BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

Phùng Văn Minh

PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐỘNG CỦA TẤM NANO TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC

Luận án Tiến sĩ

Hà Nội - 2023

B

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

Phùng Văn Minh

PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐỘNG CỦA TẤM NANO TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC

Chuyên ngành: Cơ học vật rắn

Mã ngành: 9.44.01.07

Luận án Tiến sĩ

Cán bộ hướng dẫn:

1. PGS.TS Đỗ Văn Thơm
2. GS.TS Lê Minh Thái

Hà Nội - 2023

MỤC LỤC

LỜI CAM KẾT V

LỜI CẢM ƠN VI

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ TỪ VIẾT TẮT VII

DANH MỤC CÁC BẢNG IX

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ X

MỞ ĐẦU 1

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU 4

1.1. Tổng quan về hiệu ứng flexoelectric 4

1.1.1. Hiệu ứng flexoelectric 4

1.1.2. Nguồn gốc hiệu ứng flexoelectric 5

1.1.3. Quá trình hoàn thiện của các lý thuyết về hiệu ứng flexoelectric 6

1.1.4. Các phương pháp đo hệ số flexoelectric 9

1.1.5. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric 14

1.2. Tổng quan về phân tích kết cấu kích thước nano có hiệu ứng flexoelectric 16

1.2.1. Bài toán uốn tĩnh và dao động riêng của kết cấu kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric 16

1.2.2. Bài toán động lực học của kết cấu kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric 20

1.2.3. Tình hình nghiên cứu trong nước về kết cấu có kích thước nano với hiệu ứng flexoelectric 22

1.3. Kết quả đạt được từ các công trình đã công bố và vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu 23
1.4. Nhiệm vụ của luận án 25
1.5. Kết luận chương 1 25
CHƯƠNG 2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN TĨNH VÀ ĐỘNG LỰC HỌC TẤM KÍCH THƯỚC NANO TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC 26
2.1. Mô hình bài toán và các giả thiết 26
2.2. Hiệu ứng flexoelectric và các quan hệ cơ học của tấm khi chịu tải trọng tĩnh và động 27
2.2.1. Chuyển vị 27
2.2.2. Biến dạng 29
2.2.3. Biến thiên biến dạng 30
2.2.4. Quan hệ ứng suất-biến dạng 30
2.2.5. Cường độ điện trường 33
2.3. Nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu 34
2.3.1. Thế năng biến dạng của tấm có kích thước nano 34
2.3.2. Thế năng biến dạng đàn hồi của nền 37
2.3.3. Công của ngoại lực 37
2.4. Phương trình PTHH của tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi kể đến hiệu ứng flexoelectric 38
2.4.1. Mô hình phần tử và véc-tơ chuyển vị nút phần tử 38
2.4.2. Ma trận và véc-tơ phần tử 39
2.4.3. Phương trình vi phân dao động 44

2.4.4. Điều kiện biên 45
2.4.5. Lưu đồ thuật toán và chương trình phân tích bài toán tĩnh 47
2.4.6. Lưu đồ thuật toán và chương trình phân tích bài toán dao động riêng .. 49
2.4.7. Lưu đồ thuật toán và chương trình phân tích bài toán dao động cưỡng bức 51
2.5. Kết luận chương 2 55
CHƯƠNG 3. NGHIÊN CỨU ĐÁP ỨNG TĨNH CỦA TẤM KÍCH THƯỚC NANO TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC 56
3.1. Đặt vấn đề 56
3.2. Ví dụ kiểm chứng 57
3.2.1. Ví dụ 1 57
3.2.2. Ví dụ 2 58
3.2.3. Ví dụ 3 60
3.3. Khảo sát các yếu tố tác động đến đáp ứng tĩnh của tấm 61
3.3.1. Tác động của hiệu ứng flexoelectric 62
3.3.2. Tác động của hệ số flexoelectric 66
3.3.3. Tác động của điều kiện biên 70
3.3.4. Tác động của nền đàn hồi 74
3.3.5. Tác động của chiều dày tấm 75
3.4. Kết luận chương 3 79
CHƯƠNG 4. NGHIÊN CỨU ĐÁP ỨNG ĐỘNG LỰC HỌC CỦA TẤM KÍCH THƯỚC NANO ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC 80

4.1. Đặt vấn đề 80
4.2. Ví dụ kiểm chứng cho bài toán dao động riêng 81
4.2.1. Ví dụ 1 81
4.2.2. Ví dụ 2 82
4.3. Ví dụ kiểm chứng cho bài toán động lực học 82
4.4. Khảo sát các yếu tố tác động đến dao động riêng của tấm 84
4.4.1. Tác động của hiệu ứng flexoelectric 84
4.4.2. Tác động của điều kiện biên 87
4.5. Khảo sát các yếu tố tác động đến đáp ứng động của tấm 92
4.5.1. Tác động của hiệu ứng flexoelectric 92
4.5.2. Tác động của chiều dày tấm 95
4.5.3. Tác động của nền đàn hồi 97
4.5.4. Tác động của tần số lực kích động 99
4.6. Kết luận chương 4 101
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 102
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ 104
TÀI LIỆU THAM KHẢO 105

LỜI CAM KẾT

Tôi xin cam đoan nội dung luận án là do chính tôi nghiên cứu dưới sự định hướng của cán bộ hướng dẫn. Kết quả thể hiện trong đề tài luận án là đáng tin cậy, được kiểm chứng và chưa công bố ở bất cứ đâu dưới dạng sách, chuyên khảo hay bài báo khoa học.

Tác giả

Phùng Văn Minh

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, Nghiên cứu sinh thể hiện lòng biết ơn tới tập thể CBHD: PGS.TS Đỗ Văn Thơm và GS.TS Lê Minh Thái đã ân cần hướng dẫn, động viên và cho tôi những nhận xét, đánh giá có ý nghĩa khoa học trong toàn bộ quá trình thực hiện đề tài luận án.

Nghiên cứu sinh cũng xin chân thành cảm ơn GS.TS Hoàng Xuân Lượng, GS.TSKH Đào Huy Bích, GS.TS Nguyễn Thái Dũng, GS.TS Nguyễn Thái Chung, PGS.TS Phạm Tiến Đạt và PGS.TS Đoàn Trắc Luật đã có những góp ý giá trị để tôi hoàn thiện đề tài luận án.

Nghiên cứu sinh xin cảm ơn Chỉ huy: Khoa Cơ khí, Phòng Sau đại học, Hệ quản lý Học viên SĐH cùng toàn thể đồng nghiệp trong và ngoài Bộ môn đã tạo những điều kiện tốt nhất cho tôi hoàn thành đề tài luận án của mình.

Nghiên cứu sinh cũng xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, người thân và bạn bè đã động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu, thực hiện luận án.

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ TỪ VIẾT TẮT

1. Ký hiệu bằng chữ Latinh

a	Chiều dài
b	Chiều rộng
$\boldsymbol{C}_e$	Ma trận cản của phần tử
$\boldsymbol{C}$	Ma trận hằng số của vật liệu
E_z	Cường độ điện trường
e_{kij}	Ten-xơ áp điện
F_s	Lực phân bố bề mặt
f_{14}	Hệ số flexoelectric
H_i	Hàm dạng Hermite
h	Chiều dày của tấm
$\boldsymbol{K}_e$	Ma trận độ cứng phần tử
$\boldsymbol{K}_e^f$	Ma trận độ cứng phần tử nền
$\boldsymbol{M}_e$	Ma trận khối lượng của phần tử
$p(t)$	Tải trọng phân bố biến đổi theo thời gian
$\boldsymbol{q}_e$	Véc-tơ chuyển vị phần tử
$\boldsymbol{q}_i$	Véc-tơ chuyển vị nút
r, s	Tọa độ tự nhiên
T	Động năng
T_{ij}	Ten-xơ ứng suất
P_i	Véc-tơ chuyển vị điện
$\boldsymbol{u}$	Véc-tơ chuyển vị

$\boldsymbol{u}_0$	Véc-tơ chuyển vị của điểm giữa tấm
U	Năng lượng do biến dạng
U^f	Năng lượng biến dạng của nền đàn hồi
u, v, w	Thành phần chuyển vị
u_0, v_0, w_0	Thành phần chuyển vị điểm giữa tấm
W	Công của ngoại lực
x, y, z	Tọa độ Đề-các

2. Ký hiệu trong chữ cái Hy Lạp

ε	Véc-tơ biến dạng
ρ	Khối lượng riêng
ν	Hệ số Poát-xông
$\boldsymbol{\sigma}$	Véc-tơ ứng suất
κ_{ij}	Hằng số điện môi
Ψ_{ijm}	Ten-xơ ứng suất bậc cao
ω	Tần số tự nhiên

3. Các từ viết tắt

CBHD	Cán bộ hướng dẫn
PTHH	Phần tử hữu hạn
CCCC	Biên ngàm bốn cạnh
SSSS	Biên tựa đơn bốn cạnh
CCSS	Biên ngàm hai cạnh kề nhau và tựa đơn hai cạnh kề nhau
CSCS	Hai cạnh đối diện chịu ngàm, các cạnh còn lại tựa đơn
CFFF	Biên ngàm một cạnh, ba cạnh còn lại tự do

DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 1.1. Giá trị thực đo nghiệm và tính toán hệ số flexoelectric đối với một số vật liệu [39] 13
Bảng 3.1. Độ võng không thứ nguyên của tấm tựa đơn bốn cạnh với nền đàn hồi hai hệ số 58
Bảng 3.2. So sánh giá trị lớn nhất của các đáp ứng với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric 65
Bảng 3.3. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của *w*, E_z và P_z với các điều kiện liên kết khác nhau, $z=-\frac{h}{2}$ 72
Bảng 3.4. Giá trị lớn nhất *w**, σ_x^*, τ_{xy}^*, E_z^* và P_z^* với sự thay đổi của nền đàn hồi 75
Bảng 4.1. Bảng kết quả tần số dao động riêng không thứ nguyên đầu tiên ϖ ... 81
Bảng 4.2. Tần số cơ bản ω (GHz) của tấm kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric 82
Bảng 4.3. Phụ thuộc của các tần số dao động riêng ω_i^* của tấm nano có bốn cạnh tựa đơn vào tham số f_{14}^*, K_w^*= 10, K_s^*=2 85
Bảng 4.4. Phụ thuộc của các tần số cơ bản vào tham số f_{14}^*, K_w^*= 10, K_s^*=2 87

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1.1. Mô tả khác biệt giữa hiệu ứng piezoelectric và flexoelectric [2] 4
Hình 1.2. Công bố liên quan đến "flexoelectric" trong 22 năm gần nhất 9
Hình 1.3. Các phương pháp đo hiệu ứng flexoelectric ngang, dọc và cắt [39] ... 11
Hình 1.4. Phương pháp đo gián tiếp hệ số flexoelectric dọc [41] 12
Hình 1.5. Sơ đồ minh họa đo hệ số flexoelectric tinh thể lỏng gián tiếp [39] 12
Hình 1.6. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric trong chế tạo thiết bị trợ tim [42] 14
Hình 1.7. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric trong chế tạo các thiết bị cảm ứng (sensor) và thiết bị kích thích (actuator) [43] 15
Hình 1.8. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric trong chế tạo thiết bị quang năng và pin mặt trời [39,44] 16
Hình 2.1. Mô hình tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak 26
Hình 2.2. Mô hình phần tử tứ giác bốn điểm nút trong hệ trục tọa độ Đề-các và hệ trục tọa độ tự nhiên 38
Hình 2.3. Một số điều kiện biên cho tấm có kích thước nano 46
Hình 2.4. Lưu đồ phân tích uốn tĩnh tấm nano kể đến hiệu ứng flexoelectric 48
Hình 2.5. Lưu đồ phân tích dao động tự do tấm nano kể đến hiệu ứng flexoelectric 50
Hình 2.6. Lưu đồ phương pháp lặp Newmark để giải bài toán đáp ứng động của tấm có kích thước nano xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric 54
Hình 3.1. Mô hình tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tải trọng phân bố tĩnh 56

Hình 3.2. Phân bố các thành phần ứng suất theo phương chiều dày của tấm vuông chịu tải trọng hình sin 59
Hình 3.3. Độ võng không thứ nguyên lớn nhất của tấm có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric, SSSS, $y=b/2$ 60
Hình 3.4. Độ võng w^* của tấm tại $y=b/2$ trong trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric 62
Hình 3.5. Phân bố cường độ điện trường E_z dọc theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric 63
Hình 3.6. Phân bố P_z theo chiều dày của tấm với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric 63
Hình 3.7. Phân bố ứng suất pháp σ_x^* theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric 64
Hình 3.8. Phân bố ứng suất tiếp τ_{xy}^* theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric 64
Hình 3.9. Phân bố ứng suất tiếp τ_{xz}^* theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric 65
Hình 3.10. Độ võng của tấm tại $y = b/2$ với các giá trị khác nhau của f_{14}^* 67
Hình 3.11. Phân bố cường độ điện trường E_z theo chiều dày với các giá trị khác nhau của f_{14}^* 68
Hình 3.12. Phân bố P_z theo chiều dày với các giá trị khác nhau của f_{14}^* 68
Hình 3.13. Phân bố ứng suất pháp σ_x^* theo chiều dày với các giá trị khác nhau của f_{14}^* 69

Hình 3.14. Phân bố ứng suất tiếp τ_{xy}^{*} theo chiều dày với giá trị khác nhau của f_{14}^{*} 69

Hình 3. 15. Bề mặt phân bố của E_z và P_z dọc theo các cạnh *x* và *y*, $z=-\frac{h}{2}$ 72

Hình 3.16. Cường độ điện trường E_z^{*} tại $y = b/2$ và $z=-h/2$ với các điều kiện biên 73

Hình 3.17. Phân cực điện tích P_z^{*} tại tại $y = b/2$ và $z=-h/2$ với các điều kiện biên 73

Hình 3.18. Phụ thuộc của độ võng cực đại vào chiều dày của tấm *h* có và không kể đến hiệu ứng flexoelectric, $f_{14}^{*} = 1$ 76

Hình 3.19. Tỷ số độ võng cực đại R_w phụ thuộc vào chiều dày của tấm, $f_{14}^{*}=1$ 77

Hình 3.20. Tỷ số độ võng cực đại R_w phụ thuộc vào chiều dày *h* của tấm và hệ số f_{14}^{*}, K_w^{*}=10, K_s^{*}=10 77

Hình 4.1. Mô hình tấm có kích thước nano đặt trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tác dụng của tải phân bố thay đổi theo thời gian 80

Hình 4.2. Mô hình tải trọng biến đổi theo thời gian 83

Hình 4.3. So sánh chuyển vị của điểm giữa tấm biến đổi theo thời gian 83

Hình 4.4. Sự phụ thuộc của k_{ω} vào giá trị f_{14}^{*}, SSSS, K_w^{*}= 10, K_s^{*}=2 85

Hình 4.5. Phụ thuộc của k_{ω} ứng với tần số cơ bản đầu tiên ω_1^{*} vào hệ số f_{14}^{*} và điều kiện liên kết, K_w^{*}= 10, K_s^{*}=2 88

Hình 4.6. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, SSSS 89

Hình 4.7. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CCCC 89

Hình 4.8. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CCSS 90

Hình 4.9. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CSCS 90
Hình 4.10. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CFCF 91
Hình 4.11. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CFFF 91
Hình 4.12. Đáp ứng chuyển vị w* với thời gian và hệ số f_{14}^{*}, $t^{*} = t/t_1$, $\omega = \pi$ ..93
Hình 4.13. Đáp ứng ứng suất σ_x^* và τ_{xz}^* với thời gian và hệ số f_{14}^*, $\omega = \pi$ 94
Hình 4.14. Đáp ứng chuyển vị w* với thời gian và tỷ lệ a/h, $\omega = \pi$ 95
Hình 4.15. Đáp ứng ứng suất σ_x^* và τ_{xz}^* với thời gian và tỷ lệ a/h, $\omega = \pi$ 96
Hình 4.16. Đáp ứng chuyển vị w* với thời gian và nền đàn hồi, $\omega = \pi$ 97
Hình 4.17. Đáp ứng ứng suất σ_x^* và τ_{xz}^* với thời gian và nền đàn hồi, $\omega = \pi$ ...98
Hình 4.18. Đáp ứng chuyển vị w* theo thời gian trong trường hợp không cản, tần số ngoại lực bằng tần số dao động cơ bản đầu tiên của tấm ($\omega = \omega_1 t_1$) 100
Hình 4.19. Đáp ứng chuyển vị w* theo thời gian trong trường hợp có xét đến cản, tần số của ngoại lực bằng tần số dao động cơ bản đầu tiên của tấm ($\omega = \omega_1 t_1$)...101

MỞ ĐẦU

Khoa học vật liệu là một ngành đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực, đồng thời là một nhân tố trọng yếu trong thiết kế chế tạo các kết cấu, cấu kiện của các thiết bị hàng không vũ trụ, công nghiệp ô tô, chế tạo máy, quân sự, điện tử viễn thông v.v. Trải qua ba cuộc cách mạng công nghiệp trong lịch sử nhân loại, có thể thấy rằng ngành vật liệu là một nhân tố quan trọng nhất trong từng giai đoạn phát triển đó. Lý do là để tạo ra bất kỳ thiết bị hoặc sản phẩm nào, chúng ta đều cần có vật liệu phù hợp. Khoa học vật liệu cho chúng ta biết sản phẩm được làm từ chất liệu gì và tại sao chúng lại hoạt động như vậy. Kỹ thuật vật liệu cung cấp cách áp dụng kiến thức đó để chế tạo ra những sản phẩm tốt hơn.

Ngày nay, thế giới đang trải qua thời kỳ của cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ IV, ngành khoa học vật liệu vẫn thể hiện vai trò là một ngành quan trọng và quyết định trong các cuộc cạnh tranh toàn cầu ở mọi lĩnh vực, đặc biệt các lĩnh vực điện tử như bán dẫn, chíp vi xử lý, cảm biến được sử dụng nhiều trong các thiết bị từ công nghiệp đến đời sống xã hội. Chính vì vậy, vật liệu có kích thước nano với các hiệu ứng đặc biệt rất được nhiều chuyên gia trên thế giới quan tâm nghiên cứu và phát triển. Một trong số các hiệu ứng đó là flexoelectric trong vật liệu điện môi. Được phát hiện ra từ thập niên 50 của thế kỷ trước, nhưng cho đến đầu những năm 2000 khi ngành khoa học vật liệu và các ngành khác phát triển mạnh, hiệu ứng này mới được quan tâm nghiên cứu sâu sắc. Trong những năm gần đây, vật liệu có hiệu ứng flexoelectric càng hứa hẹn được ứng dụng hiệu quả hơn nữa trong các lĩnh vực hiện đại. Do tầm quan trọng của vật liệu bán dẫn, vấn đề nghiên cứu đối với loại vật liệu này nói chung và phân tích tương tác điện-cơ của kết cấu có kích thước nano có hiệu ứng flexoelectric ngày càng được các chuyên gia quan tâm, nghiên cứu, và phát triển. Trong nước, gần đây nhất, Bộ Kế hoạch và Đầu tư tổ chức sự kiện "Hội nghị cấp cao về Công nghiệp bán dẫn Việt Nam" để thảo luận các chủ đề như hiện trạng và tiềm năng phát triển ngành công nghiệp bán dẫn, nguồn nhân lực, từ đó hướng tới sự phát triển mạnh mẽ của ngành này. Các diễn đàn tương tự cũng được tổ chức bởi Bộ Khoa học và Công nghệ cũng như Bộ GD&ĐT để tìm kiếm cơ hội và phát triển ngành công nghiệp bán dẫn tại Việt Nam. Chính vì vậy, nghiên cứu sinh lựa chọn đề tài luận án với tiêu đề: "***Phân tích tĩnh và động của tấm nano trên nền đàn hồi có xét đến hiệu ứng flexoelectric***" là vấn đề thực tiễn, mang ý nghĩa khoa học và có tính thời sự.

+ Mục đích của đề tài luận án: Dùng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) và lý thuyết cải tiến hàm hypebol về biến dạng cắt để xây dựng phương trình vi phân dao động của kết cấu tấm kích thước nano tựa trên nền đàn hồi có kể đến hiệu ứng flexoelectric. Từ đó tìm ra tương tác cơ-điện của kết cấu tấm có kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric.

+ Nhiệm vụ nghiên cứu: Tổng quan về hiệu ứng flexoelectric, ứng dụng của vật liệu có hiệu ứng flexoelectric và những thành tựu nghiên cứu về tương tác cơ học đã đạt được đối với các kết cấu có tính đến hiệu ứng này. Thiết lập các phương trình cơ bản của kết cấu tấm kích thước nano trên nền đàn hồi có xét đến tương tác cơ-điện của hiệu ứng flexoelectric dựa trên cơ sở của lý thuyết biến dạng cắt cải tiến dạng hàm hypebol. Thiết lập lưu đồ thuật toán PTHH, bộ chương trình để phân tích tĩnh và động; khảo sát đáp ứng tĩnh và động của tấm kích thước nano tựa trên nền đàn hồi có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric để tìm ra tương tác cơ-điện của kết cấu.

+ Đối tượng nghiên cứu: Tấm có kích thước nano kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric đặt trên nền đàn hồi hai hệ số với các điều kiện biên khác nhau. Tải trọng tác dụng lên tấm có kích thước nano là tải trọng tĩnh và tải trọng thay đổi theo thời gian.

+ Phạm vi nghiên cứu: Nghiên cứu tương tác cơ-điện của tấm có kích thước nano chịu tải trọng tĩnh, động kể đến hiệu ứng flexoelectric bằng phương pháp PTHH và lý thuyết biến dạng cắt cải tiến hàm hypebol (hyperbolic sine function) và chưa kể đến hiệu ứng kích thước nhỏ. Luận án bao gồm 03 bài toán chính: Bài toán uốn tĩnh, dao động tự do và cưỡng bức.

+ Phương pháp nghiên cứu: Phương pháp PTHH dựa trên lý thuyết biến dạng cắt cải tiến sử dụng hàm hypebol và nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu để xây dựng các phương trình cơ bản của bài toán uốn tĩnh, dao động tự do và cưỡng bức của kết cấu tấm kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric.

+ Bố cục của đề tài luận án: Gồm mở đầu, 04 chương, kết luận và kiến nghị, và tài liệu tham khảo.

Mở đầu: Đưa ra tính cấp thiết và cấu trúc của luận án.

Chương 1: Tổng quan về vấn đề nghiên cứu.

Chương 2: Các phương trình cơ bản của bài toán tĩnh và động lực học tấm kích thước nano trên nền đàn hồi có xét đến hiệu ứng flexoelectric.

Chương 3: Nghiên cứu đáp ứng tĩnh của tấm kích thước nano trên nền đàn hồI có xét đến hiệu ứng flexoelectric.

Chương 4: Nghiên cứu đáp ứng động lực học của tấm kích thước nano đặt trên nền đàn hồi có xét đến hiệu ứng flexoelectric.

Kết luận và kiến nghị

Tóm tắt các kết quả chính, đóng góp mới của luận án và đề xuất các hướng nghiên cứu tiếp theo của luận án.

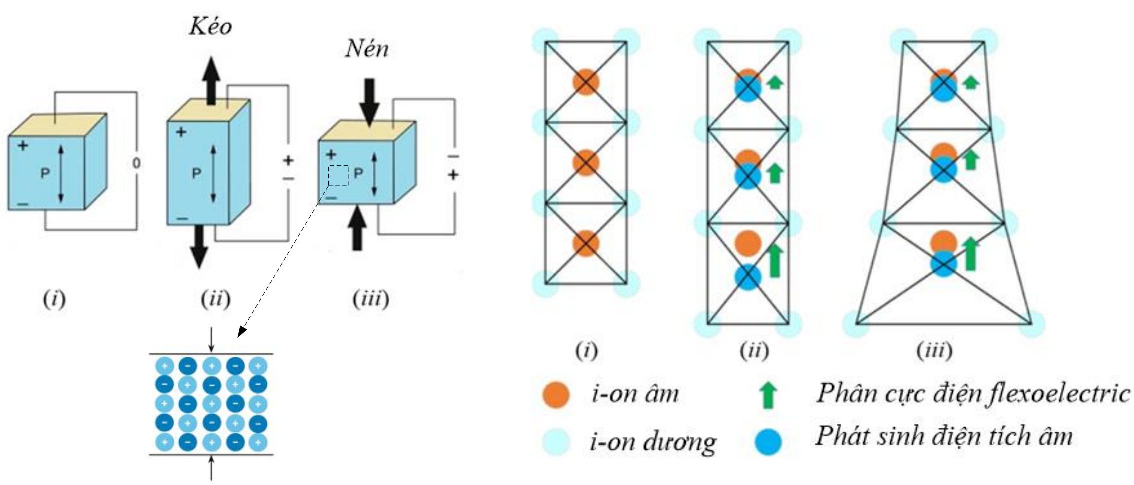
Tài liệu tham khảo

Chương 1. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

1.1. Tổng quan về hiệu ứng flexoelectric

1.1.1. Hiệu ứng flexoelectric

Hiệu ứng flexoelectric (tên tiếng Anh đầy đủ là "flexoelectric effect" hay "flexoelectricity") là hiện tượng phân cực điện đối với biến thiên biến dạng cơ học. Đây có thể được xem như là hiệu ứng bậc cao đối với áp điện, và là sự phân cực đối với biến dạng của chính nó. Tuy nhiên, ở kích thước nano, khi các biến thiên biến dạng được sinh ra, hiệu ứng flexoelectric sẽ thể hiện rõ rệt. Không giống như hiệu ứng áp điện (piezoelectric) mô tả sự phân cực xảy ra tại mọi điểm có biến dạng, hiệu ứng flexoelectric mô tả sự phân cực chỉ xảy ra tại một số vị trí dọc theo biến thiên biến dạng do sự biến dạng không đồng nhất phá vỡ cấu trúc đối xứng tâm của mạng tinh thể [1]. Sự khác biệt giữa hiệu ứng piezoelectric và flexoelectric được thể hiện trực quan trên Hình 1.1.



a) Hiệu ứng piezoelectric do biến dạng đều

b) Hiệu ứng flexoelectric do biến thiên biến dạng

Hình 1.1. Mô tả khác biệt giữa hiệu ứng piezoelectric và flexoelectric [2]

Phương trình mô tả sự phân cực điện xảy ra trong chất điện môi do biến dạng và biến thiên biến dạng như sau [3]:

$$P_i = e_{ijk}\varepsilon_{ik} + f_{ijkl}\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_l} \quad (1.1)$$

trong đó thành phần đầu tiên biểu thị tác động của áp điện trực tiếp, thành phần thứ hai mô tả sự phân cực điện do biến thiên biến dạng. Vì vậy, hệ số flexoelectric, được biểu thị bằng f_{ijkl}, là một tenxơ phân cực bậc bốn và hệ số biểu thị tác động áp điện trực tiếp được biểu thị bằng e_{ijk}. Hai hệ số này thay đổi theo đặc trưng cơ học của vật liệu cụ thể.

Hiện nay, vai trò của hiệu ứng flexoelectric trong vật lý của chất điện môi và bán dẫn đã được cộng đồng khoa học công nhận và có triển vọng cho các ứng dụng thực tế. Do những đặc điểm đó, hiệu ứng này đã tạo sự quan tâm ngày càng lớn của các chuyên gia và nhà khoa học trong thập kỷ qua. Phần tổng quan của luận án trình bày một phân tích về hiệu ứng flexoelectric trong chất rắn thông thường, không bao gồm các vật liệu hữu cơ và tinh thể lỏng.

1.1.2. Nguồn gốc hiệu ứng flexoelectric

Hiệu ứng flexoelectric bắt nguồn từ chữ "flexus" trong tiếng Latinh có nghĩa là "uốn cong" và có liên quan đến biến thiên biến dạng phát sinh tự nhiên trong các tấm bị uốn cong. Hiện nay, các thuật ngữ "flexoelectric effect", "flexoelectric" và "flexoelectricity" được sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực vật lý vật chất ngưng tụ và trong chất rắn thông thường [4]. Mặc dù sự tồn tại của hiệu ứng flexoelectric trong chất rắn đã được phát hiện vào những năm 1950, có rất ít sự chú ý đến hiệu ứng này cho đến cuối thế kỷ XX. Thứ nhất, chủ yếu vì hiệu ứng flexoelectric được cho là không có ảnh hưởng lên tương tác cơ học của kết cấu có kích thước thông thường. Tuy nhiên, vào đầu thế kỷ XXI, các nghiên cứu thực nghiệm bài bản đầu tiên về hiệu ứng flexoelectric trong gốm cho thấy phản ứng có thể mạnh hơn vài lần với các kết quả tính toán dựa trên các ước tính lý thuyết [1]. Thứ hai, phù hợp với xu hướng thu nhỏ trong thiết bị điện tử, khi kích thước của kết cấu và cấu kiện giảm đến cỡ micro mét và nano mét thì biến thiên biến dạng tăng lên, lúc đó hiệu ứng flexoelectric sẽ có ảnh hưởng rõ rệt.

Như đã trình bày ở trên, xu hướng đã thay đổi rất nhiều kể từ giữa những năm 2000, khi khoa học vật liệu phát triển mạnh đến mức các nhà khoa học đã tìm ra nhiều hệ số có liên quan đến hiệu ứng flexoelectric của các vật liệu có hệ số điện dung cao. Thêm nữa, kết cấu kích thước cỡ nano mét ngày càng được sử dụng phổ biến trong các ngành kỹ thuật cao như điện tử và công nghệ sinh học.

1.1.3. Quá trình hoàn thiện của các lý thuyết về hiệu ứng flexoelectric

Trong chất rắn, hiệu ứng flexoelectric lần đầu tiên được xác định về mặt lý thuyết bởi Mashkevich và Tolpygo [5,6] dựa trên những nghiên cứu của họ về động lực học mạng tinh thể. Sau đó, Kogan [7] vào năm 1964 đã mô tả và chứng minh hiệu ứng này khi ghép điện tử-phonon trong tinh thể trung tâm, nơi mà cặp flexoelectric đóng một vai trò quan trọng.

Năm 1965, hình ảnh của kính hiển vi về hiệu ứng flexoelectric đã được Harris đề cập đến [8]. Năm 1968, Mindlin đã mô tả hiệu ứng này [9]. Các phép tính vi mô đầu tiên về các hệ số kiểm soát hiệu ứng flexoelectric được tiến hành bởi Askar và đồng nghiệp [10] vào năm 1970 cho một số tinh thể đơn giản.

