (1995), A New Stepsize Skill for Solving a Class of Nonlinear Projection Equations, *Journal of Computational Mathematics*, **13**, pp. 357–368.

[51] W. Takahashi, K. Zembayashi (2009), Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces, *Nonlinear Analysis: Theory Methods and Application*, **70**, pp. 45-57.

[52] Y. Tang, S. Zhang, T. Guo (2022), Some nonlinear characterizations of reflexive Banach spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.05257

[53] N.T.T. Thuy, P.T. Hieu (2019), A hybrid method for solving variational inequalities over the common fixed point sets of infinite families of nonexpansive mappings in Banach spaces, *Optimization*, **69(9)**, pp. 2155-2176.

[54] J.V. Tiel (1984), *Convex Analysis: An Introductory Text*, Wiley, New York.

[55] H. Tuy (1998), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.

[56] N.T. Vinh, L.D. Muu (2019), Inertial extragradient algorithms for solving equilibrium problems, *Acta Mathematica Vietnamica*, **44**, pp. 639-663.

[57] N.H. Xiu, J.Z. Zhang (2003), Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **152**, pp. 559-585.

[58] M. Ye, Y. He (2015), A double projection method for solving variational inequalities without monotonicity, *Computational Optimization and Applications*, **60**, pp. 141-150.

[59] C. Zalinescu (2002), *Convex Analysis In General Vector Spaces*, World Scientific.