Các phương pháp tổng hợp, xử lý lý thuyết có hệ thống về hiệu ứng flexoelectric ở vật liệu điện môi thể rắn xuất hiện vào những năm 1980, được đề xuất bởi công thức của Tagantsev về các mô tả hiện tượng học và hình ảnh kính hiển vi [11]. Tagantsev đã phân biệt hiệu ứng flexoelectric với hiệu ứng áp điện, xác định bốn đóng góp khác nhau đối với phản ứng flexoelectric và gợi ý tầm quan trọng của hiệu ứng flexoelectric ở kích thước nano, đặc biệt là trong các vật liệu điện môi.

Tình hình đã thay đổi khi hàng loạt thí nghiệm do Ma và Cross [12–14] dẫn đầu đã chỉ ra hiệu ứng flexoelectric có kết quả bất ngờ trong nhiều loại gốm vào đầu những năm 2000. Kể từ đó, những phát hiện thực nghiệm này đã thúc đẩy các chuyên gia nghiên cứu bằng lý thuyết về hiệu ứng flexoelectric, đặc biệt là ảnh hưởng của hiệu ứng này đến ứng xử cơ học của các kết cấu và cấu kiện có kích thước nano mét được tích hợp trong thiết bị điện tử hiện đại.

Để mô tả quá trình hình thành và phát triển của các học thuyết liên quan đến hiệu ứng flexoelectric, tác giả minh họa các mốc quan trọng như sau:

- Trước những năm 1980: Mashkevich & Tolpygo (1957, 1963) là những người đầu tiên phát hiện ra hiệu ứng [5]. Kogan (1964) [7] là người đầu tiên đưa ra lý thuyết về hiệu ứng. Harris 1965 mô tả hiển vi đầu tiên về hiệu ứng. Mindlin (1972) đưa ra lý thuyết liên tục và mạng tinh thể của cặp biến thiên biến dạng phân cực (hiệu ứng flexoelectric ngược) [9].

Askar và cộng sự (1970) đưa ra lý thuyết mạng và mô hình vỏ của cặp biến thiên biến dạng phân cực. Bursian và cộng sự (1968, 1969, 1974) đề xuất lý thuyết hiệu ứng flexoelectric đầu tiên cho chất sắt từ (ferroelectric materials).

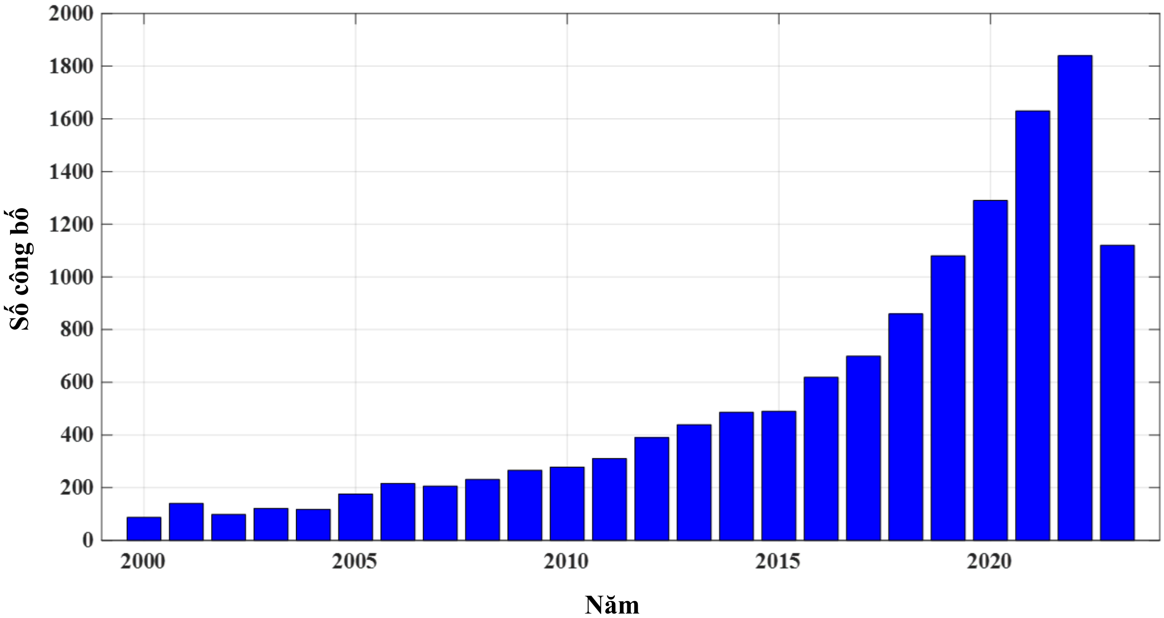
- Từ 1981 – 2000: Indenbom và cộng sự (1981) là những người đầu tiên đặt tên cho hiệu ứng flexoelectric trong chất rắn [15]. Tagantsev (1985, 1986) đồng thời đưa ra lý thuyết hiệu ứng tổng quát cho chất điện môi và trình bày mô hình ion dưới kính hiển vi [11,16]. Sahin & Dost (1988) đưa ra lý thuyết liên tục đầu tiên bao gồm hiệu ứng flexoelectric trực tiếp, gián tiếp và độ đàn hồi biến thiên biến dạng [17]. Marvan và cộng sự (1986, 1991, 1997, 2004) đưa ra mô hình chuỗi tuyến tính cho vật liệu đàn hồi [18–20].

- Từ 2001– 2010: Majdoub, Sharma, Cagin (2008) [16] giới thiệu mô hình dạng nguyên tử đầu tiên và tính toán các hệ số của hiệu ứng flexoelectric. Eliseev và cộng sự (2009) [21], Morozovska và cộng sự [22] năm 2011 đưa ra lý thuyết Landau-Ginzburg-Devonshire (LGD) tổng quát cho các hiệu ứng kiểu flexoelectric. Shen & Hu (2010) trình bày hiệu ứng bề mặt [23].

- Từ 2010 – nay: Hong & Vanderbilt (2011, 2013) đưa ra nguyên tắc thống nhất của hiệu ứng flexoelectric dựa trên lý thuyết hàm mật độ [24–26]. Stengel (2013, 2014, 2015, 2016) đưa ra lý thuyết nguyên tắc tổng quát hóa lý thuyết thế năng biến dạng và biến thiên biến dạng [27–29]. Dreyer, Stengel, Vanderbilt (2018) đề xuất sơ đồ thực tế để tính toán lực tensor ứng suất do hiệu ứng flexoelectric [28].

Hadjesfandiari (2013) trình bày lý thuyết cặp ứng suất đối xứng [30]. Chen và cộng sự (2014) [31], Gu và cộng sự (2014) [32], Ahluwalia và nhóm nghiên cứu (2014) [33] đưa ra mô hình trường pha đầu tiên của hiệu ứng flexoelectric. Abdollahi và cộng sự (2014) [34] đưa ra mô hình PTHH đầu tiên của hiệu ứng flexoelectric trong chất rắn.

Trên Hình 1.2 mô tả xu hướng quan tâm của các nhà khoa học trên thế giới dựa trên dữ liệu từ Google Scholar cho các công bố liên quan đến từ khóa "flexoelectric" trong 22 năm gần nhất.



Hình 1.2. Công bố liên quan đến "flexoelectric" trong 22 năm gần nhất

1.1.4. Các phương pháp đo hệ số flexoelectric

Hiệu ứng flexoelectric về cơ bản tồn tại trong tất cả các chất điện môi, tuy nhiên các nghiên cứu về hệ số flexoelectric trong các vật liệu cụ thể vẫn còn hạn chế. Lý do là:

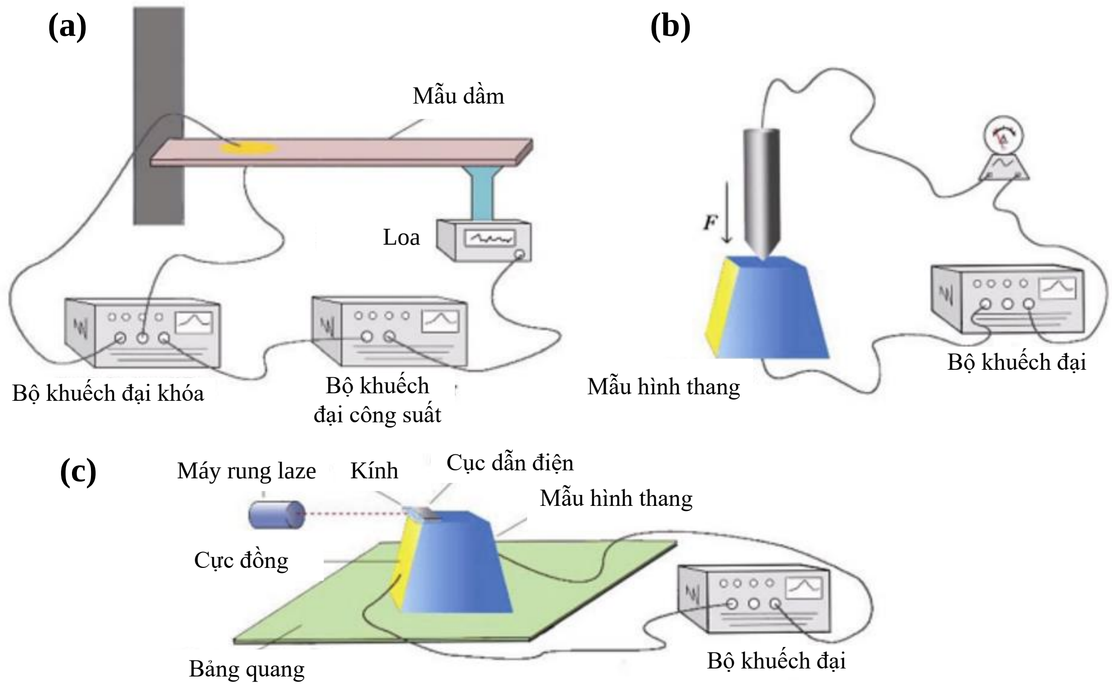
- Một là trong hầu hết các chất điện môi, giá trị điển hình của hệ số flexoelectric rất nhỏ, chỉ nằm trong khoảng 0,01-1 nC/m. Giá trị đặc trưng này thường được coi là hệ số flexoelectric nội tại. Năm 1986, Tagantsev đề xuất rằng hệ số flexoelectric trong vật liệu nói chung có thể so sánh với giá trị e/a của chúng [11,16], trong đó e là điện tích electron và a là tham số mạng tinh thể. Giá trị lý thuyết này phù hợp với các tính toán cơ bản đầu tiên được phát triển gần đây bởi Maranganti và Sharma [35]; Hong & Vanderbilt [24,25] trong một số chất bán dẫn và chất dẫn điện. Cần lưu ý rằng đơn vị C/m hoàn toàn khác với đơn vị của hệ số áp điện (C/N). Do đó, không phù hợp để so sánh trực tiếp giữa hệ số flexoelectric và áp điện chỉ bằng cách sử dụng giá trị các hệ số này. Các nghiên cứu gần đây của Abdollahi và cộng sự [36] cho rằng 1 pC/N của hệ số áp điện có thể so sánh với 103 nC/m của hệ số flexoelectric. Dựa trên kết quả này, có thể kết luận rằng cặp flexoelectric trong hầu hết chất điện môi yếu hơn nhiều so với cặp áp điện.

- Hai là biến thiên biến dạng thường dẫn đến các thành phần ứng suất rất phức tạp của hệ số flexoelectric và làm cho phép đo trở nên rất khó khăn. Theo các nghiên cứu ban đầu của Lê Quang và He [37] và Shu cùng cộng sự [38], trong vật liệu có đối xứng ba chiều, các thành phần có thể của hệ số flexoelectric f_{ijkl} có thể lên tới 54.

Do đó, hầu như không thể trích xuất chính xác các thành phần hệ số của hiệu ứng flexoelectric riêng lẻ trong các mạng tinh thể có tính đối xứng thấp. Mặt khác, trong các vật liệu có đối xứng khối (ngoại trừ đối xứng nhóm điểm 23 và *m*3), các thành phần của tensor flexoelectric f_{ijkl} có thể giảm xuống chỉ còn 3, thường được định nghĩa là hệ số flexoelectric ngang, hệ số flexoelectric dọc, và hệ số flexoelectric cắt.

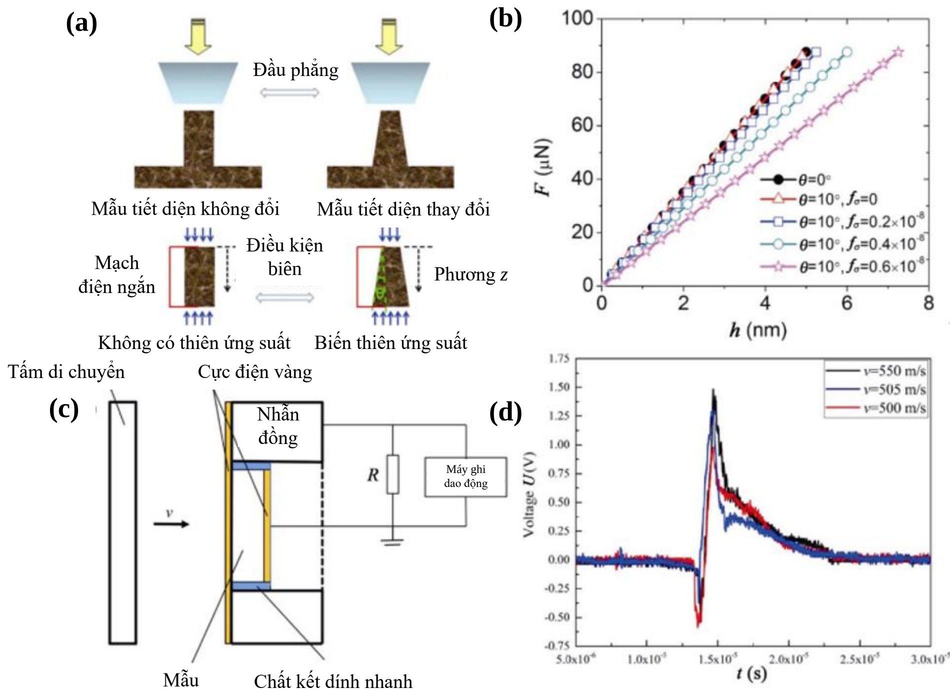
Gần đây, ba phương pháp đo trực tiếp đã được phát minh bằng cách sử dụng dầm công xôn (Hình 1.3a), mặt dưới của hình chóp cụt (Hình 1.3b) và mặt bên của hình chóp cụt kim tự tháp (Hình 1.3c) để đo lần lượt hệ số flexoelectric ngang, hệ số flexoelectric dọc và hệ số flexoelectric cắt.

Cần lưu ý rằng tất cả các thiết lập đo lường trong Hình 1.3 không được tích hợp đầy đủ, và do đó việc xác định tất cả các thành phần hệ số nói trên bị hạn chế rất nhiều [39].



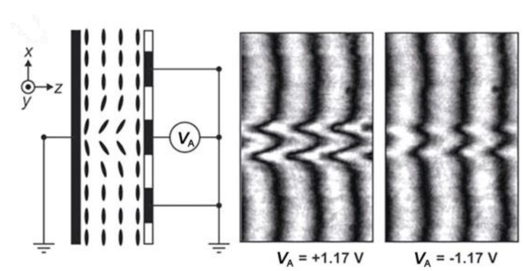
Hình 1.3. Các phương pháp đo hiệu ứng flexoelectric ngang, dọc và cắt [39]

Ngoài các phép đo trực tiếp, một số phép đo gián tiếp của hệ số flexoelectric đã được phát triển gần đây. Zhou và cộng sự [40] nhận thấy rằng hệ số flexoelectric có thể đánh giá một cách gián tiếp bằng việc sử dụng sự biến thiên của độ cứng. Lý do là hệ số flexoelectric sẽ dẫn đến sự suy giảm nhanh chóng độ cứng của một lớp điện môi, đặc biệt là ở kích thước nhỏ. Bằng cách nghiên cứu lực nén nano so với các đường cong dịch chuyển nén nano của các mẫu cột và mẫu nón như thể hiện trong Hình 1.4b, hệ số flexoelectric dọc có thể được chiết xuất thành công. Hu và cộng sự [41] đề xuất một cách đặc biệt để tạo ra biến thiên biến dạng sử dụng sóng xung kích. Trong thí nghiệm của họ, súng bắn khí hydro đã được sử dụng để bắn vào một tấm dịch chuyển (Hình 1.4c). Thông qua phương pháp này, hệ số flexoelectric dọc có thể được tính toán gián tiếp bằng cách nghiên cứu mối liên quan giữa điện áp cảm ứng và sự lan truyền của sóng xung kích, như trong Hình 1.4d.



Hình 1.4. Phương pháp đo gián tiếp hệ số flexoelectric dọc [41]

Hình 1.5 minh họa sơ đồ đo gián tiếp hệ số flexoelectric của tinh thể lỏng. Hệ số flexoelectric được xác định bằng cách đặt một điện trường vào các điện cực được đánh số và sau đó phân tích sự biến dạng gây ra trong các bức ảnh nhận được.



Hình 1.5. Sơ đồ minh họa đo hệ số flexoelectric tinh thể lỏng gián tiếp [39]

Ngày nay, nhờ các thiết bị điện tử hiện đại, các nhà khoa học đã tìm ra hệ số flexoelectric trong rất nhiều chất điện môi khác nhau như: vật liệu điện môi, vật liệu sinh học, tinh thể lỏng, và chất bán dẫn. Bảng 1.1 là giá trị đo thực nghiệm và tính toán hệ số flexoelectric đối với một số vật liệu.

Bảng 1.1. Giá trị thực đo nghiệm và tính toán hệ số flexoelectric đối với một số vật liệu [39]

Vật liệu	f_{1111} (nC/m)		f_{1122} (nC/m)		f_{1212} (nC/m)	
	Thực nghiệm	Tính toán	Thực nghiệm	Tính toán	Thực nghiệm	Tính toán
TiO_2	–	–	2	–	–	–
Polyvinylidene fluoride	–	–	10	–	–	–
$SrTiO_3$	0.2	–0.89	7	+2.3	5.8	–6.6
BT–BZT	–	–	2.5×10^4	–	–	–
$Pb(ZrTi)O_3$	–	–	1×10^3	–	–	–
$Pb_{0.3}Sr_{0.7}TiO_3$	–	–	2×10^4	–	–	–
PMN–PT	–	–	$(2–5)\times10^4$	–	–	–
$PbMg_{1/3}Nb_{2/3}O_3$	$(3–4)\times10^3$	–	–	–	–	–
$BaTiO_3$	5×10^4	–0.36	5×10^4	+1.6	–	–1.5
$(Ba_{1–x}Sr_x)TiO_3$	1.15×10^5	10–20	1×10^5	6–10	–	–
$Ba(Ti_{1–x}Sn_x)O_3$	–	–	4.5×10^4	–	–	–

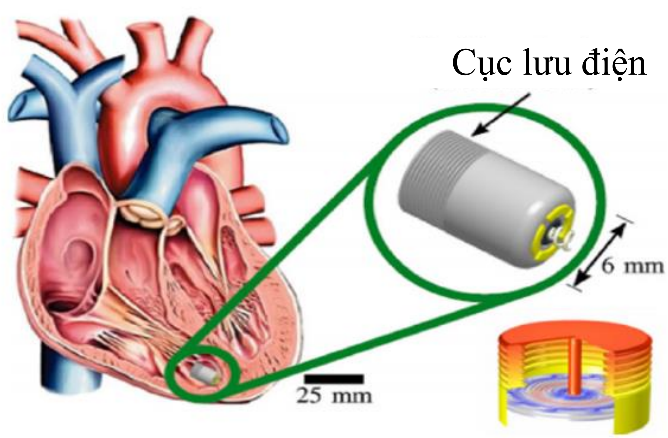
Có thể thấy rằng hệ số flexoelectric trong các chất điện môi và polyme thông thường (TiO_2 và polyvinylidene florua) nằm trong khoảng 1-10 nC/m, tức là phù hợp với các giá trị flexoelectric nội tại.

Nhưng ở một số loại gốm sắt từ và đơn tinh thể, kết quả lại hoàn toàn khác. Tính flexoelectric rất cao đã được tìm thấy trong một loạt vật liệu sắt từ có hằng số điện môi cao như BaTiO3, $(BaSr)TiO_3$, $Ba(TiSn)O_3$, $Pb(ZrTi)O_3$ (PZT) và $PbMg_{1/3}Nb_{2/3}O_3$. Các hệ số flexoelectric đo được của chúng lớn hơn 3-5 lần so với hệ số trong các chất điện môi thông thường như TiO_2.

1.1.5. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric

Với sự phát triển mạnh của các ngành khoa học về vật liệu, điện tử, khoa học máy tính, các nhà khoa học rất quan tâm nghiên cứu để ứng dụng hiệu ứng flexoelectric trong các lĩnh vực nổi bật như sau:

- Ứng dụng chế tạo thiết bị lưu điện cỡ nano mét: Các thiết bị lưu điện này tích trữ điện năng từ dao động cơ học của các hệ cơ học nhờ sự chuyển hóa từ cơ năng (dao động cơ học) thành điện năng.

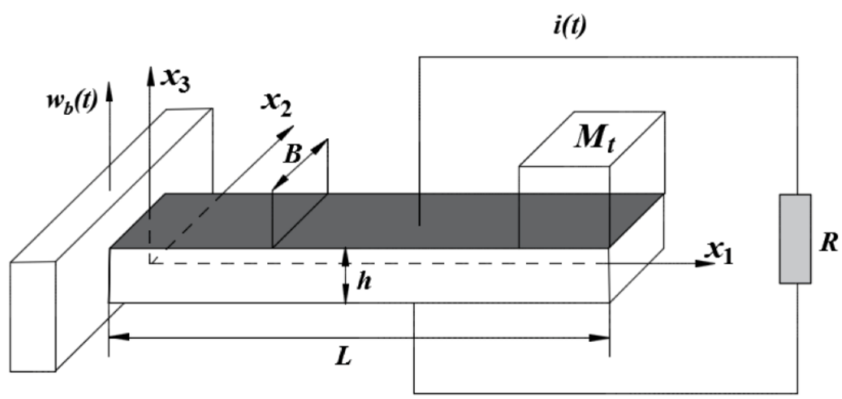


Hình 1.6. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric trong chế tạo thiết bị trợ tim [42]

Hiệu ứng áp điện cộng với hiệu ứng flexoelectric giúp cho các bộ tích điện hoạt động hiệu quả, đặc biệt thích hợp với các thiết bị cần năng lượng nhỏ nhưng lại hoạt động thường xuyên như thiết bị chăm sóc y tế (thiết bị trợ tim),…Các nghiên cứu đã chỉ ra rằng năng lượng chuyển hóa từ cơ năng sang điện năng của các loại vật liệu có hiệu ứng flexoelectric là cao hơn nhiều so với các vật liệu áp điện thông thường.

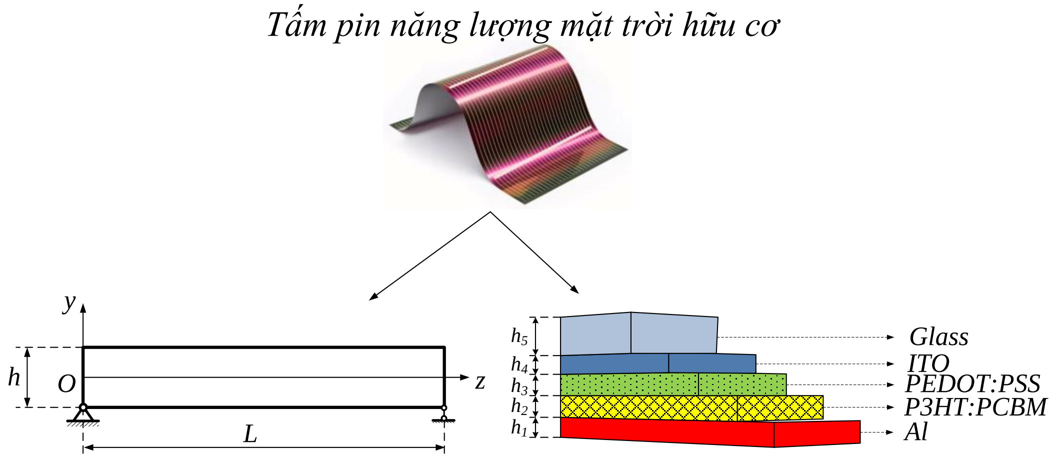
- Ứng dụng chế tạo thiết bị cảm ứng (sensor) và kích thích (actuator):

Do có nhiều ưu điểm hơn hẳn các vật liệu áp điện truyền thống như kích thước nhỏ hơn, không bị giới hạn bởi các vật liệu có cấu tạo tinh thể đối xứng và có thể hoạt động trong môi trường nhiệt độ cao, nên các sensor và actuator làm từ vật liệu flexoelectric được ưu tiên, ví dụ như dùng trong các thiết bị dò vết nứt, thiết bị đo độ cong do biến dạng, v.v.



Hình 1.7. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric trong chế tạo các thiết bị cảm ứng (sensor) và thiết bị kích thích (actuator) [43]

- Ứng dụng chế tạo thiết bị quang năng và pin mặt trời: Đây là xu thế của thời đại khi các nguồn năng lượng tự nhiên và tái tạo sẽ dần thay thế các nguồn năng lượng hóa thạch truyền thống. Do vậy, đây cũng là một trong những ứng dụng quan trọng mà các nhà khoa học trọng tâm nghiên cứu đối với hiệu ứng flexoelectric [39,44].



a) Mô hình tổng thể *b) Mặt cắt ngang*

Hình 1.8. Ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric trong chế tạo thiết bị quang năng và pin mặt trời [39,44]

Ngoài ra, các công trình gần đây chỉ ra rằng hiệu ứng flexoelectric có thể liên hệ với nhiều ứng xử vật lý quan trọng khác, do đó tiềm năng của ứng dụng này trong các ngành kỹ thuật hiện đại ngày càng to lớn.

1.2. Tổng quan về phân tích kết cấu kích thước nano có hiệu ứng flexoelectric

Thập kỷ gần đây, những đột phá về khoa học máy tính và khoa học vật liệu đã tạo nhiều thuận lợi cho các chuyên gia về cơ học trong phân tích tương tác điện-cơ kết cấu kích thước nano mét có hiệu ứng flexoelectric [3].

1.2.1. Bài toán uốn tĩnh và dao động riêng của kết cấu kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric

Đối với kết cấu có kích thước nano dạng dầm: Năm 2015, Liang và đồng nghiệp [45] dùng lời giải chính xác để phân tích ổn định tĩnh và dao động tự do của sợi nano dựa trên lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, trong đó có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt và flexoelectric. Năm 2016, Qi và cộng sự [46] nghiên cứu uốn tĩnh của dầm nano được tạo thành từ lớp điện môi đồng nhất và lớp đàn hồi dựa trên lý thuyết biến thiên biến dạng có kể đến hiệu ứng flexoelectric. Ray [47] sử dụng lời giải giải tích để nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh của dầm nano liên kết tựa đơn có tích hợp lớp flexoelectric được coi như bộ cảm biến phân bố nano, trong đó hiệu ứng flexoelectric thuận và nghịch được tác giả đưa vào phân tích. Yue và nhóm nghiên cứu [48] phát triển mô hình dầm micro Timoshenko cho bài toán uốn tĩnh và dao động tự do có kể đến hiệu ứng bề mặt và flexoelectric. Tadi Beni [49] áp dụng mô hình dầm Euler-Bernoulli kết hợp với hệ số kích thước để nghiên cứu biến dạng phi tuyến của dầm nano làm từ vật liệu có đăng trưng cơ tính biến đổi trong đó tính đến hiệu ứng áp điện và flexoelectric. Năm 2018, Ebnali Samani và cộng sự [50] nghiên cứu đáp ứng tĩnh phi tuyến của dầm nano flexoelectric sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko. Chu và cộng sự [51] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt cải tiến để đưa ra lời giải giải tích cho bài toán phân tích uốn tĩnh và dao động riêng của dầm nano làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Gần đây, Sun và cộng sự [52] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích ứng xử cơ học tĩnh của dầm nano flexoelectric có chiều dày thay đổi. Trong đó, mô hình dầm được tích hợp trong bộ thu năng lượng mặt trời với hai điểm nút và mười bậc tự do mỗi nút được phát triển với hàm dạng Hermitee. Zhang và nhóm nghiên cứu [53] đề xuất mô hình dầm nano flexoelectric với ba lớp tinh thể cho bài toán phân tích dải tần số dao động. Nhóm tác giả sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, lý thuyết Bloch và phương pháp ma trận chuyển để đưa ra lời giải chính xác. Ngoài ra, chúng ta có thể tìm thấy rất nhiều nghiên cứu về dầm nano flexoelectric trong các công bố gần đây với xu hướng áp dụng cho các thiết bị thu năng lượng mặt trời và điện tử.

Về các kết cấu có kích thước nano dạng tấm: Yan [54] sử dụng lý thuyết tấm cổ điển để nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh và dao động riêng của tấm nano áp điện có kể đến hiệu ứng flexoelectric dựa trên lời giải chính xác. Tiếp đó, Yang và cộng sự [55] đã công bố lời giải chính xác để phân tích đáp ứng uốn tĩnh và dao động riêng của tấm nano, trong đó lý thuyết tính toán có tính đến tác động của hiện tượng áp điện và flexoelectric. Đồng thời, tác giả cũng dựa trên lý thuyết Kirchoff-Love cho kết cấu tấm để trình bày lời giải dạng giải tích. Li và đồng nghiệp [56] nghiên cứu bài toán uốn tĩnh và dao động riêng của tấm tròn có kích thước micro trên giả thiết của lý thuyết tấm mỏng. Lời giải giải tích được đưa ra và các kết quả chỉ ra tác động đáng kể của hiệu ứng flexoelectric đến đáp ứng cơ học của tấm. Tiếp nối các thành công trước đó, Wang và cộng sự [57] sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để nghiên cứu đáp ứng tĩnh của tấm nano ngàm một cạnh có tính đến tác động của flexoelectric. Nhóm tác giả [58] sử dụng lý thuyết Kirchoff-Love kết hợp với lời giải chính xác để chỉ ra ảnh hưởng rất đáng kể của cả hiệu ứng áp điện và flexoelectric lên tương tác cơ học của tấm nano. Gần đây, Wang và Li [59] sử dụng lý thuyết tấm cổ điển để phân tích uốn tĩnh và dao động riêng của tấm nano với hiệu ứng flexoelectric. Giannakopoulos và Rosakis [60] phân tích đáp ứng cơ học của tấm nano với hiệu ứng flexoelectric động, trong đó biến thiên của biến dạng và biến thiên điện tích được kể đến. Tiếp đó, mô hình tấm nano flexoelectric tròn cũng được nhóm tác giả phát triển cho bài toán nghiên cứu đáp ứng cơ-điện [61]. Soleimani-Javid và nhóm nghiên cứu [62] sử dụng lý thuyết tấm Kirchoff-Love để phân tích đặc điểm dao động của tấm nano sandwich lõi tổ ong, trong đó, hiệu ứng flexoelectric được đưa vào tính toán. Ebrahimi1 và Barati [63] nghiên cứu ổn định tấm nano tính đến hiệu ứng flexoelectric dựa trên lời giải chính xác và lý thuyết tấm Kirchhoff. Tấm được đặt trên nền đàn hồi với hai hệ số và ảnh hưởng của ứng suất bề mặt cũng được xem xét trong tính toán của họ. Amin và đồng nghiệp [64] dùng lý thuyết tấm truyền thống và hiệu ứng flexoelectric để thiết lập lời giải chính xác cho phân tích phi tuyến dao động riêng của tấm nano làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên kể đến hiệu ứng flexoelectric. Amir và nhóm nghiên cứu [65] trình bày bài toán dao động riêng của tấm sandwich có kể đến hiệu ứng flexoelectric, trong đó, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp Navier được kết hợp để nghiên cứu dao động riêng của tấm. Ghobadi và cộng sự [66] khảo sát đáp ứng dao động riêng phi tuyến của tấm nano có hiệu ứng flexoelectric, lời giải giải tích được đưa ra dựa trên lý thuyết tấm Kirchhoff-Love để tìm ra biểu thức biểu diễn trường chuyển vị và trường điện từ của tấm nano dưới tác dụng của tải cơ nhiệt-điện-từ đồng thời. Trên cơ sở các kết quả đã đạt được, Ghobadi và nhóm nghiên cứu [67] đã phân tích đáp ứng tĩnh của tấm nano làm từ vật liệu có đặc trưng cơ học biến đổi kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ, điện trường và hiệu ứng flexoelectric. Trong các công trình đó, tác giả sử dụng lý thuyết tấm Kirchoff-Love để thiết lập các công thức PTHH. Nhiều công trình về phân tích đáp ứng tĩnh và dao động tự do của kết cấu nano flexoelectric có thể tìm thấy trên các nền tảng học thuật.

Gần đây nhất, với xu hướng phát triển xanh, các kết cấu tấm nano flexoelectric bắt đầu được sử dụng nhiều trong các thiết bị thu năng lượng mặt trời. Do vậy, các nhà khoa học cũng rất quan tâm nghiên cứu áp dụng trong lĩnh vực này. Năm 2021, trong công trình nghiên cứu của Kim và cộng sự [68], nhóm tác giả đã chứng minh các đặc tính có tác dụng tăng cường của hiệu ứng flexoelectric đến các tấm nano được tích hợp trong các thiết bị thu năng lượng mặt trời. Sun và cộng sự [69] đưa ra mô hình biến dạng-phân cực điện tích cho bài toán phân tích uốn tĩnh của tấm bán dẫn composite hai lớp có kể đến hiệu ứng flexoelectric. Nhóm nghiên cứu của Yoon [70] chứng minh sự đóng góp đáng kể của hiện tượng flexoelectric đối với kết cấu dạng tấm được tích hợp trong các thiết bị tạo ra điện năng kích cỡ nano. Esen và Özmen [71] nghiên cứu dao động nhiệt của tấm nano có lỗ rỗng được làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên dưới tác dụng của tải cơ-nhiệt-điện-từ. Liu và nhóm cộng sự [72] nghiên cứu ứng dụng của hiệu ứng flexoelectric để chứng minh hiện tượng chưa từng có trong xúc tác cho các hạt nano để phân hủy các thuốc nhuộm hữu cơ. Zhang và Luo [73] đề xuất mô hình trường pha để phân tích ứng xử cơ học của kết cấu tấm nano flexoelectric có vết nứt.

Đối với kết cấu dạng vỏ sẽ có nhiều khó khăn hơn về mặt mô hình hóa và tính toán. Khorshidi và đồng nghiệp [74] dùng cách tiếp cận số để mô phỏng và phân tích đặc tính dao động của vỏ nón nano flexoelectric với các lớp áp điện. Ashrafi Dehkordi và cộng sự [75] dựa trên lý thuyết phi cổ điển để đánh giá dao động riêng của vỏ trụ nano flexoelectric làm từ vật liệu có đặc trưng cơ học biến đổi có lỗ rỗng. Asghari Ardalani và cộng sự [76] nghiên cứu sự truyền sóng của vỏ trụ nano flexoelectric với sự tiếp cận bằng phương pháp số. Fattaheian Dehkordi và Tadi Beni [77] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cải tiến và hiệu ứng flexoelectric để nghiên cứu tương tác cơ-điện-từ của vỏ micro và nano. Liu và cộng sự [78] tính toán ổn định phi tuyến của vỏ nano flexoelectric làm từ vật liệu có đặc trưng cơ học thay đổi chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ-nhiệt-điện.

1.2.2. Bài toán động lực học của kết cấu kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric

Với bài toán phân tích dao động cưỡng bức của của các kết cấu nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric thực sự còn hạn chế. Có thể kể đến các công trình tiêu biểu như Farzad và Mohammad [79] sử dụng phương pháp Galerkin để nghiên cứu dao động cưỡng bức của tấm có kể đến hiệu ứng flexoelectric, trong đó, tấm được tựa trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. Rasoul và Yaghoub [80] đã sử dụng phương pháp số để nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến dao động cưỡng bức phi tuyến của dầm nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric trên nền đàn nhớt bằng lý thuyết dầm cổ điển Euler–Bernoulli. Malikan và Eremeyev [81] dùng lý thuyết dầm cổ điển, nhưng dựa trên lời giải chính xác để đánh giá ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric đến tương tác cơ-điện của dầm nano. Shingare và Naskar [82] đã sử dụng lời giải giải tích dựa trên hiệu ứng áp điện tuyến tính, lý thuyết tấm cổ điển và lời giải Navier cải tiến để nghiên cứu đáp ứng tĩnh và động của tấm composite được gia cố bằng graphene hỗn hợp, trong đó hiệu ứng flexoelectric cũng được kể đến.

Sladek và các cộng sự [83] đã sử dụng phương pháp PTHH kết hợp từ công thức biến đổi của các bài toán giá trị biên với hiệu ứng flexoelectric để đánh giá đáp ứng động của kết cấu hai chiều có vết nứt. Gần đây, Babadi và cộng sự [84] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích đáp ứng động lực học của vỏ nano flexoelectric dưới tác dụng của tải trọng cơ-điện. Shayestenia và Ghadiri [85] dùng mô hình dầm Euler–Bernoulli nano flexoelectric và lý thuyết von-Karman cho bài toán nghiên cứu dao động riêng và ổn định động dưới tác dụng của tải trọng kích thích. Fang và nhóm nghiên cứu [86] phân tích dao động tự do và cưỡng bức của tấm nano flexoelectric bán dẫn dưới tác dụng của tải trọng động có xem xét đến trường hợp cộng hưởng. Chen và cộng sự [87] nghiên cứu đáp ứng động của dầm nano áp điện và flexoelectric chịu tác dụng của tải trọng cơ được mô tả bằng hàm Green dưới lời giải giải tích.

1.2.3. Tình hình nghiên cứu trong nước về kết cấu có kích thước nano với hiệu ứng flexoelectric

Tại Việt Nam, có nhiều nghiên cứu tiêu biểu về tính toán tương tác cơ học của kết cấu, cũng như mô hình cơ học có liên quan đến kích thước micro, nano có kể đến các hiệu ứng nhiệt-điện-từ. Nhóm nghiên cứu của giáo sư Nguyễn Xuân Hùng [88–90] đã có công bố liên quan đến các ứng xử cơ học của kết cấu micro và nano bằng cách sử dụng phương pháp phân tích đẳng hình học kết hợp với phần tử hữu hạn. Giáo sư Nguyễn Tiến Khiêm và cộng sự [91–93] nghiên cứu đáp ứng cơ học của các kết cấu dầm có vết nứt với các lớp áp điện chịu tác dụng của tải trọng tĩnh và động. Gần đây, giáo sư Nguyễn Đông Anh [94–96] dùng lý thuyết biến thiên biến dạng phi cục bộ để đánh giá dao động và dao động ngẫu nhiên của dầm, ống có kích thước nano dưới tác dụng của tải trọng điện-từ. Giáo sư Nguyễn Thái Chung và cộng sự [97] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt cải tiến với bốn ẩn số để phân tích động lực học khi chịu tải trọng nổ của tấm composite được làm từ vật liệu có đặc trưng cơ học biến đổi gia cố bằng các ống nano carbon. Một số công trình về kết cấu áp điện cũng được nhóm nghiên cứu thực hiện [98,99]. Giáo sư Nguyễn Đình Đức và cộng sự [100] nghiên cứu đáp ứng động phi tuyến và dao động của các tấm pin năng lượng mặt trời hữu cơ nhiều lớp chịu tải cơ học và nhiệt. Trong đó, bảng năng lượng mặt trời hữu cơ năm lớp nanocomposite được sản xuất bởi các vật liệu Al, P3HT-PCBM-PEDOT-PSS, Thủy tinh và Graphene. Ngoài ra, nhóm nghiên cứu của giáo sư Đức còn có nhiều bài báo nghiên cứu về tương tác cơ học của các kết cấu có kích thước micro và nano [101,102]. Giáo sư Trần Ích Thịnh và đồng nghiệp [103] sử dụng phương pháp chồng chất và lý thuyết Biot để đưa ra lời giải dạng giải tích cho bài toán phân tích dao động âm của tấm composite với các lỗ rỗng vi mô. Giáo sư Trần Văn Liên và đồng nghiệp [104] phân tích dao động tự do của tấm nano với chiều dày nhảy bậc sử dụng mô hình độ cứng động phi cục bộ. Giáo sư Nguyễn Đình Kiên và cộng sự [105] nghiên cứu dao động riêng của dầm sandwich được gia cố bởi các ống nano sợi dưới tác dụng của tải trọng tập trung di động. Nhóm nghiên cứu của giáo sư Trần Minh Tú dùng lý thuyết biến dạng cắt cải tiến cho tấm với bốn ẩn số để phân tích uốn tĩnh của tấm composite gia cường bằng sợi nano [106]. Tiếp đó, nhóm cũng thực hiện một nghiên cứu về điều khiển dao động chủ động cho kết cấu vỏ trụ gia cường bằng sợi nano [107].

Đối với luận án Tiến sĩ trong nước liên quan đến phân tích tương tác cơ học của kết cấu có kích thước micro và nano, năm 2010, Vũ [108] đánh giá hiệu ứng của chất gia cường hữu cơ có cấu trúc nano và tính chất của một số vật liệu polyme phân cực điện tích. Năm 2012, Mai [109] chế tạo vật liệu composite chứa hạt áp điện có kích thước nano và đánh giá sự biến đổi tính chất cơ-nhiệt trong môi trường khí hậu nhiệt đới. Gần đây nhất, năm 2022, Thành [110] phân tích ổn định và tương tác phi tuyến kết cấu tấm và vỏ composite gia cường bởi sợi nano carbon, có đặc trưng cơ học thay đổi (FG-CNTRC). Năm 2023, Bình [111] tiến hành tích tĩnh và động lực học của tấm nano bằng vật liệu xốp cơ tính biến thiên sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Về ứng xử cơ học của kết cấu kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric, theo nghiên cứu của tác giả, hiện tại trong nước chưa có nhiều công bố liên quan đến hiệu ứng này.

1.3. Kết quả đạt được từ các công trình đã công bố và vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Qua các nghiên cứu đã được công bố, có thể tóm tắt kết quả đã đạt được liên quan đến kết cấu kích thước nano mét có xét tới hiệu ứng flexoelectric như sau:

- Những nghiên cứu đáp ứng dao động riêng, uốn tĩnh của kết cấu kích thước nano mét có xét tới ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric, sử dụng lời giải giải tích là chủ yếu. Các công trình đã có thường sử dụng lý thuyết cổ điển, điều này làm thuận lợi cho tính toán nhưng không thể mô tả chính xác hết tương tác cơ-điện của các kết cấu này. Nguyên nhân một phần do khó khăn trong phương pháp tiếp cận.

- Phân tích dao động cưỡng bức của kết cấu kích thước nano mét có xét tới hiệu ứng flexoelectric đã được đề cập đến nhưng các kết quả đã công bố còn khá khiêm tốn.

Trên cơ sở đó, nghiên cứu sinh đưa ra một số chủ đề quan trọng cần được các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu đối với kết cấu có kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric như sau:

- Phân tích đáp ứng tĩnh và động của các kết cấu kích thước nano có xét tới tác động của hiệu ứng flexoelectric bằng nhiều lý thuyết biến dạng cắt khác nhau dưới tác dụng của các loại tải trọng tĩnh và động.

- Nghiên cứu đáp ứng tĩnh và động của các kết cấu kích thước nano flexoelectric có tương tác với nền đàn hồi, trong đó nền đàn hồi có các hệ số độ cứng thay đổi.

- Nghiên cứu tương tác cơ-điện của các kết cấu dầm, tấm, vỏ kích thước nano flexoelectric có chiều dày thay đổi theo các quy luật tuyến tính và phi tuyến. Phân tích tương tác cơ-điện của kết cấu nano flexoelectric có vết nứt.

- Nghiên cứu tích hợp kết cấu tấm kích thước nano flexoelectric trong các tấm pin năng lượng mặt trời làm bằng các vật liệu hữu cơ thân thiện với môi trường. Nghiên cứu nâng cao hiệu năng của các tấm bán dẫn nano nhờ tương tác cơ điện thông qua hiệu ứng flexoelectric.

1.4. Nhiệm vụ của luận án

Trên cơ sở phân tích trên, tác giả xác định nhiệm vụ của luận án như sau:

- Nghiên cứu tổng quan về hiệu ứng flexoelectric, ứng dụng của vật liệu có hiệu ứng flexoelectric và những kết quả nghiên cứu liên quan đến ứng xử cơ học đã đạt được đối với các kết cấu có tính đến hiệu ứng này.

- Xây dựng được quan hệ toán cơ và các phương trình cơ bản của tấm kích thước nano trên nền đàn hồi có kể đến hiện tượng flexoelectric trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt cải tiến và phương pháp phần tử hữu hạn.

- Xây dựng bộ chương trình tính toán trong môi trường MATLAB cho kết cấu tấm kích thước nano trên nền đàn hồi có kể đến hiệu ứng flexoelectric.

- Khảo sát ảnh hưởng của các thông số hình học và vật liệu đến đáp ứng tĩnh và động của kết cấu kích thước nano có kể đến hiện tượng flexoelectric.

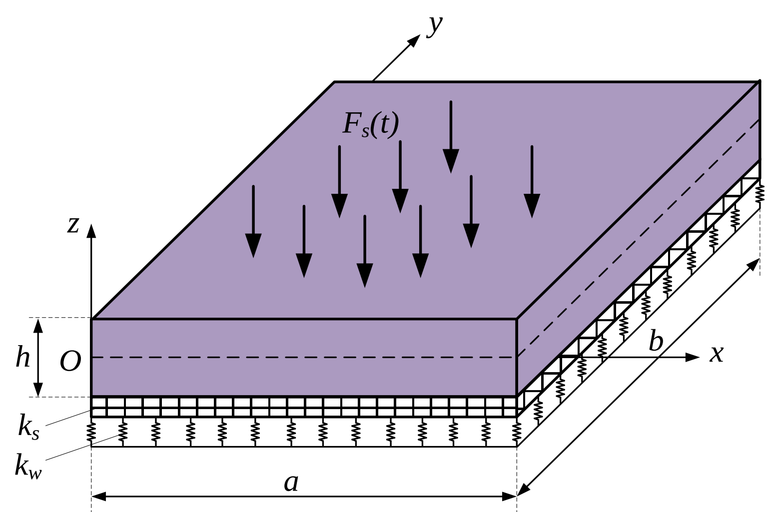
1.5. Kết luận chương 1

Trong chương này, nghiên cứu sinh đã tổng quan các nội dung cơ bản về hiệu ứng flexoelectric. Chương 1 cũng thực hiện phân tích tóm tắt về tương tác cơ-điện của kết cấu kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric bao gồm các bài toán về phân tích tĩnh, dao động riêng và cưỡng bức cho kết cấu dầm, tấm, vỏ kích thước nano flexoelectric của các nhà cơ học trong và ngoài nước. Từ đó, đưa ra những nội dung còn chưa được quan tâm và công bố để làm cơ sở cho việc chọn lựa đề tài và xác định nhiệm vụ của luận án. Nội dung của chương này được thể hiện trong công trình số 5 tại danh mục công bố của tác giả.

Chương 2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN TĨNH VÀ ĐỘNG LỰC HỌC TẤM KÍCH THƯỚC NANO TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC

2.1. Mô hình bài toán và các giả thiết

Khảo sát tấm hình chữ nhật có kích thước nano với các thông số hình học như thể hiện trên Hình 2.1. Tấm đặt trong hệ trục tọa độ Đề-các *Oxyz* và tựa trên nền đàn hồi theo mô hình Winkler-Pasternak với hệ số độ cứng chống uốn và chống trượt tương ứng lần lượt là k_w và k_s. Tấm chịu tải trọng tĩnh hoặc tải trọng động theo phương pháp tuyến.



Hình 2.1. Mô hình tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Để xây dựng các phương trình tương tác cơ-điện của kết cấu tấm kích thước nano, luận án sử dụng các giả thiết như sau:

- Tấm có kích thước cỡ nano mét (nm);

- Chưa xét đến tác động của hiệu ứng kích thước nhỏ. Với kết cấu kích thước nhỏ cỡ micro và nano, việc xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến đáp ứng cơ học của các kết cấu này là cần thiết. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, việc bỏ qua tác động của hiệu ứng kích thước vẫn đảm bảo độ chính xác và được các nhà khoa học chấp nhận [55,58,112–114].

- Trường chuyển vị được tính toán theo hàm hyperbol với $\varepsilon_z = 0$;

- Phạm vi tính toán trong giới hạn đàn hồi;

- Khi dao động, tấm không tách khỏi nền đàn hồi;

- Tính đến biến thiên biến dạng (strain gradient) để xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric;

- Chỉ xét trường hợp mạch hở, chưa kể đến điện áp ngoài.

2.2. Hiệu ứng flexoelectric và các quan hệ cơ học của tấm khi chịu tải trọng tĩnh và động

2.2.1. Chuyển vị

Khi phân tích kết cấu nói chung, có nhiều lý thuyết biến dạng như lý thuyết biến dạng cổ điển, biến dạng bậc nhất và biến dạng cắt bậc cao. Lý thuyết biến dạng cắt cổ điển chỉ phù hợp với các kết cấu thành mỏng vì ảnh hưởng của biến dạng cắt không được tính đến. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất dùng để phân tích kết cấu có chiều dày trung bình. Cách tiếp cận này cần thêm một hệ số hiệu chỉnh cắt vào tính toán. Các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao không yêu cầu hệ số hiệu chỉnh cắt; tuy nhiên, các công tính toán của chúng phức tạp khi so với lý thuyết biến dạng cổ điển và bậc nhất. Do vậy, Shimpi [115] đã phát triển một lý thuyết tấm đơn giản bằng cách chia thành phần dịch chuyển theo phương chiều dày thành các phần uốn và cắt. Lợi ích trong cách tiếp cận của Shimpi là nó có ít biến chưa biết và phương trình linh hoạt hơn so với lý thuyết biến dạng cắt cổ điển, bậc nhất, bậc cao, đồng thời không cần hệ số hiệu chỉnh cắt. Dựa trên công trình của Shimpi, một số lý thuyết biến dạng cắt chưa biết được cải tiến bằng một số hàm, chẳng hạn như các hàm đa thức [116], hàm hình sin [117] và hàm hyperbol [118]. Luận án sử dụng lý thuyết hàm hyperbol đơn giản được đề xuất bởi Shimpi với các hàm khác nhau do các tác giả Thái, Choi và Touratier cải tiến [119,120]. Ưu điểm chính của lý thuyết này là sự đơn giản, không sử dụng bất kỳ hệ số hiệu chỉnh cắt nào vì thỏa mãn điều kiện ứng suất tiếp ở mặt trên và dưới của tấm triệt tiêu và nó mô tả chính xác đáp ứng cơ học của tấm.

Theo lý thuyết biến dạng cắt dựa trên hàm hyperbol [119,120], các chuyển vị *u*, *v* và *w* theo trục *x*, *y* và *z* tương ứng phụ thuộc vào tọa độ của điểm thuộc tấm có dạng sau:

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) = -z\dfrac{\partial w_b(x,y,0,t)}{\partial x} - f(z)\dfrac{\partial w_s(x,y,0,t)}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) = -z\dfrac{\partial w_b(x,y,0,t)}{\partial y} - f(z)\dfrac{\partial w_s(x,y,0,t)}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) = w_b(x,y,0,t) + w_s(x,y,0,t) \end{cases} \tag{2.1}$$

với $f(z) = z - \zeta(z)$ và $\zeta(z) = h.\sin\dfrac{z}{h} - z.\cosh\dfrac{1}{2}$ [121];

trong đó *u*, *v* và *w* là các chuyển vị theo phương *x*, *y* và *z* tại một điểm bất kỳ trong tấm; w_b và w_s là chuyển vị uốn và chuyển vị cắt theo phương *z*. Để xác định các chuyển vị tại điểm có tọa độ (*x*, *y*, *z*) thuộc tấm, ta cần xác định hai thành phần chuyển vị chính là w_b và w_s.

2.2.2. Biến dạng

Vectơ biến dạng của tấm được tính từ các chuyển vị như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-z\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}-f(z)\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -z\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}-f(z)\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -z\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}-2f(z)\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}z.\varepsilon_{bx}+f(z)\varepsilon_{sx}\\ z.\varepsilon_{by}+f(z)\varepsilon_{sy}\\ z.\gamma_{bxy}+f(z)\gamma_{sxy}\end{Bmatrix}$$

$$=z\begin{Bmatrix}\varepsilon_{bx}\\ \varepsilon_{by}\\ \gamma_{bxy}\end{Bmatrix}+f(z)\begin{Bmatrix}\varepsilon_{sx}\\ \varepsilon_{sy}\\ \gamma_{sxy}\end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{\partial\zeta(z)}{\partial z}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_s}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w_s}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac{\partial\zeta(z)}{\partial z}\boldsymbol{\gamma}_0$$

Phương trình (2.2) được viết lại dưới dạng thu gọn:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}=z\boldsymbol{\varepsilon}_b+f(z)\boldsymbol{\varepsilon}_s\\ \boldsymbol{\gamma}=\left(1-\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\right)\boldsymbol{\gamma}_0\end{cases} \tag{2.3}$$

với

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{bx}\\ \varepsilon_{by}\\ \gamma_{bxy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix};\ \boldsymbol{\varepsilon}_s=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{sx}\\ \varepsilon_{sy}\\ \gamma_{sxy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix};\boldsymbol{\gamma}_0=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial w_s}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w_s}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

2.2.3. Biến thiên biến dạng

Với trường chuyển vị được chọn, trong luận án chỉ xem xét biến thiên biến dạng theo trục *x* và *y*, và biến thiên biến dạng theo trục *z* bằng không [55]. Điều này có nghĩa là biến thiên biến dạng theo trục *x* và trục *y* cao hơn nhiều so với biến thiên biến dạng theo chiều dày. Do đó, biến thiên biến dạng được biểu thị như sau [55]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} \eta_{xxz} \\ \eta_{yyz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial f(z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\eta}_b + \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\boldsymbol{\eta}_s\end{aligned} \tag{2.5}$$

trong đó

$$\boldsymbol{\eta}_b = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \end{Bmatrix};\ \boldsymbol{\eta}_s = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

2.2.4. Quan hệ ứng suất-biến dạng

Khi xem xét hiệu ứng flexoelectric, thành phần ứng suất và vectơ chuyển vị điện cho vật liệu điện môi có kích thước nano được biểu thị như sau [55]:

$$\begin{aligned}&T_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k;\Psi_{ijm} = -f_{kijm}E_k \\ &P_i = e_{ijk}\varepsilon_{jk} + \kappa_{ij}E_k + f_{ijkl}\eta_{jkl}\end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó $c_{ijkl}, e_{kij}, f_{kijm}$, và κ_{ij} lần lượt là hằng số đàn hồi, hằng số áp điện, hệ số flexoelectric và hằng số điện môi. Chúng là các thông số phụ thuộc vào vật liệu. T_{ij} là tenxơ ứng suất, P_i là vectơ chuyển vị điện và Ψ_{ijm} là tenxơ ứng suất mô-men hoặc tenxơ ứng suất bậc cao. Ở đây có thể thấy rằng, khi bỏ qua biến thiên biến dạng η_{jkl} thì tấm sẽ trở về tấm thông thường.

Từ biểu thức của thành phần biến dạng ta có biểu thức cụ thể của vectơ ứng suất và vectơ chuyển vị điện được biểu diễn dưới dạng:

$$\boldsymbol{T}=\begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}-e_{31}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}E_z=\boldsymbol{C}_b\boldsymbol{\varepsilon}\text{-}\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{Bmatrix} s_{xz} \\ s_{yz} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}=\boldsymbol{C}_s\boldsymbol{\gamma} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{Bmatrix} \Psi_{xxz} \\ \Psi_{yyz} \end{Bmatrix}=-f_{14}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}E_z \tag{2.10}$$

$$P_z=e_{31}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)+\kappa_{33}E_z+f_{14}\left(\eta_{xxz}+\eta_{yyz}\right) \tag{2.11}$$

trong đó $f_{14} = f_{3113} = f_{3223}$ [38].

Ở đây, một số giả thiết được thiết lập gồm: Không có điện trường ngoài tác dụng lên tấm (mạch hở), độ dịch chuyển điện trường bằng độ phân cực điện. Do đó, thành phần cuối cùng $f_{14}\left(\eta_{xxz}+\eta_{yyz}\right)$ trong phương trình (2.11) là sự phân cực gây ra bởi biến thiên biến dạng trong tấm; và yếu tố này phụ thuộc vào tọa độ z của tấm do đạo hàm của hàm $f(z)$ trong biểu thức của biến thiên biến dạng.

Tích phân dọc theo chiều dày của biểu thức ứng suất, ta sẽ thu được các thành phần nội lực như sau:

Lực màng:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - e_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} E_z \right\} dz \tag{2.12}$$

Mô men:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix} zdz = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - e_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} E_z \right\} zdz \tag{2.13}$$

Mô men uốn bậc cao:

$$\begin{Bmatrix} L_{xx} \\ L_{yy} \\ L_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - e_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} E_z \right\} f(z)dz \tag{2.13a}$$

Như vậy có thể thấy rằng do tác động của hiệu ứng flexoelectric, biểu thức ứng suất có chứa đại lượng liên quan đến điện trường. Vì thế các biểu thức nội lực cũng liên quan đến điện trường. Đây là điểm khác biệt so với tấm có kích thước nano thông thường.

Lực cắt được biểu diễn:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} s_{xz} \\ s_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \gamma dz \tag{2.14}$$

Do đó, trong công thức tính toán lực cắt không sử dụng đến hệ số hiệu chỉnh cắt, đây cũng chính là ưu điểm so với lý thuyết tấm thông thường.

2.2.5. Cường độ điện trường

Cường độ điện trường được suy ra từ đạo hàm riêng của điện thế φ như sau:

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{2.15}$$

Dựa vào định luật Gauss (trong tĩnh điện), độ dịch chuyển điện tích được cho bởi công thức:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = 0 \tag{2.16}$$

Từ các phương trình (2.11), (2.15) và (2.16), ta có:

$$\varphi = \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \frac{z^2}{2} \\ & + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \left(\frac{z^2}{2} - h^2 \cosh\left(\frac{z}{h}\right) + \frac{z^2}{2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \right) \end{aligned} \right\} + \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} f(z) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + c_1 z + c_2 \tag{2.17}$$

với c_1 và c_2 là các hằng số tích phân cần xác định từ điều kiện mạch hở:

$$P_z\left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0 \tag{2.18}$$

Từ đó, hệ số c_1 được xác định:

$$c_1 = \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \tag{2.19}$$

Thay phương trình (2.17) và (2.19) vào phương trình (2.15) ta được biểu thức của cường độ điện trường như sau:

$$
\begin{aligned}
E_z &= -\frac{e_{31}}{\kappa_{33}}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)+\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right)+\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z} \\
&= \frac{e_{31}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right)z+\frac{e_{31}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)f(z) \\
&\quad +\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right)+\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Cần lưu ý rằng biểu thức của cường độ điện trường E_z phụ thuộc vào tọa độ z, hàm *f(z)* và đạo hàm của *f(z)*. Do đó, E_z có thể biến đổi gần đúng sang dạng tuyến tính hoặc phi tuyến tùy thuộc vào giá trị của hệ số f_{14}. Có nghĩa là hiệu ứng flexoelectric sẽ ảnh hưởng đáng kể đến phân bố của E_z theo hướng chiều dày, điều này sẽ được chỉ ra trong các kết quả tính toán ở Chương 3.

2.3. Nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu

Để xây dựng phương trình cân bằng cho kết cấu, luận án sử dụng nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu, theo đó tổng công khả dĩ của các thành phần:

$$
\delta U+\delta U^{found}-\delta W-\delta T=0 \tag{2.21}
$$

với δU, δU^{found}, δW, và δT lần lượt là công khả dĩ do biến dạng của tấm có kích thước nano, công khả dĩ do nền đàn hồi bị biến dạng, công khả dĩ do ngoại lực tác dụng và công khả dĩ do lực quán tính gây ra.

2.3.1. Thế năng biến dạng của tấm có kích thước nano

Với điều kiện mạch hở, thế năng biến dạng chứa năng lượng điện tự do Gibbs có dạng sau [55]:

$$U=\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\Psi}\right)dV=\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{C\varepsilon}+\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{S}-\boldsymbol{\varepsilon}^T e_{31}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}E_z-\boldsymbol{\eta}^T f_{14}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}E_z\right)dV$$

$$=\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{C\varepsilon}+\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{S}\right)dV$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T\frac{e_{31}.e_{31}}{\kappa_{33}}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)z\right)dV$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T\frac{e_{31}.e_{31}}{\kappa_{33}}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)f(z)\right)dV$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T e_{31}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right)\right)dV \tag{2.22}$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T e_{31}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)dV$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\eta}^T f_{14}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\frac{e_{31}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right).z\right)dV$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\eta}^T f_{14}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\frac{e_{31}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)f(z)\right)dV$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\eta}^T f_{14}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\right)\right)dV$$

$$-\frac{1}{2}\int_V\left(\boldsymbol{\eta}^T f_{14}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)dV$$

Do vậy, biểu thức công khả dĩ của nội lực được tính như sau:

$$\delta U = \int_V \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{T} + \delta\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{S} + \delta\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\Psi} \right) dV$$

$$= \int_V \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{S} \right) dV$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{e_{31}.e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) z \right) dV$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{e_{31}.e_{31}}{\kappa_{33}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) f(z) \right) dV$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T e_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \right) dV \qquad (2.23)$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T e_{31} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) dV$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\eta}^T f_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) .z \right) dV$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\eta}^T f_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) f(z) \right) dV$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\eta}^T f_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \right) dV$$

$$-\int_V \left(\delta\boldsymbol{\eta}^T f_{14} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) dV$$

2.3.2. Thế năng biến dạng đàn hồi của nền

Vì tấm tựa trên nền đàn hồi nên biểu thức thế năng của tấm kể đến tương tác với nền đàn hồi có công thức sau:

$$U^{found} = \frac{1}{2}\int_S \left(k_w w^2 + k_s \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right) dS \tag{2.24}$$

Từ đó, công khả dĩ của lực tác dụng từ nền đàn hồi có dạng

$$\delta U^{found} = \int_S \left(k_w w \delta w + k_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dS \tag{2.25}$$

2.3.3. Công của ngoại lực

Gia tốc của một điểm (x, y, z) theo thời gian t được tính như sau:

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,y,z,t) = -z\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ \dfrac{\partial w_b(x,y,0,t)}{\partial x} \right\} - f(z)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ \dfrac{\partial w_s(x,y,0,t)}{\partial x} \right\} \\ \ddot{v}(x,y,z,t) = -z\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ \dfrac{\partial w_b(x,y,0)}{\partial y} \right\} - f(z)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ \dfrac{\partial w_s(x,y,0,t)}{\partial y} \right\} \\ \ddot{w}(x,y,z,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ w_b(x,y,0,t) + w_s(x,y,0,t) \right\} \end{cases} \tag{2.26}$$

Do vậy, biểu thức của lực quán tính có dạng:

$$F_{qt} = \int_V \rho\left(\ddot{u} + \ddot{v} + \ddot{w} \right) dV \tag{2.27}$$

Từ đó, công khả dĩ của lực quán tính có biểu thức như sau:

$$\delta T = \int_V \rho\left(\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w \right) dV \tag{2.28}$$

với ρ là khối lượng riêng của vật liệu tấm.

Công do ngoại lực tác dụng được tính như sau:

$$W = \int_S F.w.dS = \int_S F\left\{w_b + w_s\right\}dS \tag{2.29}$$

Biểu thức công khả dĩ:

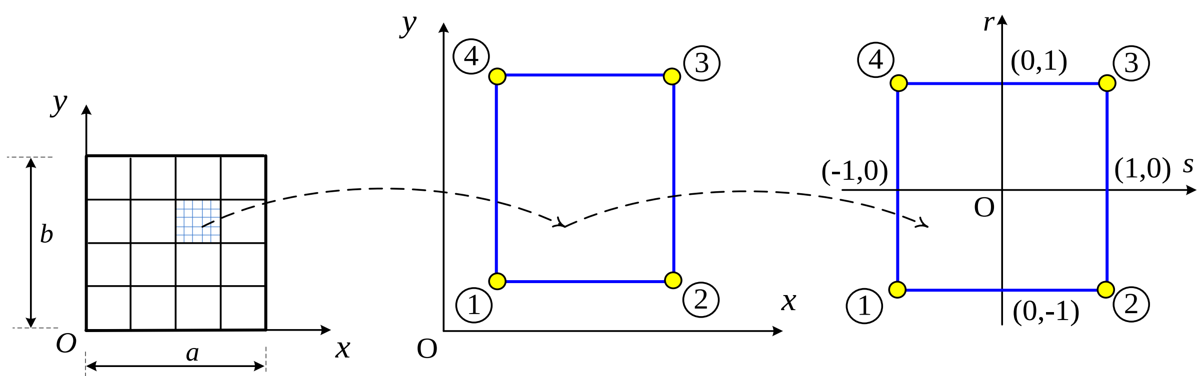
$$\delta W = \int_S F.\delta w.dS = \int_S F\delta\left\{w_b + w_s\right\}dS \tag{2.30}$$

2.4. Phương trình PTHH của tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi kể đến hiệu ứng flexoelectric

2.4.1. Mô hình phần tử và véc-tơ chuyển vị nút phần tử

Trong luận án này, phần tử tứ giác bốn điểm nút được thể hiện trên Hình 2.2, trong đó mỗi điểm nút chứa sáu bậc tự do.

$$\boldsymbol{q}_e = \sum_{i=1}^{4}\left\{w_{bi}, w_{si}, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial w_b}{\partial y}\right)_i, \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)_i\right\}^T$$



Hình 2.2. Mô hình phần tử tứ giác bốn điểm nút trong hệ trục tọa độ Đề-các và hệ trục tọa độ tự nhiên

với *r* và *s* là các tọa độ trong hệ trục tọa độ tự nhiên *sOr*.

2.4.2. Ma trận và véc-tơ phần tử

Thành phần chuyển vị uốn và cắt được xấp xỉ thông qua véc-tơ chuyển vị nút của phần tử và các hàm dạng như sau:

$$\begin{cases} w_b = \sum_{i=1}^{4}\left\{ H_{3i-2}w_{bi} + H_{3i-1}\left(\dfrac{\partial w_b}{\partial x}\right)_i + H_{3i}\left(\dfrac{\partial w_b}{\partial y}\right)_i \right\} = \boldsymbol{H}_b\boldsymbol{q}_e \\ w_s = \sum_{i=1}^{4}\left\{ H_{3i-2}w_{si} + H_{3i-1}\left(\dfrac{\partial w_s}{\partial x}\right)_i + H_{3i}\left(\dfrac{\partial w_s}{\partial y}\right)_i \right\} = \boldsymbol{H}_s\boldsymbol{q}_e \end{cases} \tag{2.31}$$

trong đó, H_j là hàm nội suy Hermite, chúng được biểu diễn như sau:

$$H_1 = \frac{1}{8}.(1-r).(1-s).\left(2-r-s-r^2-s^2\right); H_2 = \frac{1}{8}.\left(1-r^2\right).(1-s)$$

$$H_3 = \frac{1}{8}.(1-r).(1-s).\left(1-s^2\right); H_4 = \frac{1}{8}.(1+r).(1+s).\left(2+r-s-r^2-s^2\right)$$

$$H_5 = -\frac{1}{8}.(1+r).(1-s).\left(1-r^2\right); H_6 = \frac{1}{8}.(1+r).(1-s).\left(1-r^2\right)$$

$$H_7 = \frac{1}{8}.(1+r).(1+s).\left(2+r+s-r^2-s^2\right); H_8 = -\frac{1}{8}.(1+r).(1+s).\left(1-r^2\right)$$

$$H_9 = -\frac{1}{8}.(1+r).(1+s).\left(1-s^2\right); H_{10} = \frac{1}{8}.(1-r).(1+s).\left(2-r+s-r^2-s^2\right)$$

$$H_{11} = \frac{1}{8}.(1-r).(1+s).\left(1-r^2\right); H_{12} = -\frac{1}{8}.(1-r).(1+s).\left(1-s^2\right)$$

Khi đó, vectơ chuyển vị tại một điểm thuộc phần tử tấm được nội suy thông qua vectơ chuyển vị nút của phần tử như sau:

$$\boldsymbol{u} = \left\{ w_b, w_s, \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w_b}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right) \right\}^T = \boldsymbol{H}.\boldsymbol{q}_e \tag{2.32}$$

Các vectơ biến dạng được tính toán thông qua vectơ chuyển vị nút:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{q}_e\,;\ \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{q}_e \tag{2.33}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{B}_3 \boldsymbol{q}_e\,;\ \ \boldsymbol{\eta}_b = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{B}_4 \boldsymbol{q}_e\,;\ \boldsymbol{\eta}_s = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial y^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{B}_5 \boldsymbol{q}_e \tag{2.34}$$

Lúc này, công khả dĩ của nội lực trong phần tử tấm có biểu thức:

$$\begin{aligned}
\delta U_e = \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} & \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) \boldsymbol{C}_b \left(z\boldsymbol{B}_1 + f(z)\boldsymbol{B}_2 \right) + \boldsymbol{B}_3^T \boldsymbol{C}_s \boldsymbol{B}_3 \right\} dV \boldsymbol{q}_e \\
& - \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) e_{31} \boldsymbol{I}_3 \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \right) . z \right\} dV \boldsymbol{q}_e \\
& - \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) \frac{e_{31}.e_{31}}{\kappa_{33}} \boldsymbol{I}_3 \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial y^2} \right) f(z) \right\} dV \boldsymbol{q}_e \\
& - \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) e_{31} \boldsymbol{I}_3 \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \right) dV \boldsymbol{q}_e \\
& - \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) e_{31} \boldsymbol{I}_3 \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial y^2} \right) \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\} dV \boldsymbol{q}_e
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$-\delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left\{ \left(\boldsymbol{B}_4^T + \frac{\partial f(z)}{\partial z} \boldsymbol{B}_5^T \right) f_{14} \boldsymbol{I}_2 \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \right) .z \right\} dV \boldsymbol{q}_e$$

$$-\delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left\{ \left(\boldsymbol{B}_4^T + \frac{\partial f(z)}{\partial z} \boldsymbol{B}_5^T \right) f_{14} \boldsymbol{I}_2 \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial y^2} \right) f(z) \right\} dV \boldsymbol{q}_e$$

$$-\delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left\{ \left(\boldsymbol{B}_4^T + \frac{\partial f(z)}{\partial z} \boldsymbol{B}_5^T \right) f_{14} \boldsymbol{I}_2 \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \right) \right\} dV \boldsymbol{q}_e$$

$$-\delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{V_e} \left\{ \left(\boldsymbol{B}_4^T + \frac{\partial f(z)}{\partial z} \boldsymbol{B}_5^T \right) f_{14} \boldsymbol{I}_2 \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial y^2} \right) \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\} dV \boldsymbol{q}_e$$

với $\boldsymbol{I}_3 = \{1, 1, 0\}^T$ và $\boldsymbol{I}_2 = \{1, 1\}^T$.

Phương trình (2.35) ở dạng rút gọn:

$$\delta U_e = \delta \boldsymbol{q}_e^T \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{q}_e \tag{2.36}$$

trong đó ma trận độ cứng của phần tử tấm được tính cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_e = & \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) \boldsymbol{C}_b \left(z\boldsymbol{B}_1 + f(z)\boldsymbol{B}_2 \right) + \boldsymbol{B}_3^T \boldsymbol{C}_s \boldsymbol{B}_3 \right\} |\boldsymbol{J}| drdsdz \\
& - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) e_{31} \boldsymbol{I}_3 \frac{e_{31}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \right) .z \right\} |\boldsymbol{J}| drdsdz \\
& - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) \frac{e_{31}.e_{31}}{\kappa_{33}} \boldsymbol{I}_3 \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_s}{\partial y^2} \right) f(z) \right\} |\boldsymbol{J}| drdsdz \\
& - \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left\{ \left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T \right) e_{31} \boldsymbol{I}_3 \frac{f_{14}}{\kappa_{33}} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}_b}{\partial y^2} \right) \right\} |\boldsymbol{J}| drdsdz
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$-\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left(z\boldsymbol{B}_1^T + f(z)\boldsymbol{B}_2^T\right)e_{31}\boldsymbol{I}_3\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_s}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right\}\left|\boldsymbol{J}\right|drdsdz$$

$$-\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left(\boldsymbol{B}_4^T+\frac{\partial f(z)}{\partial z}\boldsymbol{B}_5^T\right)f_{14}\boldsymbol{I}_2\frac{e_{31}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_b}{\partial y^2}\right).z\right\}\left|\boldsymbol{J}\right|drdsdz$$

$$-\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left(\boldsymbol{B}_4^T+\frac{\partial f(z)}{\partial z}\boldsymbol{B}_5^T\right)f_{14}\boldsymbol{I}_2\frac{e_{31}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_s}{\partial y^2}\right)f(z)\right\}\left|\boldsymbol{J}\right|drdsdz$$

$$-\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left(\boldsymbol{B}_4^T+\frac{\partial f(z)}{\partial z}\boldsymbol{B}_5^T\right)f_{14}\boldsymbol{I}_2\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_b}{\partial y^2}\right)\right\}\left|\boldsymbol{J}\right|drdsdz$$

$$-\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left(\boldsymbol{B}_4^T+\frac{\partial f(z)}{\partial z}\boldsymbol{B}_5^T\right)f_{14}\boldsymbol{I}_2\frac{f_{14}}{\kappa_{33}}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_s}{\partial y^2}\right)\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right\}\left|\boldsymbol{J}\right|drdsdz$$

với $\boldsymbol{J}$ là ma trận Jacobi sinh ra từ phép chuyển đổi giữa các hệ trục tọa độ:

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix};\ \boldsymbol{J}^{-1}=\frac{1}{\left\|J\right\|}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12}\\ -J_{21} & J_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11}^* & J_{12}^*\\ J_{21}^* & J_{22}^*\end{bmatrix}$$

Từ công thức (2.37) có thể thấy trường chuyển vị đã phân rõ thành phần liên quan đến uốn và thành phần liên quan đến cắt. Hàm $f(z)$ đảm bảo thỏa mãn điều kiện ứng suất tiếp bằng không tại bề mặt trên và bề mặt dưới của tấm. Khi tính toán ma trận độ cứng phần tử thì không cần hệ số hiệu chỉnh cắt và không cần sử dụng tích phân rút gọn. Do vậy, điều này sẽ làm thuận lợi quá trình tính toán.

Để xác định ma trận độ cứng của nền đàn hồi tác dụng lên tấm, ta xem xét phương trình (2.25) liên quan đến vectơ chuyển vị nút của phần tử như sau:

$$\delta U_e^{found} = \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{S_e} \left(\begin{array}{l} k_w \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right)^T \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right) \\ +k_s \left(\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial x} \right)^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial x} \right) \\ + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial y} \right)^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial y} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) dS \boldsymbol{q}_e = \delta \boldsymbol{q}_e^T \boldsymbol{K}_e^f \boldsymbol{q}_e \tag{2.38}$$

Do vậy, ma trận độ cứng của nền đàn hồi có dạng:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_e^f &= \int_{S_e} \left(\begin{array}{l} k_w \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right)^T \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right) \\ +k_s \left(\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial x} \right)^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial x} \right) \\ + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial y} \right)^T \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial y} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) dS \boldsymbol{q}_e \\ &= k_w \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right)^T \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right) \left| \boldsymbol{J} \right| dr ds \\ &= k_s \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\begin{array}{l} \left(J_{11}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial r} + J_{12}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial s} + J_{11}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial r} + J_{12}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial s} \right)^T \\ \times \left(J_{11}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial r} + J_{12}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial s} + J_{11}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial r} + J_{12}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial s} \right) \\ + \left(J_{21}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial r} + J_{22}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial s} + J_{21}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial r} + J_{22}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial s} \right)^T \\ \times \left(J_{21}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial r} + J_{22}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_b}{\partial s} + J_{21}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial r} + J_{22}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{H}_s}{\partial s} \right) \end{array} \right) \left| \boldsymbol{J} \right| dr ds \end{aligned} \tag{2.39}$$

Để xác định ma trận khối lượng của phần tử, ta xem xét biểu thức công khả dĩ của lực quán tính:

$$\delta T = \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_V \left(\rho \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{H} \right) dV \ddot{\boldsymbol{q}}_e = \delta \boldsymbol{q}_e^T \boldsymbol{M}_e \ddot{\boldsymbol{q}}_e \tag{2.40}$$

Từ đó, ma trận khối lượng của phần tử được tính như sau:

$$\boldsymbol{M}_e = \int_V \left(\rho \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{H} \right) dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\rho \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{H} \right) \left| \boldsymbol{J} \right| drdsdz \tag{2.41}$$

với

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Để xác định véc-tơ lực nút của phần tử, ta sử dụng biểu thức xác định công khả dĩ:

$$\delta W_e = \int_{S_e} \delta \left(w_b + w_s \right)^T \bar{\boldsymbol{F}}_S dS = \delta \boldsymbol{q}_e^T \int_{S_e} \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right)^T \bar{\boldsymbol{F}}_S dS = \delta \boldsymbol{q}_e^T \boldsymbol{F}_e \tag{2.43}$$

trong đó véc-tơ ngoại lực có dạng:

$$\boldsymbol{F}_e = \int_{S_e} \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right)^T \bar{\boldsymbol{F}}_S dS = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{H}_s \right)^T \bar{\boldsymbol{F}}_S \left| J \right| drds \tag{2.44}$$

2.4.3. Phương trình vi phân dao động

Thay các biểu thức (2.37), (2.39), (2.41) và (2.44) vào phương trình cân bằng của tấm (2.21), ta rút ra được phương trình vi phân dao động của phần tử tấm trong trường hợp bỏ qua cản viết dưới dạng phần tử hữu hạn như sau:

$$\boldsymbol{M}_e.\ddot{\boldsymbol{q}}_e + \left(\boldsymbol{K}_e + \boldsymbol{K}_e^f\right).\boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{F}_e \tag{2.45}$$

trong đó $\boldsymbol{M}_e, \boldsymbol{K}_e, \boldsymbol{K}_e^f$ và $\boldsymbol{F}_e$ lần lượt là ma trận khối lượng của phần tử, ma trận độ cứng phần tử tấm, ma trận độ cứng của phần tử nền đàn hồi và vectơ lực nút của phần tử.

Trong trường hợp có kể đến cản kết cấu, phương trình vi phân dao động của phần tử tấm nano có dạng:

$$\boldsymbol{M}_e.\ddot{\boldsymbol{q}}_e + \boldsymbol{C}_e.\dot{\boldsymbol{q}}_e + \left(\boldsymbol{K}_e + \boldsymbol{K}_e^f\right).\boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{F}_e \tag{2.46}$$

với $\boldsymbol{C}_e$ là ma trận cản kết cấu của phần tử tấm.

Sau khi tập hợp các ma trận, véc-tơ phần tử và khử biên, ta thu được hệ phương trình vi phân dao động của toàn bộ kết cấu như sau:

$$\boldsymbol{M}.\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}.\dot{\boldsymbol{q}} + \left(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^f\right).\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F} \tag{2.47}$$

trong đó $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}^f$, $\boldsymbol{F}$, $\ddot{\boldsymbol{q}}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ và $\boldsymbol{q}$ là các ma trận và véc-tơ tổng thể của kết cấu, chúng được tính như sau:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M} = \sum_e \boldsymbol{M}_e;\ \boldsymbol{C} = \sum_e \boldsymbol{C}_e;\ \boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{K}_e;\ \boldsymbol{K}^f = \sum_e \boldsymbol{K}_e^f;\ \boldsymbol{F} = \sum_e \boldsymbol{F}_e \\ &\ddot{\boldsymbol{q}} = \sum_e \ddot{\boldsymbol{q}}_e;\ \dot{\boldsymbol{q}} = \sum_e \dot{\boldsymbol{q}}_e;\ \boldsymbol{q} = \sum_e \boldsymbol{q}_e \end{aligned} \tag{2.48}$$

2.4.4. Điều kiện biên

Trong luận án, các điều kiện liên kết được sử dụng và định nghĩa như sau:

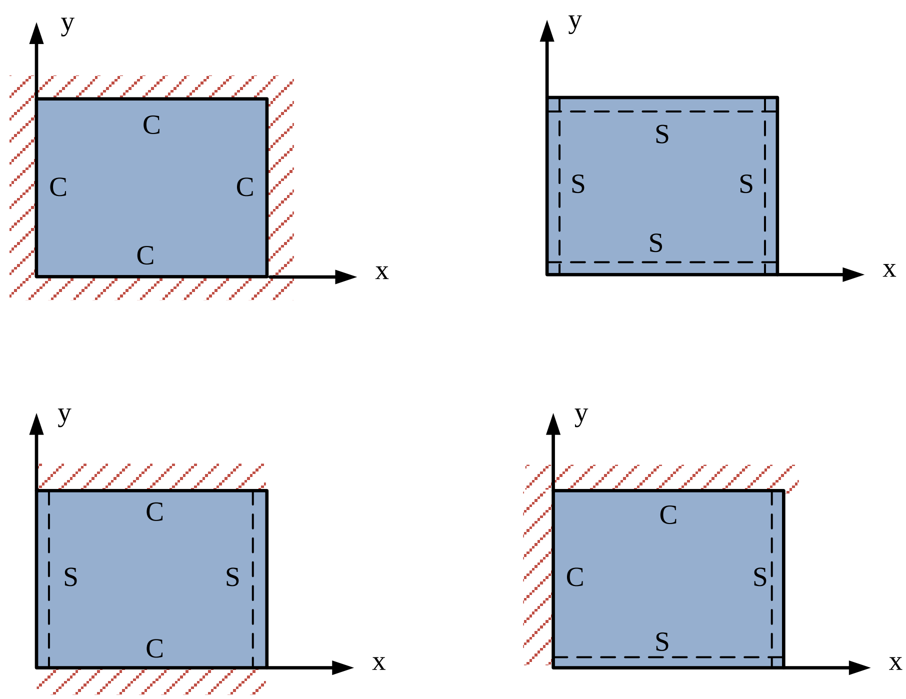
- Khi các nút ở cạnh chịu liên kết tựa đơn, các bậc tự do ở nút đó có giá trị:

$$\begin{aligned} & w_{bi}=0,\ w_{si}=0,\ \left(\frac{\partial w_b}{\partial y}\right)_i=0,\ \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)_i=0 \ \text{ tại } x\text{=0 và } x\text{=}a \\ & w_{bi}=0,\ w_{si}=0,\ \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right)_i=0,\ \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)_i=0 \ \text{ tại } y\text{=0 và } y\text{=}b \end{aligned} \tag{2.49}$$

- Khi các nút ở cạnh chịu liên kết ngàm, các bậc tự do ở nút đó có giá trị:

$$w_{bi}=0,\ w_{si}=0,\ \left(\frac{\partial w_b}{\partial x}\right)_i=0,\ \left(\frac{\partial w_b}{\partial y}\right)_i=0,\ \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)_i=0,\ \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)_i=0 \tag{2.50}$$

Ký hiệu S biểu diễn cạnh chịu liên kết tựa đơn, C biểu diễn cạnh chịu liên kết ngàm. Do vậy, khi tấm chịu ngàm bốn cạnh ta có ký hiệu CCCC, tấm có liên kết tựa đơn bốn cạnh ta có ký hiệu SSSS. Các biên điều kiện khác được ký hiệu tương tự như vậy. Một vài điều kiện liên kết được sử dụng thể hiện trong Hình 2.3.



Hình 2.3. Một số điều kiện biên cho tấm có kích thước nano

2.4.5. Lưu đồ thuật toán và chương trình phân tích bài toán tĩnh

Bỏ qua thành phần liên quan đến cản và khối lượng trong phương trình (2.47), phương trình cân bằng của tấm có kích thước nano chịu tải trọng tĩnh như sau:

$$\boldsymbol{K}.\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F} \tag{2.51}$$

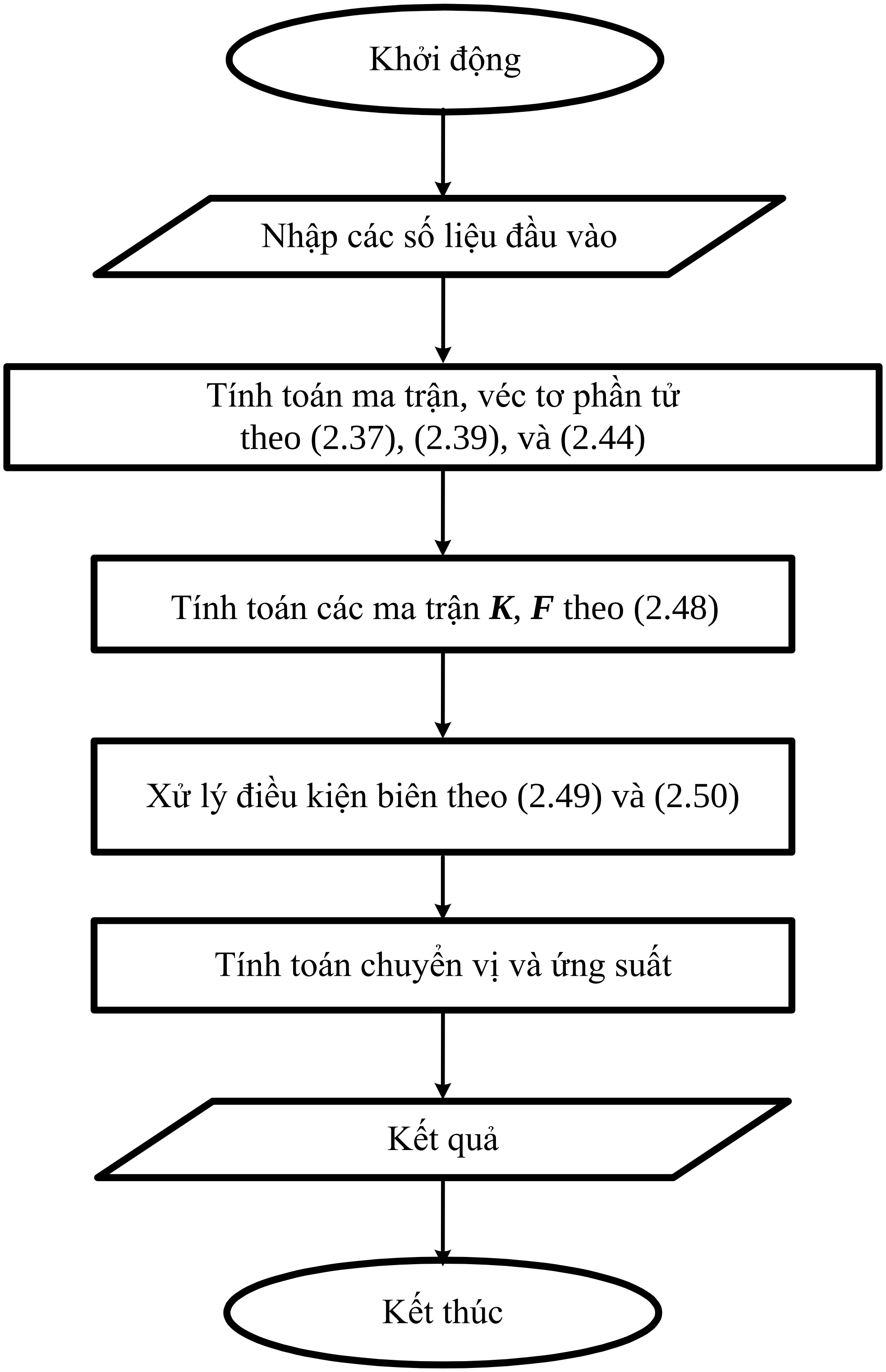
trong đó như đã trình bày ở chương 2, $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{F}$ và $\boldsymbol{q}$ là ma trận độ cứng, vectơ lực nút và vectơ chuyển vị tổng thể của kết cấu. Chúng được tập hợp từ ma trận độ cứng, vectơ lực và vectơ chuyển vị của phần tử.

Từ phương trình (2.51), vectơ chuyển vị tổng thể được tính theo công thức:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} \tag{2.52}$$

Dựa trên lý thuyết và thuật toán ở trên, bộ chương trình Nanoplates_Flexo_Static_2023 (NFS_2023) được xây dựng trong phần mềm MATLAB để tính toán uốn tĩnh của tấm có kích thước nano nằm trên nền đàn hồi và kể đến hiệu ứng flexoelectric. Chương trình bao gồm các mô-đun chính sau: Mô-đun nhập dữ liệu và chia lưới phần tử; mô-đun phân tích uốn tĩnh cho tấm nano nằm trên nền đàn hồi có tính đến hiệu ứng flexoelectric; mô-đun xuất kết quả. Chương trình NFS_2023 có thể giải quyết, phân tích uốn tĩnh của tấm nano nằm trên nền đàn hồi có xét đến hiệu ứng flexoelectric và khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố như điều kiện biên, hiệu ứng flexoelectric, nền đàn hồi đến uốn tĩnh của tấm nano.

Lưu đồ giải bài toán uốn tĩnh của tấm có kích thước nano xét đến hiệu ứng flexoelectric như thể hiện ở Hình 2.4.



Hình 2.4. Lưu đồ phân tích uốn tĩnh tấm nano kể đến hiệu ứng flexoelectric

2.4.6. Lưu đồ thuật toán và chương trình phân tích bài toán dao động riêng

Từ phương trình vi phân dao động tổng quát (2.47), ta có phương trình vi phân dao động tự do bỏ qua cản của tấm nano như sau:

$$\boldsymbol{M}.\ddot{\boldsymbol{q}} + \left(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^{f}\right).\boldsymbol{q} = 0 \tag{2.53}$$

Giả sử nghiệm của phương trình (2.53) có dạng $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0 \sin(\omega t),$ khi đó:

$$\left(\left(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^{f}\right) - \boldsymbol{M}\omega^2\right).\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{0} \tag{2.54}$$

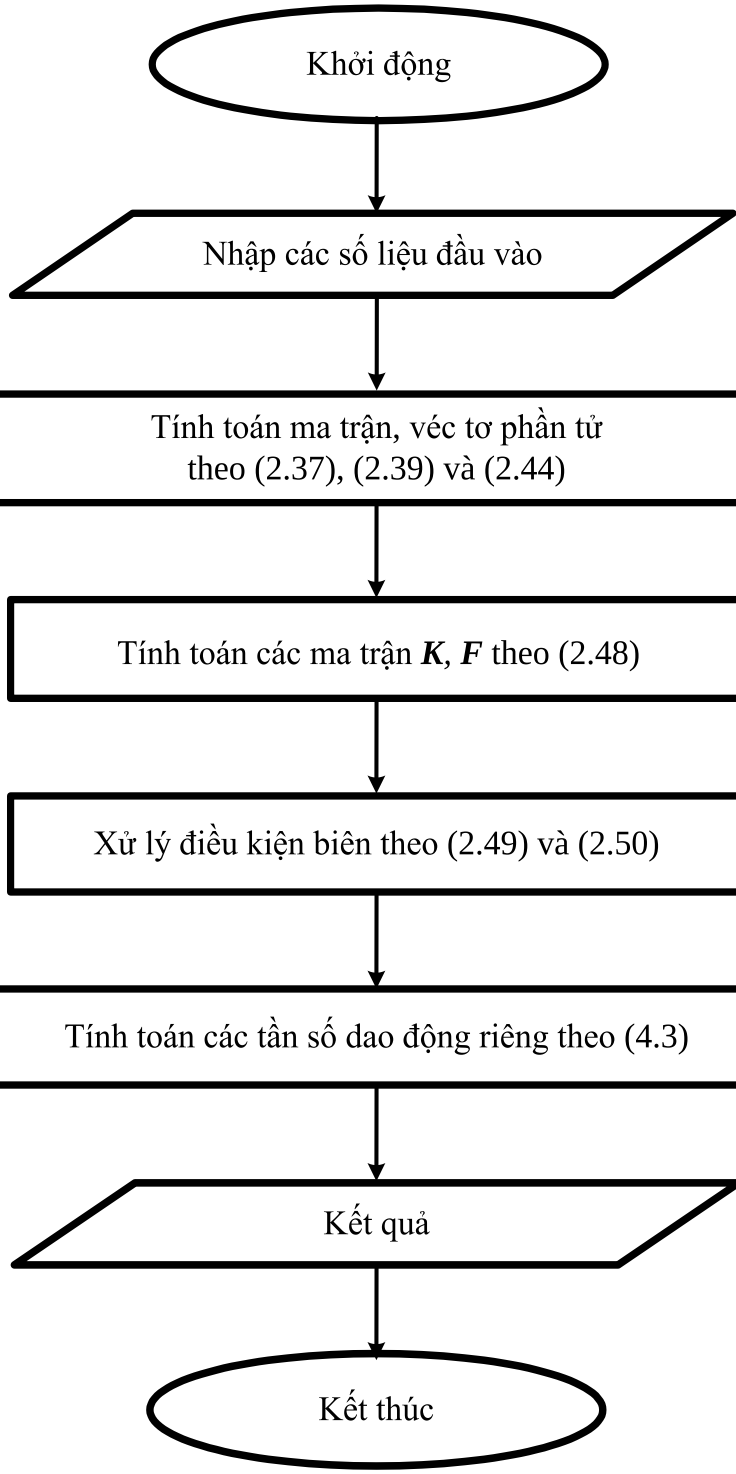
Phương trình (2.54) là hệ tuyến tính thuần nhất và $\boldsymbol{q}_0 \neq 0$ khi và chỉ khi:

$$\left|\left(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^{f}\right) - \boldsymbol{M}\omega^2\right| = 0 \tag{2.55}$$

Điều kiện (2.55) là đa thức bậc *N* đối với ω^2. Giải phương trình này ta tìm được *N* giá trị tần số tự nhiên ω_i của kết cấu.

Lưu đồ thuật toán giải bài toán dao động tự do của tấm có kích thước nano thể hiện ở Hình 2.5. Dựa trên thuật toán tính toán, chương trình Nanoplates_Flexo_ Free_Vibration_2023 (NFFV_2023) được phát triển trên phần mềm MATLAB để tính toán dao động tự do tấm có kích thước nano đặt trên nền đàn hồi và kể đến hiệu ứng flexoelectric. Chương trình bao gồm các mô-đun:

- Mô-đun nhập dữ liệu và chia lưới phần tử.
- Mô-đun tính toán dao động tự do cho tấm;
- Mô-đun xuất kết quả.



Hình 2.5. Lưu đồ phân tích dao động tự do tấm nano kể đến hiệu ứng flexoelectric

Chương trình NFFV_2023 có thể giải quyết dao động tự do của tấm có kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric và phân tích ảnh hưởng của các yếu tố như điều kiện biên, đặc điểm hình học của tấm, các đặc tính của nền đàn hồi đối với dao động tự do của tấm nano.

2.4.7. Lưu đồ thuật toán và chương trình phân tích bài toán dao động cưỡng bức

Lực cản kết cấu phụ thuộc tuyến tính vào vận tốc, hệ phương trình vi phân cho dao động cưỡng bức của tấm kích thước nano có dạng:

$$\boldsymbol{M}.\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}.\dot{\boldsymbol{q}} + \left(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}^{f}\right).\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F} \tag{2.56}$$

trong đó $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}^{f}, \boldsymbol{F}$ và $\boldsymbol{q}$ là ma trận khối lượng, ma trận cản, ma trận độ cứng của tấm, ma trận độ cứng của nền, vectơ lực nút, và vectơ chuyển vị tổng thể của kết cấu.

Do khó khăn để xác định các giá trị chính xác của hệ số cản kết cấu, nên người ta sử dụng lý thuyết lực cản của Rayleigh. Khi đó, ma trận khối lượng và ma trận độ cứng của phần tử được kết hợp tuyến tính để tạo ra ma trận cản kết cấu như sau [122]:

$$\boldsymbol{C} = \alpha_R \boldsymbol{M} + \beta_R \boldsymbol{K} \tag{2.57}$$

trong đó α_R và β_R là hằng số Rayleigh dựa trên tần số dao động riêng của kết cấu và hệ số cản của kết cấu. Thông thường, hệ số cản của kết cấu được xác định thông qua hai dạng dao động đầu tiên tương ứng với hai tần số riêng thấp nhất. Giả sử tỷ lệ hệ số cản ζ không đổi, người ta thu được:

$$\beta_R = \frac{2\zeta}{\omega_1 + \omega_2}; \alpha_R = \omega_1.\omega_2.\beta_R \tag{2.58}$$

Phương trình vi phân chuyển động của kết cấu (2.56) là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số không đổi.

Để giải hệ phương trình vi phân (2.56), luận án áp dụng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark. Dưới đây là tóm tắt lưu đồ của phương pháp:

Ban đầu, giả sử rằng phương trình chuyển động của kết cấu có dạng như (2.56).

Nghiệm của phương trình (2.56) tại thời điểm t là bước thứ s. Tìm nghiệm tại thời điểm $t+\Delta t$ là bước thứ (s+1) như sau:

$$\boldsymbol{M}_{s+1}\ddot{\boldsymbol{q}}_{s+1} + \boldsymbol{C}_{s+1}\dot{\boldsymbol{q}}_{s+1} + \boldsymbol{K}_{s+1}\boldsymbol{q}_{s+1} = \boldsymbol{F}_{s+1} \tag{2.59}$$

Bước 1: Thiết lập các điều kiện ban đầu:

$$\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0; \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \dot{\boldsymbol{q}}_0; \ddot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{M}_0^{-1}\left(\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{C}_0\dot{\boldsymbol{q}}_0\right) \tag{2.60}$$

Bước thời gian tính toán: $\Delta t = \dfrac{t_{tol}}{n}$

Các hệ số:

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{2}{\gamma \Delta t^2};\ a_1 = \frac{2\alpha}{\gamma \Delta t};\ a_2 = \frac{2}{\gamma \Delta t};\ a_3 = \frac{1}{\gamma} - 1;\ a_4 = \frac{2\alpha}{\gamma} - 1; \\ a_5 = \left(\frac{\alpha}{\gamma} - 1\right)\Delta t;\ a_6 = (1-\alpha)\Delta t;\ a_7 = \alpha \Delta t. \end{gathered} \tag{2.61}$$

trong đó α và γ được chọn theo quy luật tuyến tính đối với gia tốc biến đổi như sau:

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(\tau) = \ddot{\boldsymbol{q}}_s + \frac{\tau}{\Delta t}\left(\ddot{\boldsymbol{q}}_{s+1} - \ddot{\boldsymbol{q}}_s\right) \text{ với } t_s \le \tau \le t_{s+1} \text{ và } t_{s+1} = t_s + \Delta t\,.$$

Ở đây, ta chọn: $\alpha = \dfrac{1}{2}$ và $\gamma = \dfrac{1}{4}$ để đảm bảo độ chính xác của nghiệm.

Bước 2: Tính ma trận độ cứng và vectơ lực nút hiệu dụng:

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{K} + a_0\boldsymbol{M} + a_1\boldsymbol{C} \tag{2.62}$$

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}_{s+1} + \boldsymbol{M}\left(a_0\boldsymbol{q}_i + a_2\dot{\boldsymbol{q}}_i + a_3\ddot{\boldsymbol{q}}_i\right) + \boldsymbol{C}\left(a_1\boldsymbol{q}_i + a_4\dot{\boldsymbol{q}}_i + a_5\ddot{\boldsymbol{q}}_i\right) \tag{2.63}$$

Bước 3: Xác định đại lượng cần thiết.

- Vectơ $\boldsymbol{q}_{s+1}$ theo phương trình:

$$\boldsymbol{K}^*_{s+1}.\boldsymbol{q}_{s+1} = \boldsymbol{F}^*_{s+1} \tag{2.64}$$

- Vectơ $\ddot{\boldsymbol{q}}_{s+1}$ và $\dot{\boldsymbol{q}}_{s+1}$ theo phương trình:

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_{s+1} = a_0\left(\boldsymbol{q}_{s+1} - \boldsymbol{q}_s\right) - a_2\dot{\boldsymbol{q}}_s - a_3\ddot{\boldsymbol{q}}_s \tag{2.65}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{s+1} = \dot{\boldsymbol{q}}_s + a_6\ddot{\boldsymbol{q}}_s + a_7\ddot{\boldsymbol{q}}_{s+1} \tag{2.66}$$

và sau đó lặp lại vòng lặp cho đến khi hết thời gian.

Lưu đồ phương pháp lặp Newmark giải bài toán động của tấm có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric như thể hiện ở Hình 2.6.

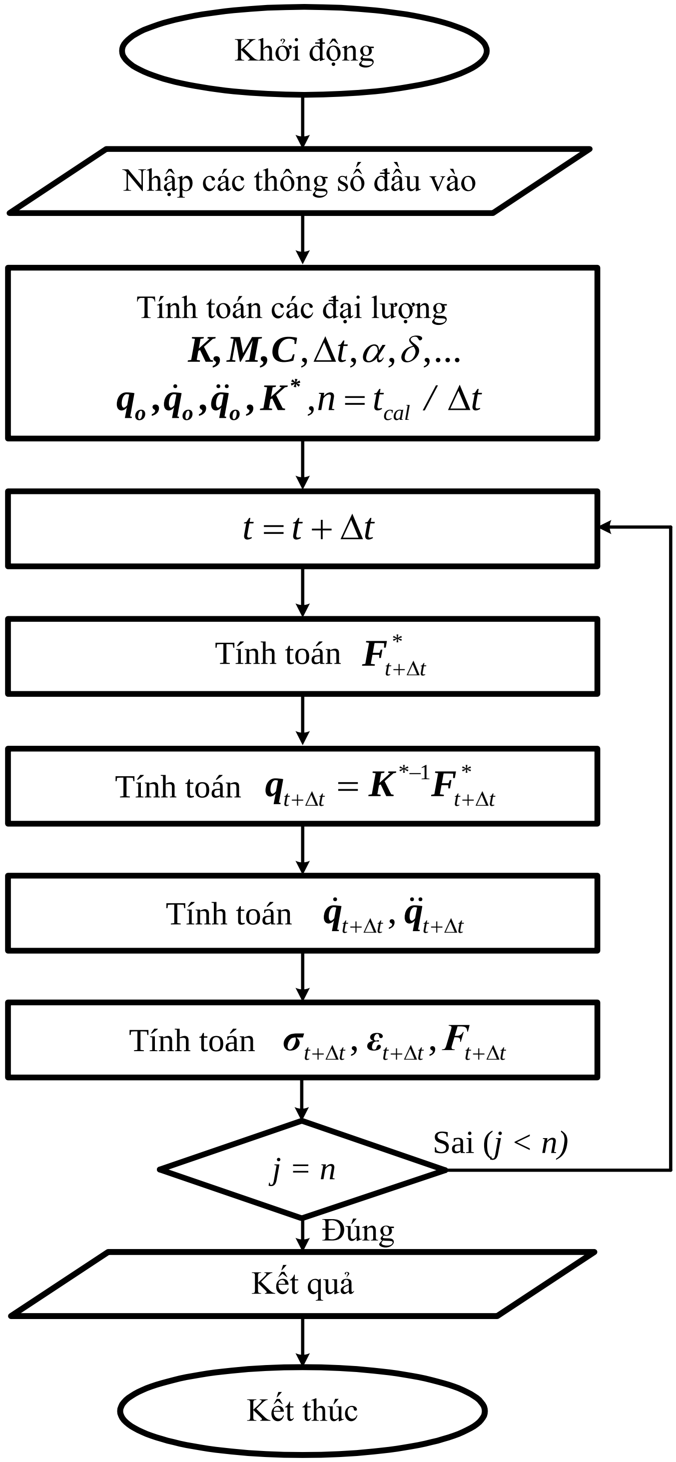
Dựa trên thuật toán, chương trình tính toán Nanoplates_Flexo_ Dynamic_2023 (NFD_2023) được xây dựng trong phần mềm MATLAB để tính toán đáp ứng động của tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi và xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric. Chương trình bao gồm các mô-đun chính sau:

- Mô-đun nhập dữ liệu và chia lưới các phần tử.

- Mô-đun phân tích đáp ứng động lực học của tấm nano tựa trên nền đàn hồi và có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric.

- Mô-đun xuất kết quả.

Chương trình NFD_2023 có thể giải quyết đáp ứng động của tấm có kích thước nano kể đến tác động của hiệu ứng flexoelectric và đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố như tham số thể hiện ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric, điều kiện biên, thông số của nền đàn hồi đến đáp ứng động của tấm nano.



Hình 2.6. Lưu đồ phương pháp lặp Newmark để giải bài toán đáp ứng động của tấm có kích thước nano xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric

2.5. Kết luận chương 2

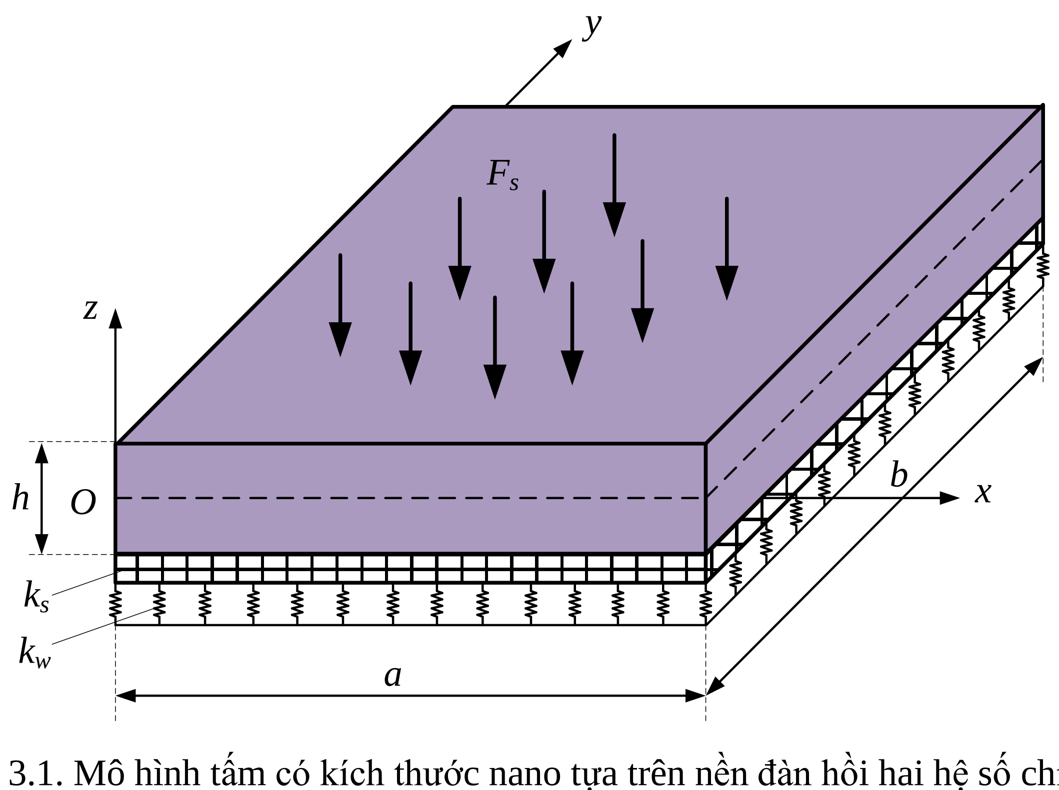
Trong chương 2, nghiên cứu sinh đã đưa ra mô hình cơ học của kết cấu tấm có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric cũng như các giả thiết được sử dụng. Các quan hệ cơ học và đặc biệt là cường độ điện trường do hiệu ứng flexoelectric cho tấm được xây dựng theo cơ sở lý thuyết biến dạng cắt cải tiến dựa trên hàm hyperbol và phương pháp phần tử hữu hạn. Luận án sử dụng hàm dạng Hermite để xấp xỉ trường chuyển vị, và nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu để thiết lập phương trình cân bằng năng lượng của phần tử tấm. Từ đó, các ma trận và véc-tơ của phần tử cũng như của toàn bộ kết cấu được xác định. Phương trình vi phân dao động của tấm có kích thước nano ở dạng phần tử hữu hạn được thiết lập. Đây là cơ sở quan trọng cho việc tính toán, xây dựng chương trình tính toán tĩnh và động của kết cấu nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric ở các chương tiếp theo. Ở cuối của chương này, các dạng điều kiện biên khác nhau sử dụng trong luận án được mô tả và định nghĩa. Cơ sở lý thuyết của chương này được thể hiện trong công trình số 1, 2, 3 và 4 tại danh mục công bố của nghiên cứu sinh.

Chương 3. NGHIÊN CỨU ĐÁP ỨNG TĨNH CỦA TẤM KÍCH THƯỚC NANO TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC

3.1. Đặt vấn đề

Trong chương 3, trên quan hệ toán-cơ đã xây dựng ở chương 2 và chương trình lập trình trong môi trường MATLAB, tác giả sẽ tiến hành đánh giá bài toán kiểm chứng và phân tích ảnh hưởng của các thông số hình học cũng như thông số vật liệu đến đáp ứng uốn tĩnh của kết cấu tấm kích thước nano trên nền đàn hồi có xét đến hiệu ứng flexoelectric.

Mô hình kết cấu tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi chịu tải trọng phân bố tĩnh kể đến hiệu ứng flexoelectric được thể hiện như Hình 3.1.



Hình 3.1. Mô hình tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tải trọng phân bố tĩnh

3.2. Ví dụ kiểm chứng

Trong phần này, trước hết một số ví dụ bài toán so sánh sẽ được trình bày để khẳng định tính chính xác của lý thuyết, mô hình toán đề xuất và chương trình tính đã được thiết lập. Kết quả độ võng và ứng suất trong đề tài luận án được đánh giá với các kết quả chính xác sử dụng các phương pháp khác nhau.

3.2.1. Ví dụ 1

Xét tấm vuông tựa trên nền đàn hồi có các kích thước a=b=0.2m, h=a/10. Cơ tính của vật liệu tấm: Mô đun đàn hồi E=320.24 GPa, hệ số Poisson $\nu = 0.26$. Tấm chịu liên kết tựa đơn trên bốn cạnh SSSS, và chịu tải trọng tĩnh phân bố đều F_s. Để tiện trong việc tính toán và theo dõi kết quả, thông số nền đàn hồi không thứ nguyên được tính như sau:

$$K_w^* = \frac{K_w a^4}{D}; K_s^* = \frac{K_s a^2}{D} \tag{3.1}$$

với

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{3.2}$$

Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm được xác định theo công thức:

$$\bar{w} = \frac{10^3 D}{F_s a^4} w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) \tag{3.3}$$

Các kết quả so sánh thu được từ luận án, phương pháp cầu phương vi phân [123] và phương pháp giải tích [124] được trình bày trong Bảng 3.1 với lưới phần tử tăng đều. Nhận thấy với lưới chia 12x12 phần tử thì kết quả là chấp nhận được.

Do đó, tất cả khảo sát tiếp theo sử dụng chương trình NFS_2023 sẽ sử dụng lưới chia này.

Bảng 3.1. Độ võng không thứ nguyên của tấm tựa đơn bốn cạnh với nền đàn hồi hai hệ số

K_w^*	K_s^*	*a*/*h*=10					
		[123]	[124]	Luận án			
				8x8 phần tử	10x10 phần tử	12x12 phần tử	14x14 phần tử
1	5	3.3455	3.3455	3.3797	3.3643	3.3560	3.3512
	10	2.7505	2.7504	2.7743	2.7635	2.7578	2.7545
	15	2.3331	2.3331	2.3508	2.3428	2.3386	2.3361
	20	2.0244	2.0244	2.0382	2.0320	2.0287	2.0268
81	5	2.8422	2.8421	2.8667	2.8557	2.8499	2.8464
	10	2.3983	2.3983	2.4163	2.4083	2.4040	2.4015
	15	2.0730	2.0730	2.0868	2.0806	2.0774	2.0755
	20	1.8245	1.8244	1.8355	1.8306	1.8280	1.8265
625	5	1.3785	1.3785	1.3835	1.3816	1.3804	1.3797
	10	1.2615	1.2615	1.2658	1.2642	1.2632	1.2626
	15	1.1627	1.1627	1.1665	1.1650	1.1642	1.1637
	20	1.0782	1.0782	1.0815	1.0802	1.0795	1.0791

3.2.2. Ví dụ 2

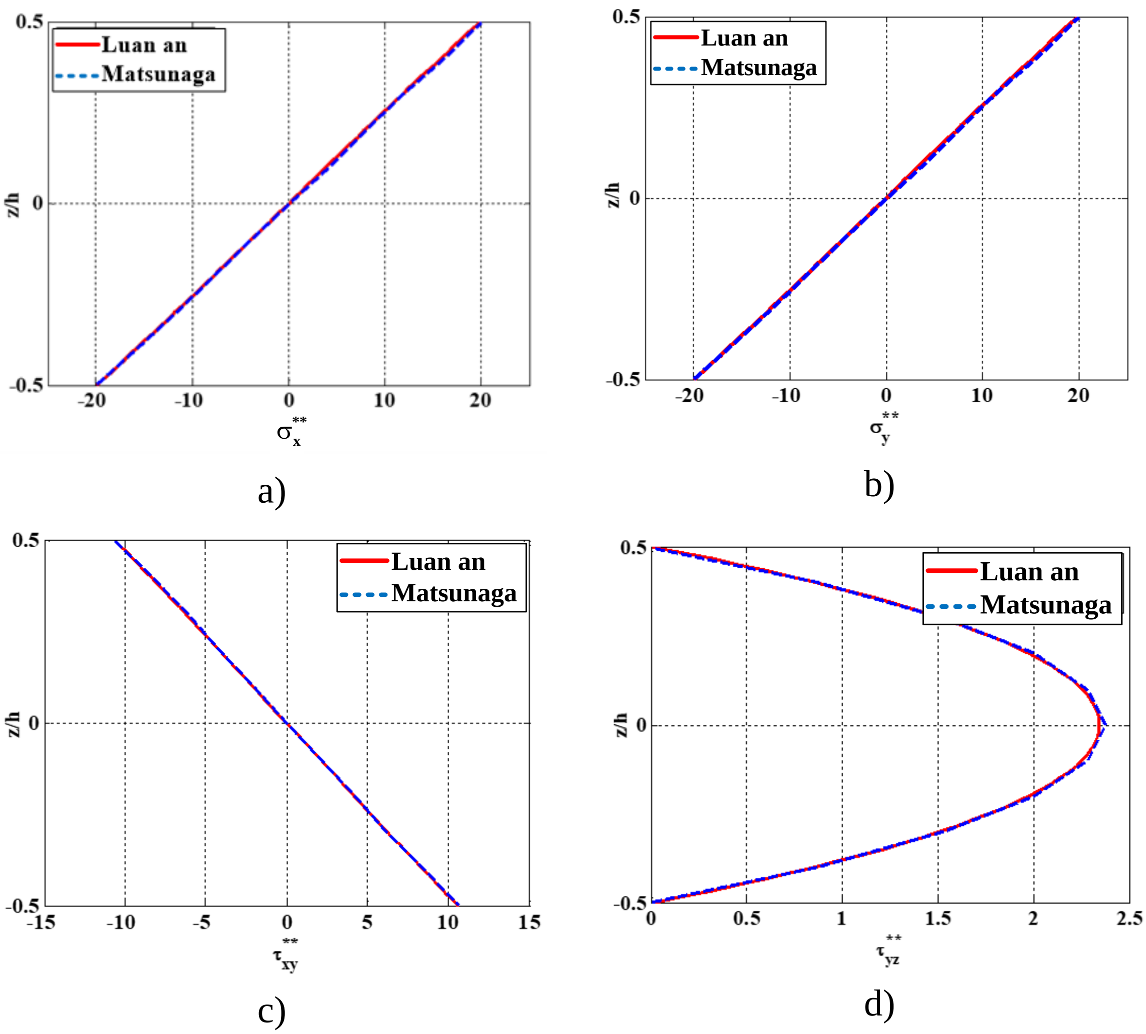
Xét một tấm hình vuông có kích thước hình học và thông số vật liệu: a/b=1, a/h=10, mô-đun đàn hồi E = 380 GPa, và hệ số Poát-xông ν = 0.3. Tấm tựa đơn trên bốn cạnh và chịu tác dụng của tải trọng hình sin như sau:

$$F_s = q_0.\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{3.4}$$

Thành phần ứng suất pháp và tiếp không thứ nguyên được chuẩn hóa:

$$\left(\sigma_x^{**},\ \sigma_y^{**}\right)=\left(\frac{\sigma_x}{q_0}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right),\ \frac{\sigma_y}{q_0}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)\right);\tau_{xy}^{**}=\frac{\tau_{xy}\left(0,\ 0,z\right)}{q_0} \tag{3.5}$$

Phân bố thành phần ứng suất theo chiều dày được trình bày trong Hình 3.2. Ở đây, kết quả của luận án được so sánh với các kết quả trong lời giải chính xác của Matsunaga [125].

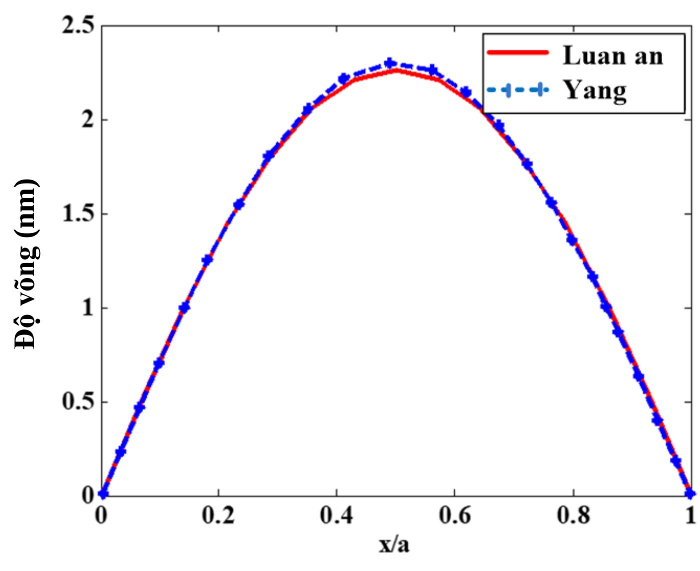


Hình 3.2. Phân bố các thành phần ứng suất theo phương chiều dày của tấm vuông chịu tải trọng hình sin

Ta thấy rằng các kết quả rất sát nhau và ứng suất tiếp phân bố phi tuyến theo chiều dày và triệt tiêu tại bề mặt trên và dưới. Đây cũng là ưu điểm của lý thuyết biến dạng cắt dạng hàm hypebol đã sử dụng.

3.2.3. Ví dụ 3

Cuối cùng là ví dụ kiểm chứng độ võng không thứ nguyên lớn nhất của tấm có kích thước nano tựa đơn bốn cạnh với các kích thước h=20 nm và a=b=50h. Cơ tính của vật liệu PZT-5H: c_{11}=102 GPa, c_{33} = 35.5 GPa, c_{12} = 31 GPa, e_{31} = -17.05 C/m^2, κ_{33}= 1.76x10^{-8} C/(Vm) và hệ số flexoelectric f_{14}=10^{-7} C/m. Tấm chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều với cường độ F_s = - 0.05 MPa. Kết quả tính toán được đánh giá với kết quả của cách tiếp cận giải tích do Yang và cộng sự [55] đưa ra được trình bày trong Hình 3.3. Nhận thấy rằng các kết quả so sánh có sự sai khác rất nhỏ.



Hình 3.3. Độ võng không thứ nguyên lớn nhất của tấm có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric, SSSS, y =b/2

Như vậy, thông qua ba ví dụ kiểm tra cho bài toán uốn tĩnh, tác giả có thể đưa ra khẳng định lý thuyết, mô hình đề xuất cũng như chương trình NFS_2023 của luận án có đủ độ tin cậy để thực hiện các tính toán trong các phần tiếp theo.

3.3. Khảo sát các yếu tố tác động đến đáp ứng tĩnh của tấm

Dựa trên chương trình tính đã được kiểm chứng, trong phần này, luận án tiến hành phân tích đáp ứng uốn tĩnh của tấm có kích thước nano với nhiều tham số khác nhau như: Tham số thể hiện ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric, các tham số hình học, điều kiện liên kết và độ cứng của nền đàn hồi.

Tấm nano áp điện có kích thước: h=20 nm và a=b=50h. Cơ tính cơ bản của vật liệu PZT-5H: c_{11} = 102 GPa; c_{33} = 35.5 GPa; c_{12} = 31 GPa; e_{31} = -17.05 C/m^2; κ_{33}= 1.76x10^{-8} C/(Vm). Tải trọng phân bố đều trên bề mặt tấm với cường độ F_s = - 0.05 MPa. Tấm đặt trên nền đàn hồi hai hệ số k_w và k_s.

Để thuận tiện cho việc phân tích và theo dõi, một số thông số được chuẩn hóa như sau:

$$w^* = \frac{10^3 c_{11} h^3}{12 F_s a^4} w;\ f_{14}^* = \frac{f_{14}}{f_{14}^0};\ K_w^* = \frac{k_w a^4}{D_f};\ K_s^* = \frac{k_s a^2}{D_f};\ D_f = \frac{c_{11} h^3}{12}$$
$$\left\{\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*\right\} = \frac{1}{F_s}\left\{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\right\} \tag{3.6}$$

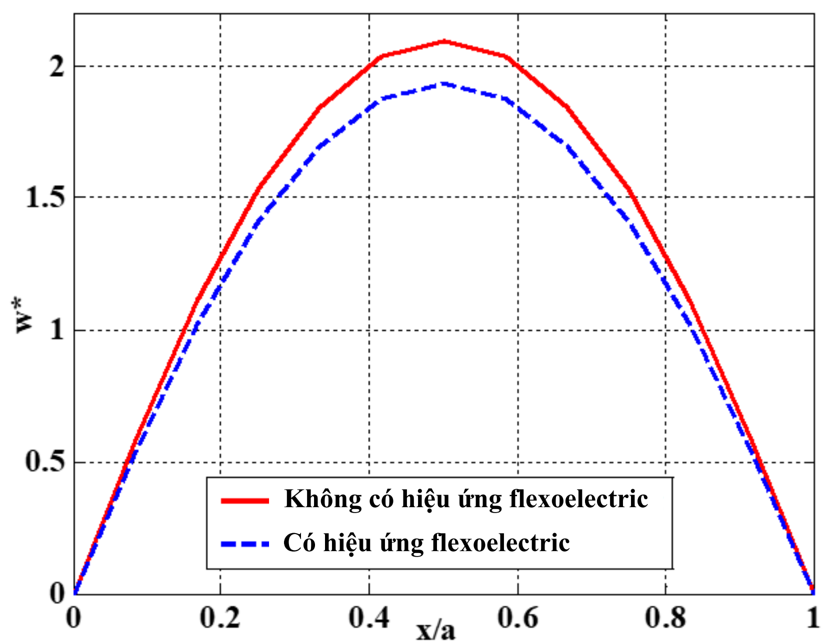
với f_{14}^0 = 10^{-7} C/m.

Luận án chỉ tính toán cho trường hợp bỏ qua điện áp ngoài, nên chỉ có tải trọng cơ phân bố đều F_s được đặt lên tấm. Do vậy, để thấy rõ đáp ứng của cường độ điện trường và sự phân cực do biến thiên biến dạng $P_z = f_{14}\left(\eta_{xxz} + \eta_{yyz}\right)$ ứng với tải tác dụng này, luận án đưa ra các thông số tương quan của cường độ điện trường và sự phân cực so với tải tác dụng như sau:

$$E_z^* = \frac{E_z}{F_s}\left[\frac{Vm}{N}\right]; P_z^* = \frac{P_z}{F_s}\left[\frac{C}{N}\right] \tag{3.7}$$

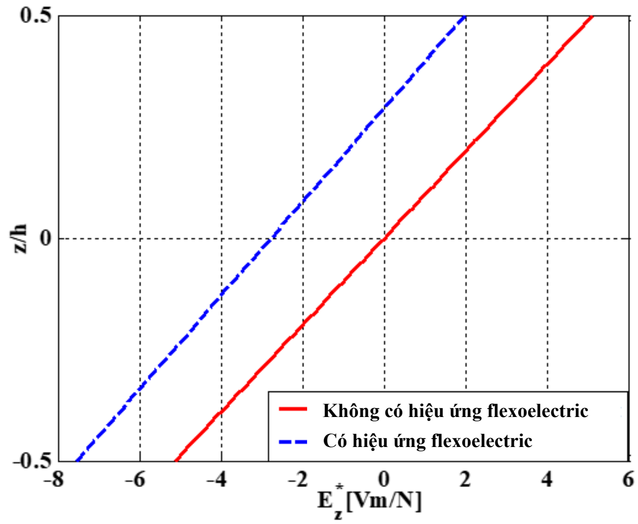
3.3.1. Tác động của hiệu ứng flexoelectric

Xem xét tấm nano tựa đơn bốn cạnh. Khảo sát tác động của hiệu ứng flexoelectric với các giá trị của f_{14} là 0 và 10^{-7} C/m (f_{14}^* = 1, K_w^*=100, K_s^*=10). Điều này có nghĩa là tấm có xem xét và không xem xét hiệu ứng flexoelectric. Độ võng không thứ nguyên w* tại đường $y = b/2$ được trình bày trong Hình 3.4.

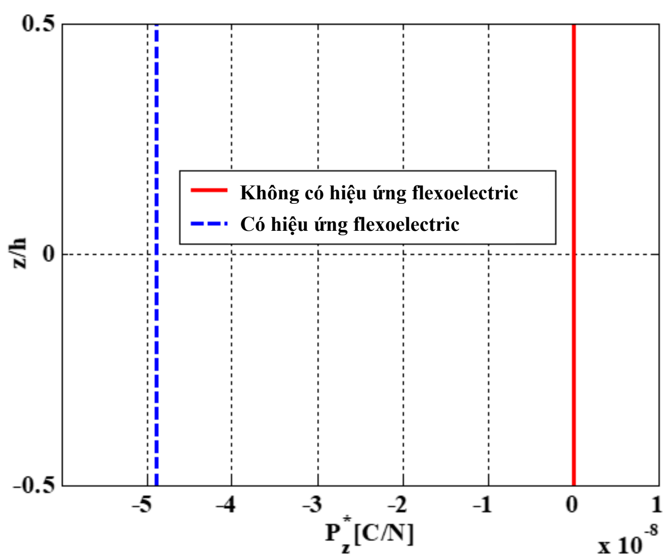


Hình 3.4. Độ võng w* của tấm tại y=b/2 trong trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric

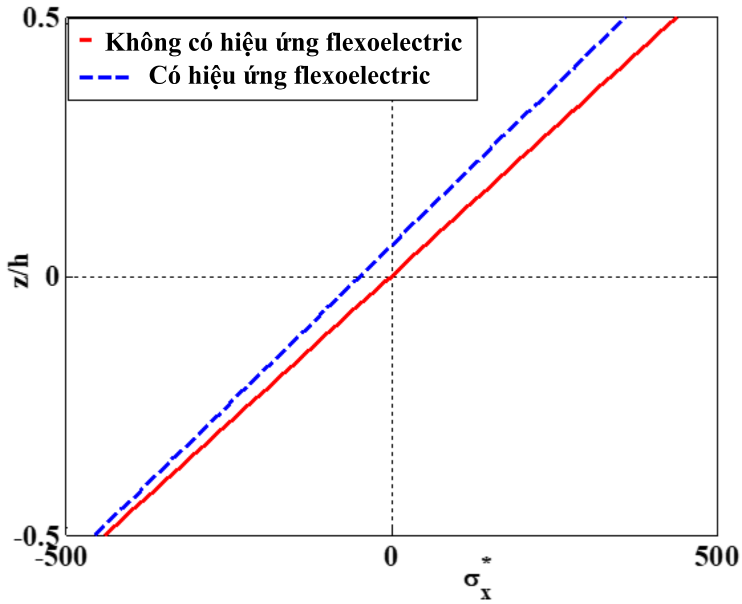
Phân bố của cường độ điện trường E_z, phân cực P_z và thành phần ứng suất phân bố theo chiều dày tại tâm của tấm được mô tả trong Hình 3.5 đến Hình 3.9.



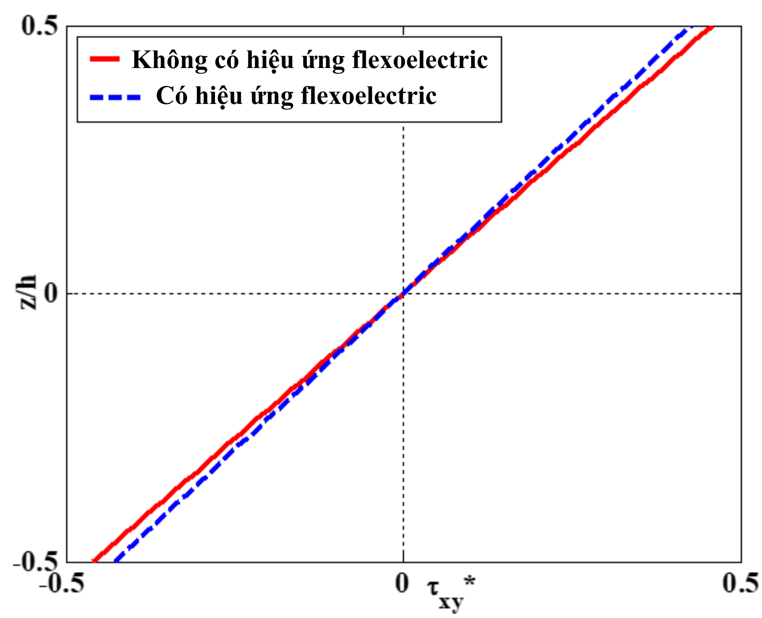
Hình 3.5. Phân bố cường độ điện trường E_z dọc theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric



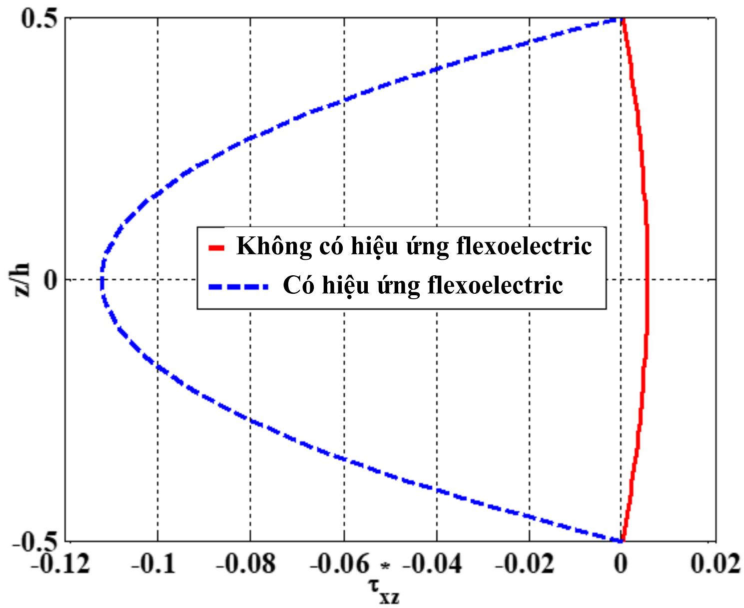
Hình 3.6. Phân bố P_z theo chiều dày của tấm với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric



Hình 3.7. Phân bố ứng suất pháp σ_x^* theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric



Hình 3.8. Phân bố ứng suất tiếp τ_{xy}^* theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric



Hình 3.9. Phân bố ứng suất tiếp τ^*_{xz} theo chiều dày với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric

Giá trị lớn nhất của các đáp ứng trong trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric được so sánh ở Bảng 3.2.

Bảng 3.2. So sánh giá trị lớn nhất của các đáp ứng với trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric

Tham số	Có hiệu ứng flexoelectric	Không có hiệu ứng flexoelectric	Tỷ lệ (có flexoelectric/không có flexoelectric)
$w^*_{\max}$	1.93	2.09	0.92
$E^*_{z\max}$	7.55	5.12	1.47
$P^*_{z\max}$	$4.9.10^{-8}$	0	-
$\sigma^*_{x\max}$	455	439	1.03
$\tau^*_{xy\max}$	0.42	0.45	0.93
$\tau^*_{xz\max}$	0.11	0.005	22

Một số nhận xét như sau:

- Hình 3.4 chỉ ra rằng khi kể đến hiệu ứng flexoelectric thì độ võng cực đại w* của tấm giảm đi. Tuy nhiên, ứng suất pháp tuyến và tiếp tuyến tăng lên (Hình 3.7-Hình 3.9). Điều này cho thấy sự khác biệt hoàn toàn với các tấm thông thường và cũng là điều cần lưu ý khi thử nghiệm các tấm nano với sự tham gia của hiệu ứng flexoelectric.

- Hình 3.5 và Hình 3.7 cho thấy khi không đưa hiệu ứng flexoelectric vào tính toán thì cường độ điện trường E_z và ứng suất pháp tuyến σ_x đối xứng nhau qua mặt phẳng giữa của tấm. Tuy nhiên, khi hệ số f_{14} khác không, E_z và ứng suất σ_x không còn đối xứng qua mặt phẳng giữa của tấm, giá trị cực đại của P_z và σ_x tăng lên. Đây là điểm nổi bật so với các tấm thông thường (bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric). Tức là chuyển vị cực đại của w giảm, ứng suất σ_x tăng. Mặt khác, giá trị lớn nhất của σ_x và τ_{xz} tăng khi giá trị của f_{14} khác không. Tuy nhiên, giá trị của ứng suất tiếp τ_{xy} giảm khi tính đến hiệu ứng flexoelectric.

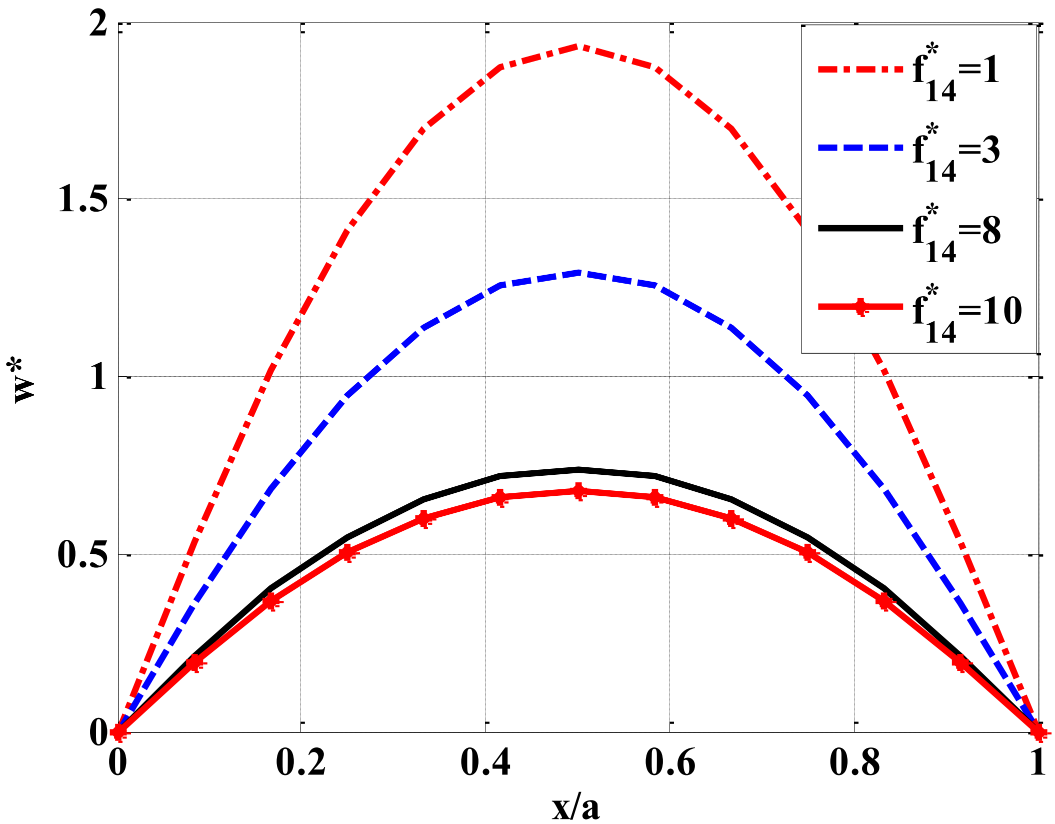
- Bảng 3.2 cho thấy trong trường hợp có tính đến hiệu ứng flexoelectric thì chuyển vị lớn nhất của w^* giảm xuống khoảng 8% so với trường hợp không có tính đến hiệu ứng này. Cũng từ kết quả ở bảng này nhận thấy giá trị lớn nhất của $E^*_{z\max}$ lớn hơn 47% và $\tau^*_{xz\max}$ tăng 22 lần.

3.3.2. Tác động của hệ số flexoelectric

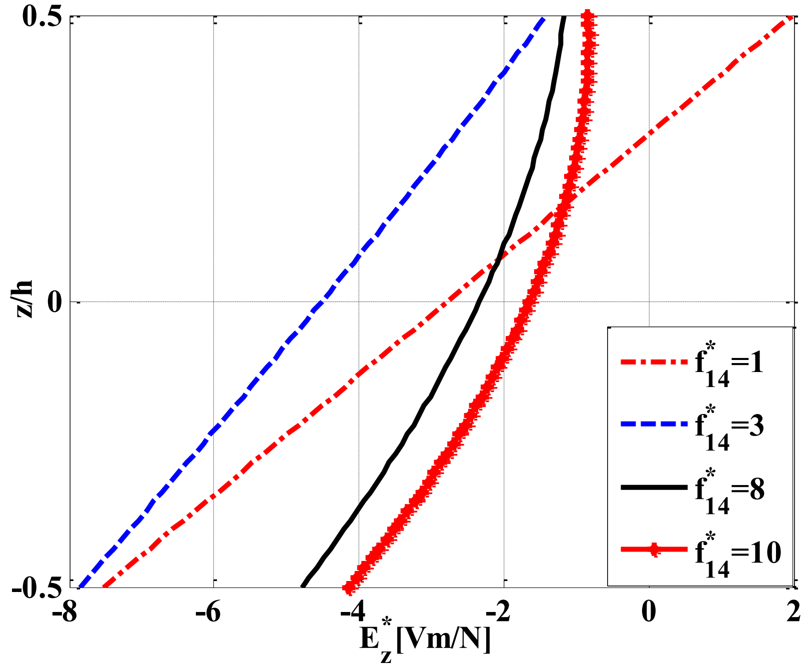
Sự tác động của hiệu ứng flexoelectric được thể hiện ở hệ số f_{14}, và điều này sẽ làm cho đáp ứng cơ học của tấm nano thể hiện sự khác biệt so với các kết cấu thông thường. Cường độ điện trường E_z phụ thuộc vào hệ số f_{14} như trong phương trình (2.20) và làm cho độ phân cực phụ thuộc vào f_{14} như trong phương trình

(2.11), ứng suất phụ thuộc vào f_{14} như trong phương trình (2.7) nên năng lượng của tấm thay đổi. Do đó, đáp ứng tĩnh của tấm nano cũng bị ảnh hưởng. Hệ số f_{14} sẽ thay đổi tùy thuộc vào vật liệu và luận án nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số f_{14} trong một phạm vi nhất định để thấy rõ hiệu ứng flexoelectric tác động như thế nào đến độ võng, ứng suất, cường độ điện trường và sự phân cực của tấm nano.

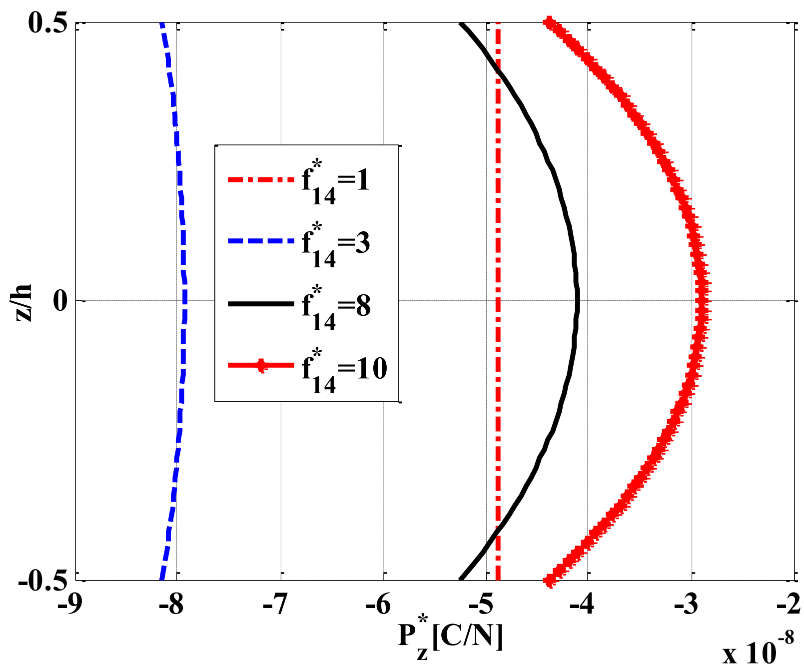
Để khảo sát tác động của hệ số f_{14} đến ứng xử của tấm nano (SSSS, K_w^*=100, K_s^*=10), cho giá trị của f_{14}^* tăng dần từ 1 đến 10. Độ võng của tấm tại đường y=b/2 được thể hiện trong Hình 3.10; phân bố dọc theo hướng chiều dày tại tâm tấm của các thành phần E_z, P_z và ứng suất thể hiện trên Hình 3.11 đến Hình 3.14.



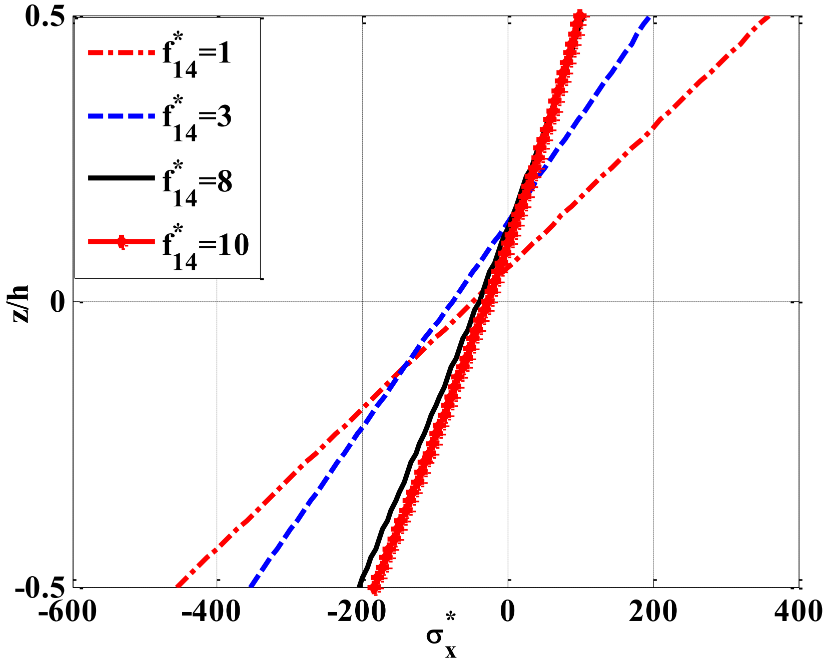
Hình 3.10. Độ võng của tấm tại y = b/2 với các giá trị khác nhau của f_{14}^*



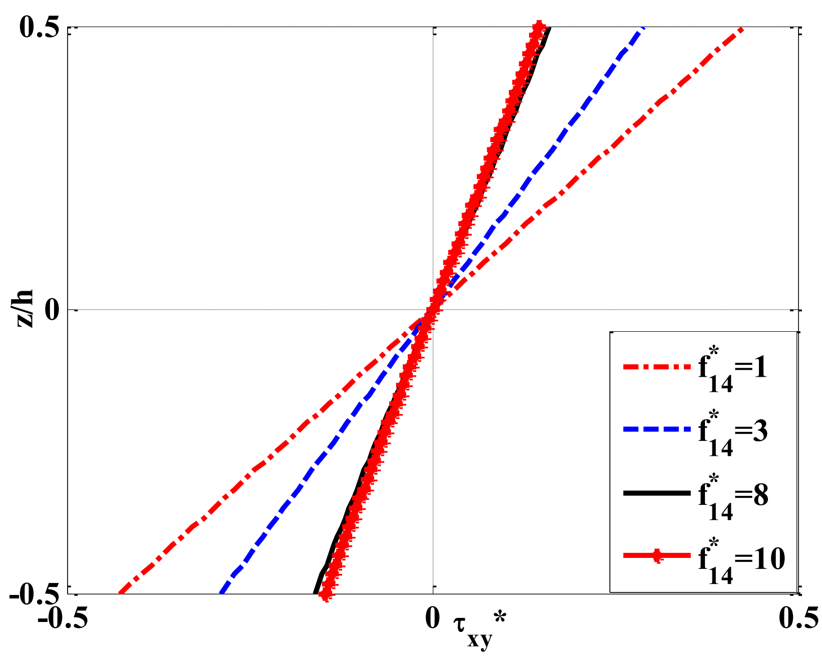
Hình 3.11. Phân bố cường độ điện trường E_z theo chiều dày với các giá trị khác nhau của f_{14}^*



Hình 3.12. Phân bố P_z theo chiều dày với các giá trị khác nhau của f_{14}^*



Hình 3.13. Phân bố ứng suất pháp σ_x^* theo chiều dày với các giá trị khác nhau của f_{14}^*



Hình 3.14. Phân bố ứng suất tiếp τ_{xy}^* theo chiều dày với giá trị khác nhau của f_{14}^*

Từ các hình trên nhận thấy rằng:

- Khi tăng giá trị f_{14} thì độ võng cực đại của tấm giảm (Hình 3.10).

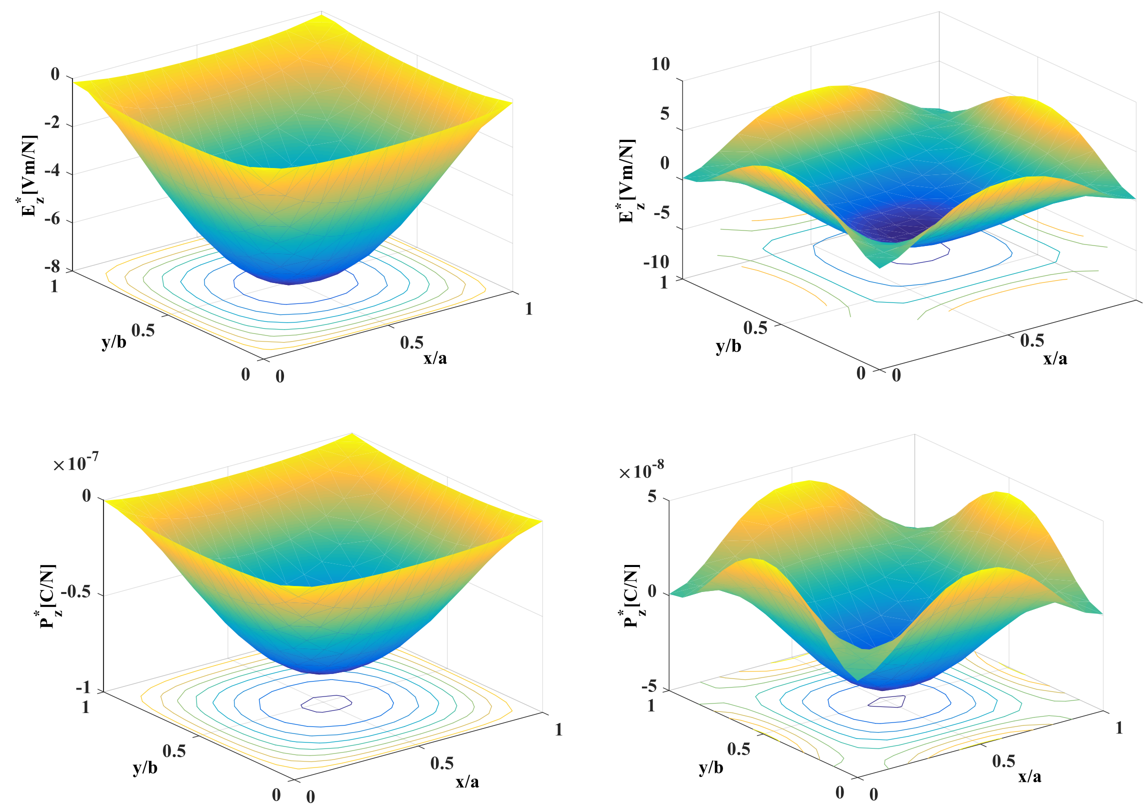
- Hình 3.10 đến Hình 3.13 cho thấy khi giá trị f_{14} nhỏ thì E_z, P_z và σ_x phân bố gần như tuyến tính theo chiều dày tấm. Tuy nhiên, khi giá trị của f_{14} lớn, các thành phần này thay đổi phi tuyến dọc theo chiều dày của tấm. Đây cũng là điểm nổi bật so với các tấm làm từ vật liệu đồng nhất mà cơ tính không thay đổi theo chiều dày. Có thể giải thích rằng trong các biểu thức của E_z, P_z và σ_x có chứa phép nhân với hệ số f_{14} và hàm $f(z)$ thay đổi phi tuyến theo chiều dày. Do đó, khi giá trị của f_{14} nhỏ, nó có ảnh hưởng nhỏ đến hàm $f(z)$. Tuy nhiên, khi giá trị của f_{14} lớn, nó sẽ tác động mạnh lên hàm $f(z)$. Vì vậy, các giá trị của E_z, P_z và σ_x thay đổi phi tuyến dọc theo chiều dày. Ngoài ra, có thể thấy rằng việc tăng f_{14} sẽ làm cho quy luật biến đổi của các giá trị cực đại của E_z, P_z và σ_x khác hoàn toàn với sự biến đổi của độ võng cực đại $w_{\max}$. Vị trí bề mặt ngoài của tấm luôn là vị trí mà E_z, P_z và σ_x đạt giá trị lớn nhất.

- Thành phần ứng suất τ_{xy} giảm dần khi tăng giá trị f_{14}. Nó tỷ lệ thuận với sự giảm của độ võng w (xem Hình 3.14).

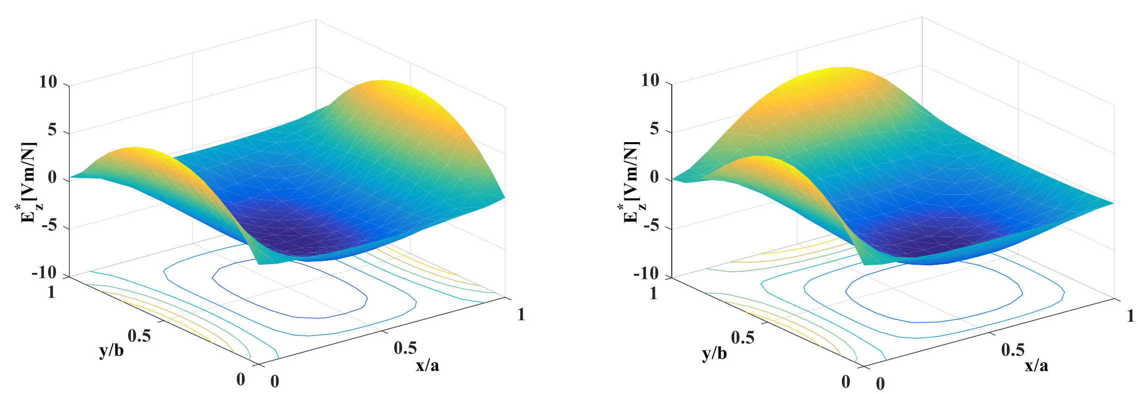
3.3.3. Tác động của điều kiện biên

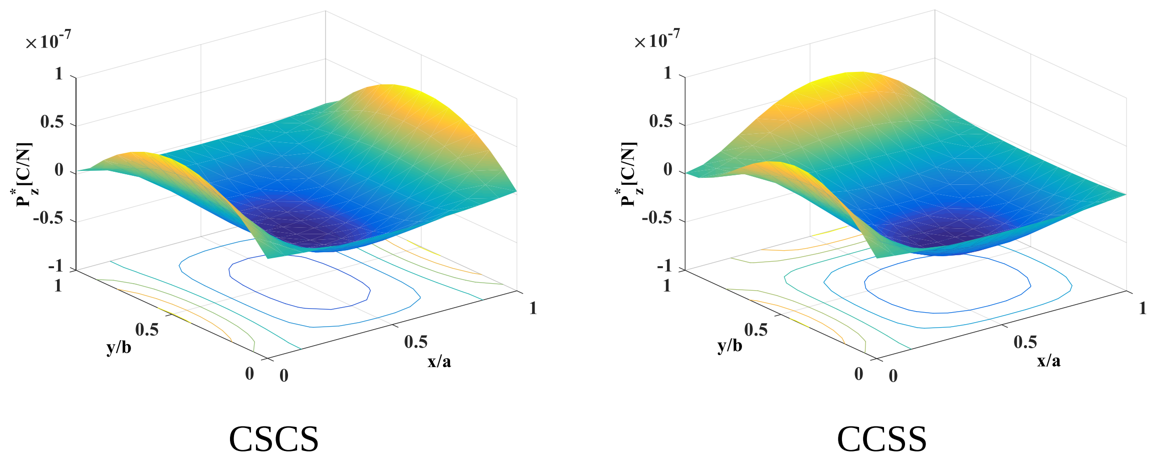
Trong phần này, để thấy rõ hơn tác động của các điều kiện liên kết đến phân bố cường độ điện trường E_z và phân cực P_z dọc theo các cạnh x và y của tấm, bốn điều kiện biên: SSSS, CCCC, CSCS, và CCSS ($f_{14}^* = 3$, K_w^*=100, K_s^*=10) được xem xét.

Các bề mặt phân bố của E_z và P_z dọc theo các cạnh x và y được trình bày trong Hình 3. 15. Cường độ điện trường E_z và phân cực điện tích P_z của tấm tại đường y=b/2 được thể hiện trên các Hình 3.16 và Hình 3.17. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của w, E_z, và P_z được liệt kê trong Bảng 3.3.



SSSS CCCC



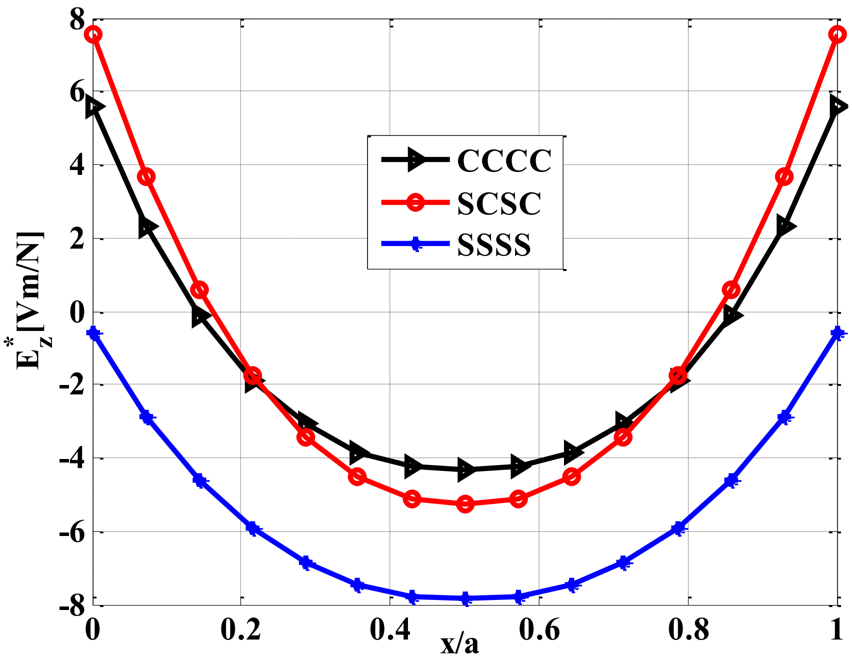


Hình 3. 15. Bề mặt phân bố của E_z và P_z dọc theo các cạnh x và y, $z=-\dfrac{h}{2}$

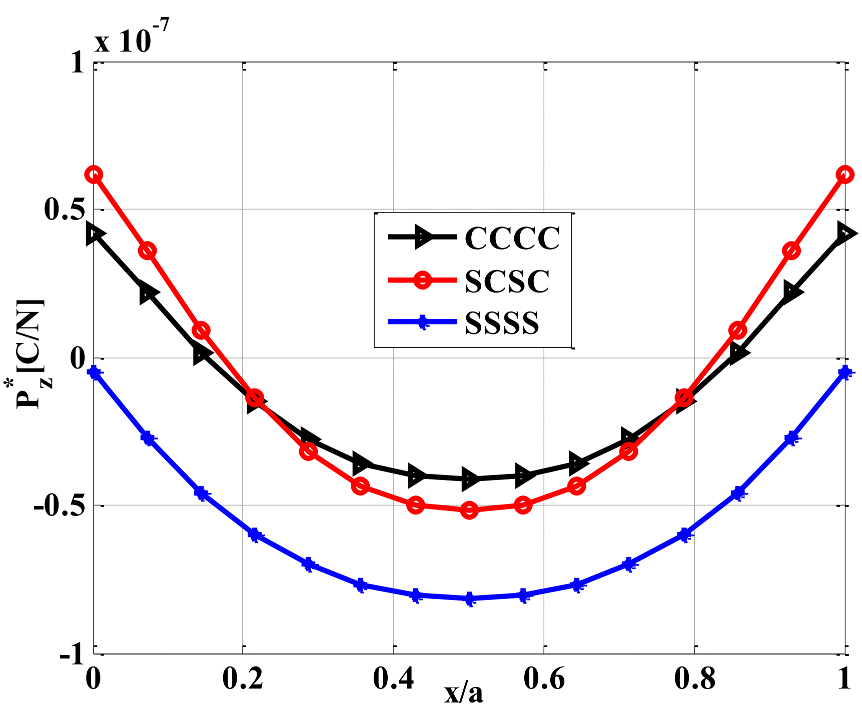
Bảng 3.3 đánh giá định lượng các giá trị lớn nhất của chuyển vị, các giá trị cường độ điện trường lớn nhất và nhỏ nhất, cũng như giá trị phân cực lớn nhất và nhỏ nhất của tấm với các trường hợp khác nhau của điều kiện biên liên kết.

Bảng 3.3. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của w, E_z và P_z với các điều kiện liên kết khác nhau, $z=-\dfrac{h}{2}$

Đại lượng	Điều kiện liên kết			
	SSSS	CCSS	SCSC	CCCC
$w_{\max}$	1.29	0.821	0.745	0.540
$E_{z(\max)}$ [Vm/N]	7.84	7.44	7.57	5.59
$E_{z(\min)}$ [Vm/N]	0.14	5.87	5.27	4.34
$P_{z(\max)}$ [C/N]	8.14x10^{-8}	6.09x10^{-8}	6.18x10^{-8}	4.17x10^{-8}
$P_{z(\min)}$ [C/N]	2.26x10^{-10}	5.85x10^{-8}	5.17x10^{-8}	4.10x10^{-8}



Hình 3.16. Cường độ điện trường E_z^* tại y = b/2 và z=-h/2 với các điều kiện biên



Hình 3.17. Phân cực điện tích P_z^* tại tại y = b/2 và z=-h/2 với các điều kiện biên

Các nhận xét được rút ra như sau:

- Điều kiện biên không chỉ tác động mạnh đến hình dạng của các mặt phân bố E_z và P_z dọc theo các trục x và y mà còn tác động đến giá trị cực đại của các thành phần này.

- Đối với tấm SSSS, giá trị lớn nhất của E_z và P_z xuất hiện ở giữa của tấm và lớn hơn nhiều so với giá trị nhỏ nhất ở cạnh của tấm.

- Đối với tấm CCCC, giá trị lớn nhất của E_z và P_z đạt giá trị lớn nhất tại tâm của tấm, giá trị nhỏ nhất tại mép của tấm; độ lớn của chúng không khác nhiều so với trường hợp tấm SSSS.

- Đối với tấm CSCS và CCSS, giá trị cực đại của E_z và P_z không xuất hiện ở tâm của tấm mà có xu hướng dịch chuyển về các mép của cạnh có liên kết tựa đơn; độ lớn của chúng không khác nhiều so với trường hợp tấm SSSS.

- Hình 3.16 và Hình 3.17 cũng thể hiện rõ khi tấm nano cố định nhiều hơn một cạnh thì sẽ có những vị trí mà giá trị của E_z and P_z bằng không. Nói cách khác, có một vị trí không có cường độ điện trường và sự phân cực. Ngược lại, đối với tấm SSSS sẽ không xảy ra hiện tượng này. Điều này gợi ý cho các phép đo thực nghiệm để xác định điện trường hoặc điện tích, cần xác định vị trí đo để thu được kết quả tốt nhất.

3.3.4. Tác động của nền đàn hồi

Xem xét tấm nano áp điện với điều kiện biên SSSS (f_{14}^*=3). Thay đổi các giá trị của nền đàn hồi K_w^* và K_s^* trong khoảng từ 0 đến 100, chuyển vị cực đại, ứng suất, cường độ điện trường và sự phân cực điện tích tại tâm của tấm được đưa trong Bảng 3.4. Có thể thấy khi tăng các thông số của nền đàn hồi thì độ võng, ứng suất, cường độ điện trường và sự phân cực của tấm giảm đáng kể.

Bảng 3.4. Giá trị lớn nhất w^*, σ_x^*, τ_{xy}^*, E_z^* và P_z^* với sự thay đổi của nền đàn hồi

K_w^*	K_s^*	w^* $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$	σ_x^* $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)$	τ_{xy}^* $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)$	E_z^*[Vm/N] $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right)$	P_z^*[C/N] $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right)$
0	0	1.730	271.983	0.399	-10.691	$-1.103.10^{-7}$
0	100	0.529	72.407	0.106	-3.025	$-3.200.10^{-8}$
100	0	1.554	240.798	0.353	-9.524	$-9.857.10^{-8}$
	5	1.412	216.671	0.318	-8.608	$-8.924.10^{-8}$
	10	1.292	196.639	0.288	-7.845	$-8.146.10^{-8}$
	20	1.108	165.370	0.242	-6.648	$-6.927.10^{-8}$
	50	0.771	110.199	0.161	-4.518	$-4.744.10^{-8}$
	100	0.510	69.173	0.101	-2.902	$-3.076.10^{-8}$

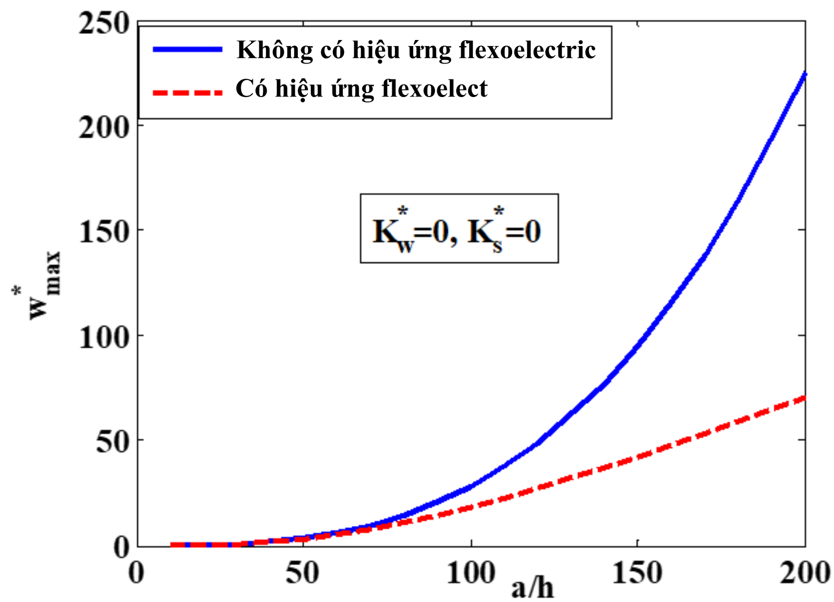
3.3.5. Tác động của chiều dày tấm

Cuối cùng, để thấy rõ hơn độ võng cực đại của tấm khi có và không kể đến hiệu ứng flexoelectric trong trường hợp thay đổi chiều dày h của tấm, mục này đề xuất tỷ số độ võng cực đại như sau:

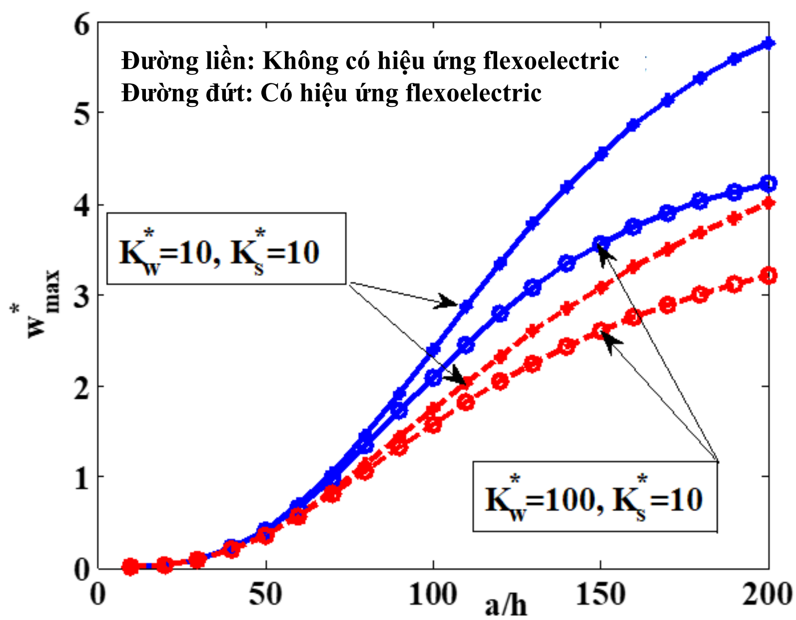
$$R_w = \frac{w_{\max}^*\left(f_{14}=0\right)}{w_{\max}^*\left(f_{14}\neq 0\right)} \tag{3.8}$$

trong đó các tham số không thứ nguyên giống như trong công thức (3.6), một ngoại lệ là $D_f = \dfrac{c_{11}h_0^3}{12}$ với $h_0 = a/100$.

Thay đổi chiều dày h của tấm trong khoảng từ $a/200$ đến $a/10$, sự phụ thuộc của độ võng cực đại vào chiều dày của tấm thể hiện trong Hình 3.18 (f_{14}^*= 1).



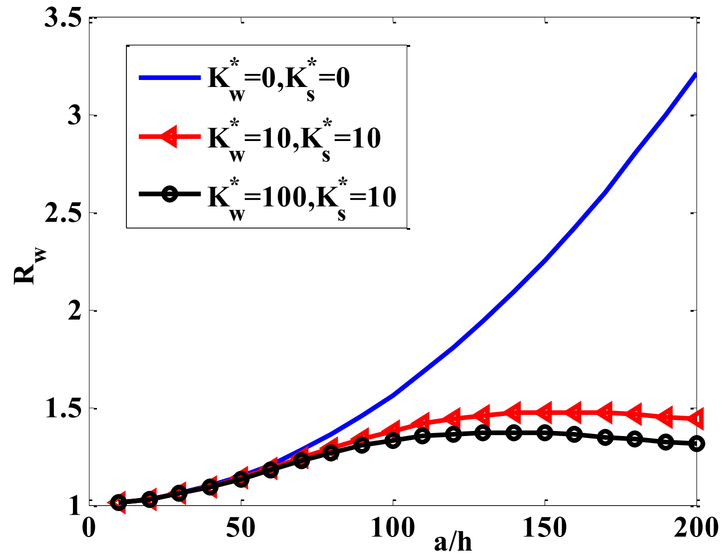
a) $K_w^* = 0,\ K_s^* = 0$



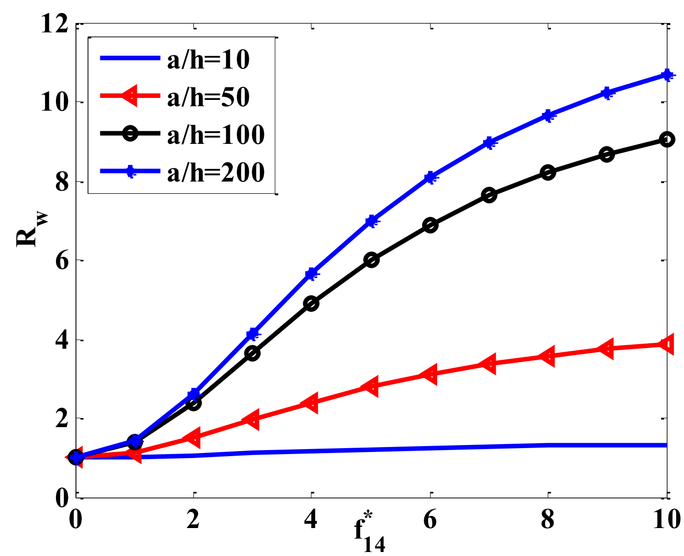
b) $K_w^* = 100,\ K_s^* = 10$

Hình 3.18. Phụ thuộc của độ võng cực đại vào chiều dày của tấm *h* có và không kể đến hiệu ứng flexoelectric, $f_{14}^* = 1$

Tỷ lệ độ võng cực đại R_w được xác định trong phương trình trên được thể hiện trong Hình 3.19 và sự phụ thuộc của R_w vào hệ số f_{14} tương ứng với giá trị khác nhau của chiều dày tấm được mô tả trên Hình 3.20.



Hình 3.19. Tỷ số độ võng cực đại R_w phụ thuộc vào chiều dày của tấm, $f_{14}^* = 1$



Hình 3.20. Tỷ số độ võng cực đại R_w phụ thuộc vào chiều dày h của tấm và hệ số f_{14}^*, $K_w^* = 10$, $K_s^* = 10$

Các nhận xét như sau:

- Chiều dày tấm càng mỏng thì hiệu ứng flexoelectric càng mạnh. Trong trường hợp bỏ qua nền đàn hồi, độ võng cực đại khi có hiệu ứng flexoelectric giảm đi ba lần so với trường hợp bỏ qua hiệu flexoelectric.

- Khi nền đàn hồi tăng, hiệu ứng flexoelectric đối với đáp ứng uốn tĩnh của tấm giảm. Điều này chứng tỏ nền đàn hồi làm giảm tác động của hiệu ứng flexoelectric. Do vậy, trong thực tế thiết kế và sử dụng cần lựa chọn nền đàn hồi phù hợp để thu được chuyển vị và sự phân cực của tấm do tác động của hiệu ứng flexoelectric một cách hợp lý nhất.

- Khi tăng hệ số f_{14} và giảm chiều dày h thì hiệu ứng flexoelectric thể hiện rõ hơn. R_w nhận được giá trị tối đa là 1.3 khi a/h=10. Điều này có nghĩa là khi tính đến hiệu ứng flexoelectric thì độ võng cực đại giảm 30% so với trường hợp bỏ qua hiệu ứng này. Tuy nhiên, khi a/h=200 thì giá trị lớn nhất của R_w là 10. Nói cách khác, độ võng cực đại giảm đi 10 lần so với trường hợp tấm không có hiệu ứng flexoelectric.

- Hình 3.18 và Hình 3.19 cũng cho thấy quy luật biến đổi của w_{max} tùy theo tỷ lệ a/h cũng khác nhau với trường hợp có và không có nền đàn hồi (thể hiện ở dạng đường cong của w_{max} tùy theo tỷ lệ a/h). Điều đó chứng tỏ rằng cả chiều dày và nền đàn hồi đều ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng uốn tĩnh của tấm nano. Kết quả này giúp người thiết kế lưu ý rằng chiều dày h của tấm rất nhạy cảm với hiệu ứng flexoelectric. Tùy theo bài toán thực tế để chọn thông số chiều dày phù hợp với yêu cầu.

3.4. Kết luận chương 3

Chương 3, nghiên cứu sinh trình bày thuật toán tính toán tấm có kích thước nano nằm trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tải trọng tĩnh và xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric. Kết quả chính đạt được trong chương 3 gồm:

- Đã xây dựng thuật toán và chương trình tính toán NFS_2023 để tính toán tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi chịu tải trọng tĩnh và xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric.

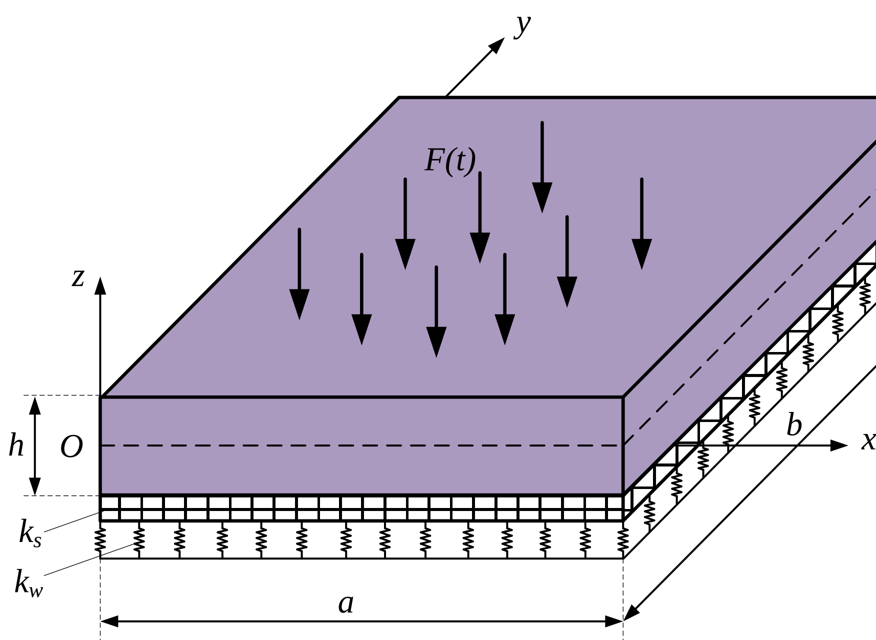
- Kết quả đánh giá cho thấy có nhiều thông số tác động đến đáp ứng uốn tĩnh của các tấm nano tựa trên nền đàn hồi và có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric. Tuy nhiên, có những yếu tố ảnh hưởng lớn như tham số f_{14} thể hiện ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric, tham số hình học của tấm và độ cứng của nền đàn hồi. Vì vậy, khi thiết kế các tấm nano cho các yêu cầu đặc biệt, các kỹ sư cần lưu ý các vấn đề trên để kết cấu làm việc đạt hiệu quả cao nhất.

Nội dung chương này được thể hiện trong công trình số 1, 2 và 3 ở danh mục các bài báo của nghiên cứu sinh.

Chương 4. NGHIÊN CỨU ĐÁP ỨNG ĐỘNG LỰC HỌC CỦA TẤM KÍCH THƯỚC NANO ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI CÓ XÉT ĐẾN HIỆU ỨNG FLEXOELECTRIC

4.1. Đặt vấn đề

Mô hình kết cấu tấm có kích thước nano tựa trên nền đàn hồi chịu tải trọng phân bố thay đổi theo thời gian mô tả như trên Hình 4.1.



Hình 4.1. Mô hình tấm có kích thước nano đặt trên nền đàn hồi hai hệ số chịu tác dụng của tải phân bố thay đổi theo thời gian

Trong chương 4, từ lý thuyết đã thiết lập ở chương 2 và chương trình tính toán được thực hiện trong môi trường MATLAB, tác giả sẽ đi phân tích, đánh giá bài toán kiểm chứng và nghiên cứu ảnh hưởng của các thông số hình học và vật liệu đến đáp ứng dao động tự do và dao động cưỡng bức của kết cấu tấm kích thước nano trên nền đàn hồi có xét đến hiệu ứng flexoelectric.

4.2. Ví dụ kiểm chứng cho bài toán dao động riêng

4.2.1. Ví dụ 1

Xét một tấm vuông tựa đơn bốn cạnh có thông số hình học a/b=1, chiều dày tấm h=a/10 và a/20, cơ tính vật liệu E=380 GPa, $\rho = 3800$ kg/m^3 và ν = 0.3. Hai thông số nền đàn hồi được chuẩn hóa như sau:

$$K_w^* = \frac{k_w a^4}{D_0};\ K_s^* = \frac{k_s a^2}{D_0};\ D_0 = \frac{E_0 h^3}{12\left(1-\nu^2\right)};\ \ E_0 = 70 \text{ GPa} \tag{4.1}$$

Thông số cần so sánh là tần số dao động riêng đầu tiên, được tính theo công thức không thứ nguyên như sau: $\varpi = \omega_1 h\sqrt{\rho_0 / E_0};\ \rho_0 = 2707$ kg/m^3.

Kết quả tần số dao động riêng không thứ nguyên đầu tiên và các kết quả tính được bằng phương pháp giải tích [126] được thể hiện trong Bảng 4.1, trong đó, luận án xem xét các lưới chia phần tử khác nhau. Có thể thấy rằng các kết quả hội tụ với lưới 100 phần tử. Và lưới chia này cho kết quả với độ chính xác chấp nhận được.

Bảng 4.1. Bảng kết quả tần số dao động riêng không thứ nguyên đầu tiên ϖ

K_w^*	K_s^*	a/h	Phương pháp giải tích [126]	Luận án			
				4x4 phần tử	8x8 phần tử	10x10 phần tử	16x16 phần tử
100	0	10	0.1162	0.1129	0.1154	0.1157	0.1160
	100		0.1619	0.1591	0.1612	0.1614	0.1617
	0	20	0.0298	0.0289	0.0296	0.0296	0.0297
	100		0.0411	0.0404	0.0409	0.0410	0.0411

4.2.2. Ví dụ 2

Ví dụ này xem xét dao động tự do của tấm có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric. Thông số hình học và vật liệu PZT-5H gồm a=b=1000 nm, chiều dày h, c_{11}=102 GPa; c_{33}=35.5 GPa; c_{12}=31 GPa; e_{31}=-17.05 C/m^2; k_{33}=1.76x10^{-8} C/(Vm); f_{14}=10^{-7} C/m, và khối lượng riêng 7600 kg/m^3. Các tần số đầu tiên nhận được từ công thức chính xác [55] và luận án được trình bày trong Bảng 4.2.

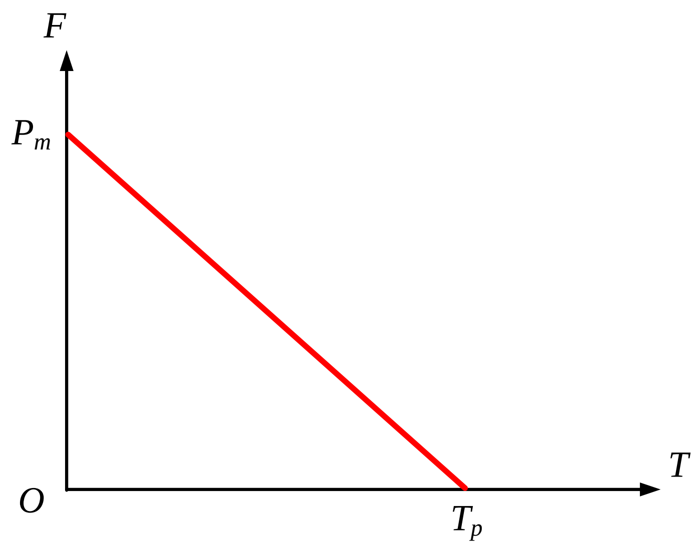
Bảng 4.2. Tần số cơ bản ω (GHz) của tấm kích thước nano có kể đến hiệu ứng flexoelectric

a/h	Công thức chính xác [55]	Luận án			
		16 phần tử	64 phần tử	100 phần tử	256 phần tử
50	0.48132	0.46445	0.47666	0.47824	0.47998
100	0.28243	0.27058	0.27838	0.27938	0.28048
150	0.22723	0.21622	0.22291	0.22377	0.22471
200	0.20442	0.19361	0.19988	0.20068	0.20156

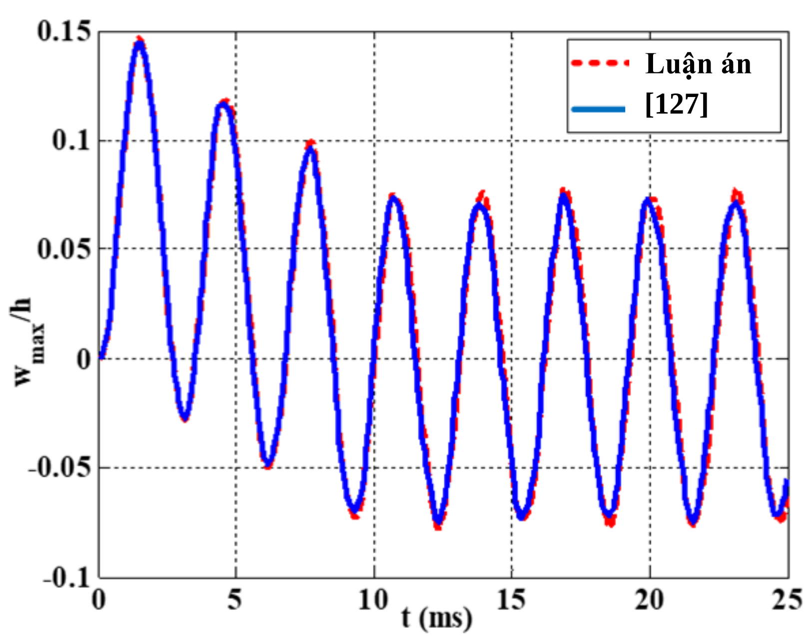
Từ hai ví dụ trên, có thể thấy với lưới chia 100 phần tử, độ chính xác tính toán có thể chấp nhận được. Do đó, lưới chia phần tử này sẽ được sử dụng cho tất cả các khảo sát tiếp theo.

4.3. Ví dụ kiểm chứng cho bài toán động lực học

Phần này kiểm chứng thuật toán và chương trình phân tích bài toán dao động cưỡng bức của tấm. Xem xét tấm vuông cạnh a = 0.45m, chiều dày tấm h = a/10; cơ tính vật liệu E = 3 GPa, ν = 0.34, và ρ = 1200 kg/m^3. Tấm chịu tải trọng phân bố dạng hình tam giác có dạng biểu đồ biến đổi theo thời gian như thể hiện ở Hình 4.2, với P_m = 500 kPa và T_p = 0.01s. Kết quả tính toán chuyển vị tại giữa tấm biến đổi theo thời gian được so sánh với kết quả tính bằng lời giải Navier trong công trình của Song và cộng sự [127] thể hiện trên Hình 4.3. Kết quả này chứng minh độ tin cậy của lý thuyết tính toán sử dụng trong luận án.



Hình 4.2. Mô hình tải trọng biến đổi theo thời gian



Hình 4.3. So sánh chuyển vị của điểm giữa tấm biến đổi theo thời gian

4.4. Khảo sát các yếu tố tác động đến dao động riêng của tấm

Kết quả dao động riêng của tấm có kích thước nano được trình bày trong mục này, trong đó ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric được tính đến. Tấm nano có các đặc trưng hình học và vật liệu PZT-5H như sau: h =*20* nm, a=b = 50h, c_{11}=102 GPa, c_{33}=35.5 GPa; c_{12}=31 GPa, e_{31}=-17.05 C/m^2, k_{33}=1.76x10^{-8} C/(Vm), và khối lượng riêng 7600 kg/m^3.

Các đại lượng không thứ nguyên được chuẩn hóa:

$$\omega_i^* = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{\pi^4 D_F}}; K_w^* = \frac{k_w a^4}{D_F};\ K_s^* = \frac{k_s a^2}{D_F};\ D_F = \frac{c_{11} h^3}{12};\ f_{14}^* = \frac{f_{14}}{f_{14}^0};\ f_{14}^0 \tag{4.2}$$

$$= 10^{-7}\ \text{C/m}.$$

4.4.1. Tác động của hiệu ứng flexoelectric

Trong tiểu mục này, luận án trình bày ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric đối với dao động riêng của tấm nano trên nền đàn hồi. Giá trị của f_{14} thay đổi để tham số f_{14}^* lấy giá trị từ 0 đến 5.

Trường hợp f_{14}^* = 0 có nghĩa là hiệu ứng flexoelectric bị bỏ qua, do đó, luận án đưa ra tham số k_ω để trình bày sự thay đổi tần số trong trường hợp có và không có hiệu ứng flexoelectric.

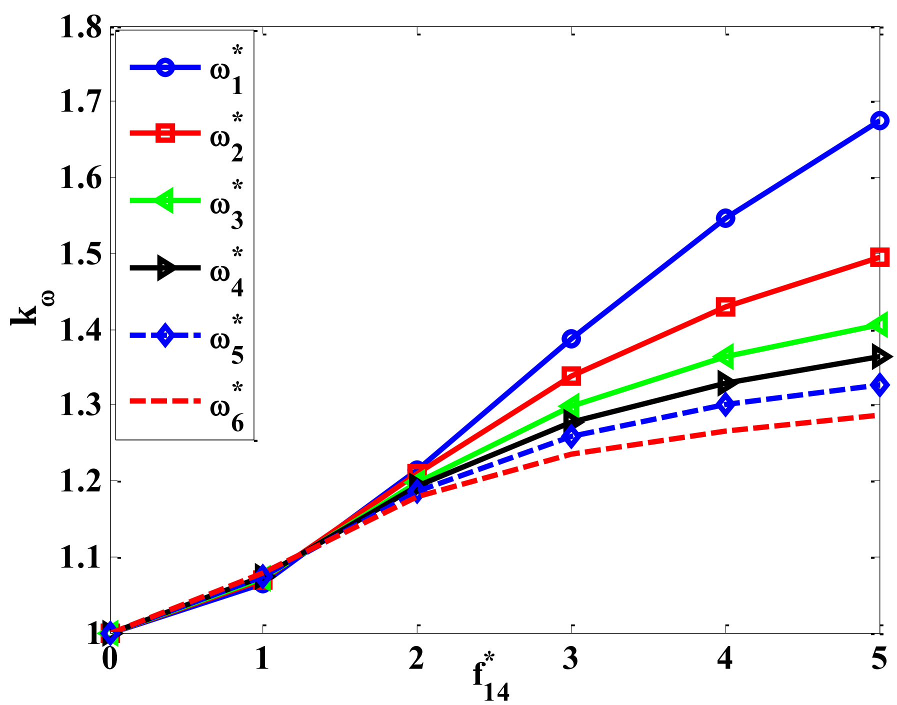
$$k_\omega = \frac{\omega_i^*(f_{14}^* \neq 0)}{\omega_i^*(f_{14}^* = 0)} \tag{4.3}$$

Sự thay đổi của các tần số dao động riêng ω_i^* của tấm nano có bốn cạnh tựa đơn vào tham số được đưa ra ở Bảng 4.3.

Bảng 4.3. Phụ thuộc của các tần số dao động riêng ω_i^* của tấm nano có bốn cạnh tựa đơn vào tham số f_{14}^*, K_w^*= 10, K_s^*=2

f_{14}^*	ω_i^*					
	ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_4^*	ω_5^*	ω_6^*
0	2.2558	5.4243	8.4853	10.6913	13.5706	18.0115
1	2.3992	5.8007	9.0909	11.4799	14.5822	19.4298
2	2.7403	6.5600	10.1685	12.7563	16.0864	21.2302
3	3.1312	7.2516	11.0135	13.6602	17.0669	22.2509
4	3.4858	7.7584	11.5672	14.2157	17.6427	22.8143
5	3.7778	8.1120	11.9296	14.5697	18.0051	23.1685

Sự phụ thuộc của k_ω vào giá trị của f_{14}^* được trình bày trong Hình 4.4.



Hình 4.4. Sự phụ thuộc của k_ω vào giá trị f_{14}^*, SSSS, K_w^*= 10, K_s^*=2

Các kết quả chỉ ra rằng:

- Phụ thuộc của các tần số dao động riêng của tấm nano có bốn cạnh tựa đơn vào tham số f_{14} được thể hiện ở Bảng 4.3 cho biết khi $f_{14}^{*} = 0$ thì tần số đạt giá trị nhỏ nhất. Khi f_{14}^{*} càng lớn thì tần số tự nhiên càng lớn. Do khối lượng bản thân tấm nano không bị tác động bởi hiệu ứng flexoelectric nên độ cứng của tấm tăng lên khi f_{14} tăng. Điều này được giải thích cụ thể là khi giá trị của f_{14}^{*} khác 0, ma trận độ cứng của phần tử tấm sẽ được thêm một thành phần liên quan f_{14}, do đó độ cứng của tấm tăng lên, nhưng ma trận khối lượng của tấm không thay đổi và kết quả là tần số tự nhiên của tấm tăng lên.

- Hình 4.4 cho thấy khi f_{14} tăng thì giá trị của k_{ω} cũng tăng theo. Giá trị nhỏ nhất của k_{ω} xấp xỉ 1.06 tương ứng với trường hợp f_{14}^{*} bằng 1. Điều này có nghĩa là tần số dao động riêng khi có hiệu ứng flexoelectric tăng 1.06 lần so với khi bỏ qua hiệu ứng này, và giá trị lớn nhất của k_{ω} xấp xỉ 1,68 tương ứng với trường hợp $f_{14}^{*} = 5$ (tức là tần số dao động riêng khi có hiệu ứng flexoelectric tăng khoảng 1.68 lần so với khi bỏ qua hiệu ứng này).

- Khi f_{14} có giá trị càng lớn, k_{ω} tương ứng với tần số tự nhiên đầu tiên đạt giá trị lớn nhất. Điều này có nghĩa là tần số tự nhiên khi tính đến hiệu ứng flexoelectric sẽ tăng nhiều nhất. Kết quả nghiên cứu cho thấy sự thay đổi của hiệu ứng này đối với đáp ứng dao động tự do của các tấm nano. Đối với tần số cao hơn (ω_4 và ω_5), trường hợp $f_{14}^{*} > 2$ thì đường cong gần như nằm ngang, điều này cũng có nghĩa là ảnh hưởng không nhiều của hiệu ứng flexoelectric lên tần số cao của tấm.

4.4.2. Tác động của điều kiện biên

Tác động của điều kiện liên kết đối với đáp ứng dao động tự do của tấm kích thước nano có và không kể đến hiệu ứng flexoelectric được nghiên cứu trong tiểu mục này. Sáu trường hợp điều kiện liên kết được xem xét gồm: SSSS, CCCC, CCSS, CSCS, CFCF và CFFF. Các tần số không thứ nguyên đầu tiên của các tấm nano được liệt kê trong Bảng 4.4. Tấm có điều kiện liên kết CCCC có tần số dao động riêng lớn nhất trong khi tấm có điều kiện liên kết CFFF có tần số dao động riêng thấp nhất. Thực tế tấm càng bị giới hạn nhiều bậc tự do thì độ cứng của nó sẽ tăng và tần số dao động tự nhiên của tấm sẽ tăng lên.

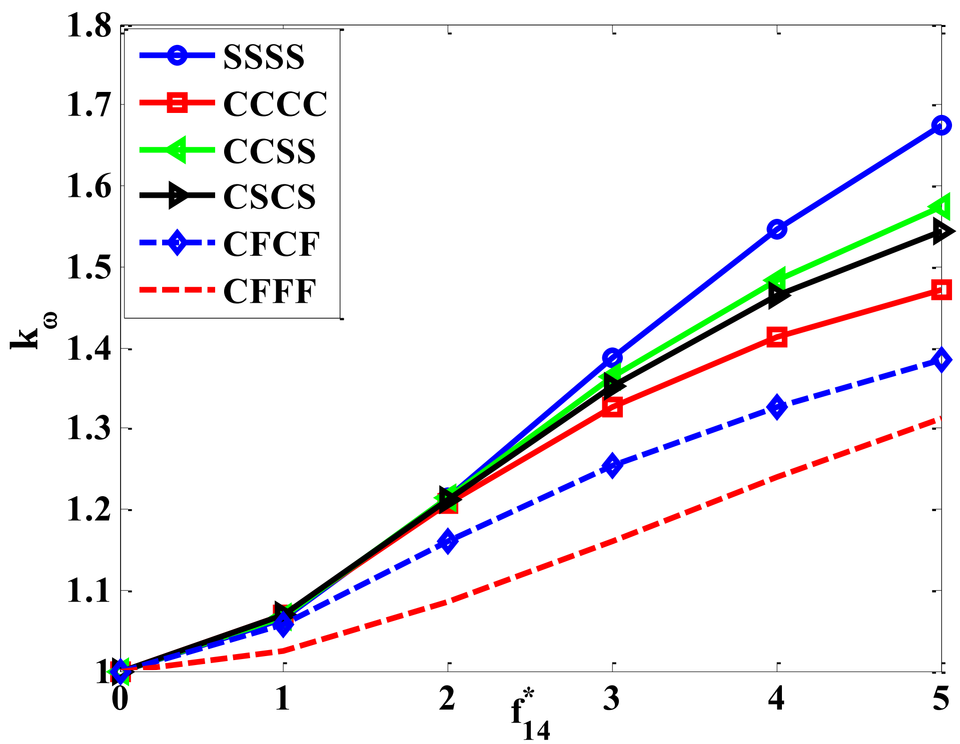
Bảng 4.4. Phụ thuộc của các tần số cơ bản vào tham số f_{14}^*, K_w^*= 10, K_s^*=2

f_{14}^*	ω_1^*					
	SSSS	CCCC	CCSS	CSCS	CFCF	CFFF
0	2.2558	3.9476	3.0167	3.2131	2.4725	0.5796
1	2.3992	4.2245	3.2187	3.4312	2.6118	0.5942
2	2.7403	4.7619	3.6607	3.8942	2.8671	0.6293
3	3.1312	5.2355	4.1117	4.3478	3.0976	0.6731
4	3.4858	5.5742	4.4767	4.7018	3.2806	0.7180
5	3.7778	5.8070	4.7500	4.9598	3.4248	0.7611

Hình 4.5 trình bày sự phụ thuộc của k_ω ứng với tần số không thứ nguyên đầu tiên vào hệ số f_{14}^* ứng với 6 trường hợp điều kiện biên. Đối với biên CFFF, tấm nano có tần số nhỏ nhất và đối với biên CCCC, tấm nano có tần số cao nhất.

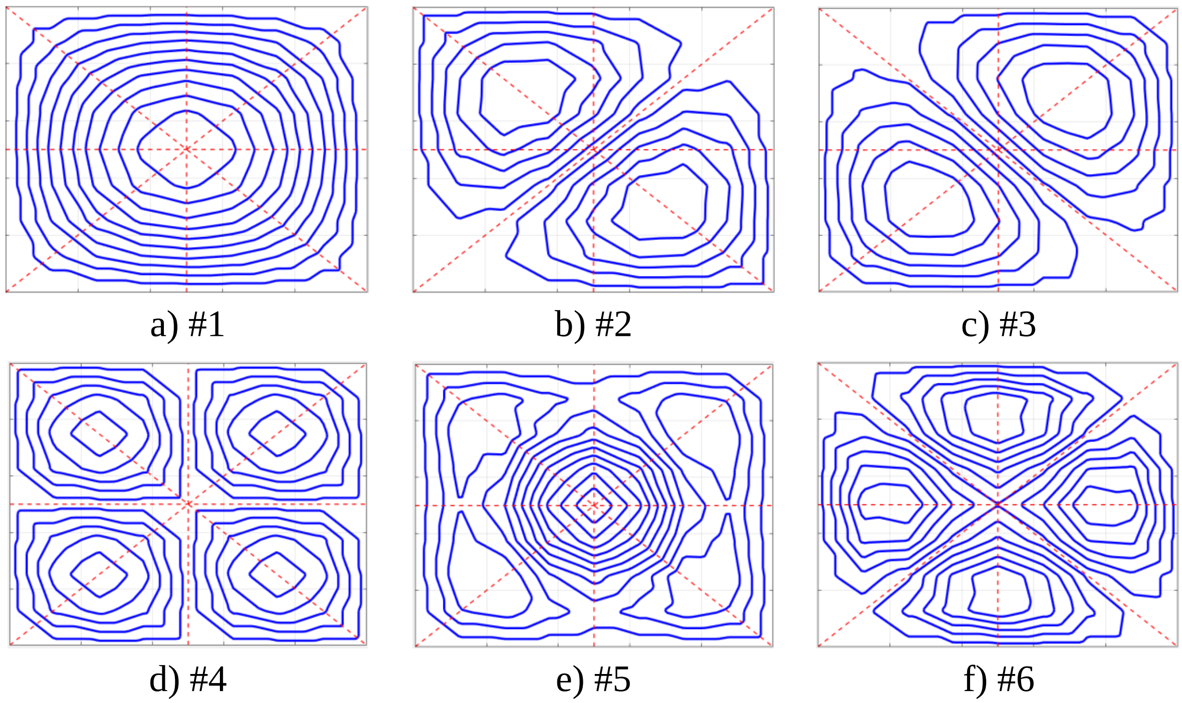
Tuy nhiên, khi tính đến hiệu ứng flexoelectric, khi hệ số f_{14}^* tăng, tấm SSSS có k_ω cao nhất và tấm CFFF có k_ω nhỏ nhất. Điều này cũng có nghĩa là tấm có điều kiện biên SSSS bị ảnh hưởng nhiều nhất bởi hiệu ứng flexoelectric và tấm có điều kiện biên CFFF ít bị ảnh hưởng nhất.

Do đó, có thể kết luận rằng các điều kiện biên có ảnh hưởng đáng kể đến dao động tự do của tấm nano.

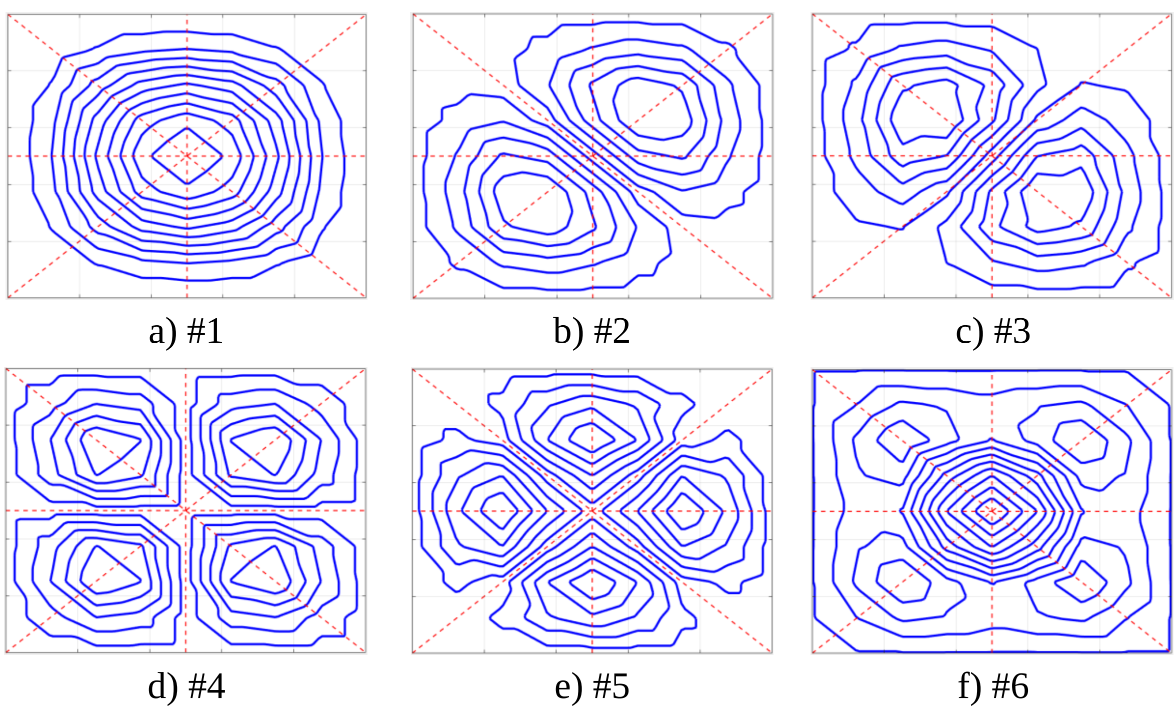


Hình 4.5. Phụ thuộc của k_ω ứng với tần số cơ bản đầu tiên ω_1^* vào hệ số f_{14}^* và điều kiện liên kết, $K_w^* = 10$, $K_s^* = 2$

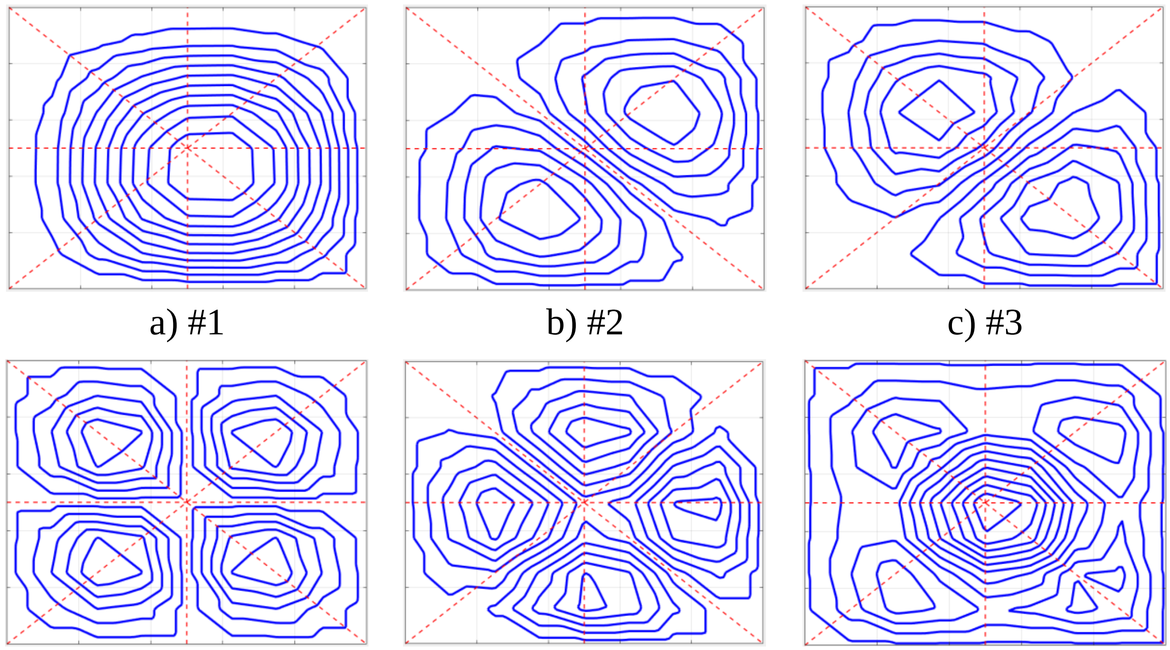
Trên các Hình 4.6 đến Hình 4.11 thể hiện sáu dạng dao động cơ bản của tấm nano với điều kiện biên khác nhau. Có thể kết luận rằng điều kiện biên có ảnh hưởng cả tần số dao động riêng cũng như các dạng dao động riêng của tấm nano.



Hình 4.6. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, SSSS



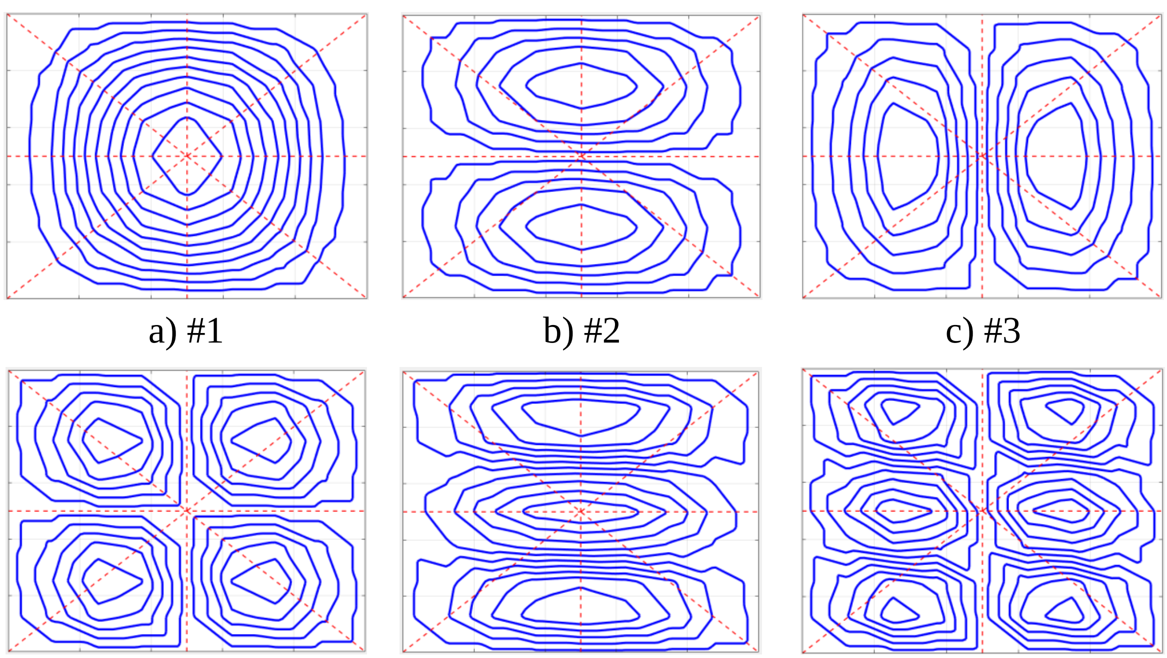
Hình 4.7. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CCCC



a) #1 b) #2 c) #3

d) #4 e) #5 f) #6

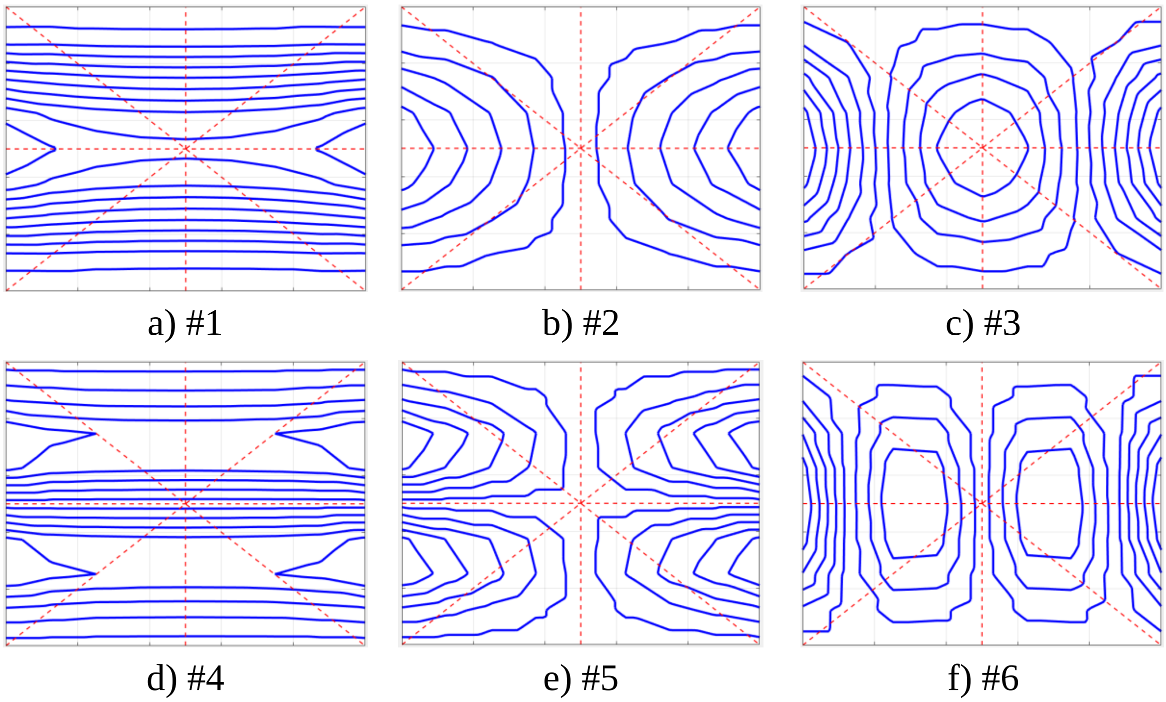
Hình 4.8. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CCSS



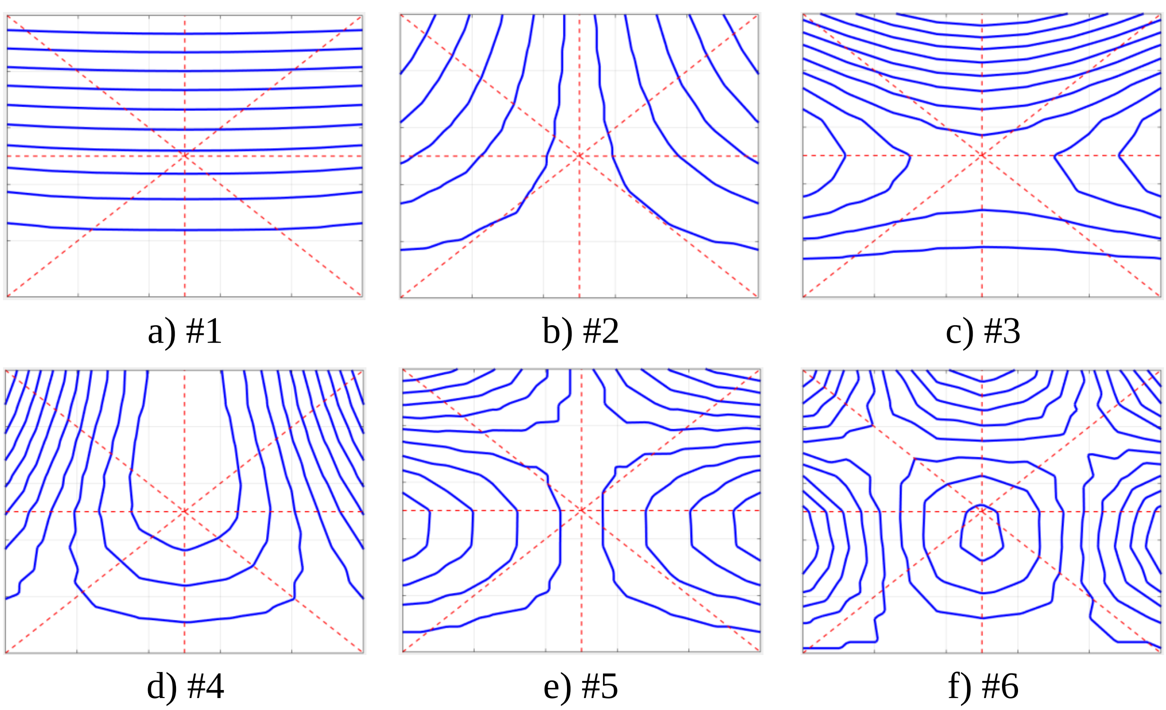
a) #1 b) #2 c) #3

d) #4 e) #5 f) #6

Hình 4.9. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CSCS



Hình 4.10. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CFCF



Hình 4.11. Sáu dạng dao động cơ bản của tấm vuông nano, CFFF

4.5. Khảo sát các yếu tố tác động đến đáp ứng động của tấm

Tấm có kích thước nano với điều kiện biên tựa đơn bốn cạnh SSSS; thông số hình học h=20 nm, a=b=50h; cơ tính vật liệu PZT-5H: c_{11}=102 GPa, c_{33}=35.5 GPa; c_{12}=31 GPa, e_{31}=-17.05 C/m^2, và κ_{33}=1.76x10^{-8} C/(Vm). Tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số k_w và k_s.

Tải trọng tác dụng đều lên tấm có biểu thức:

$$P = P_0.\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).F(t)$$
$$F(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\omega.t}{t_1}\right) & 0 \le t \le t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \tag{4.4}$$

trong đó biên độ tải là P_0=5.10^4 N/m^2 và thời gian t = 0.8t_1.

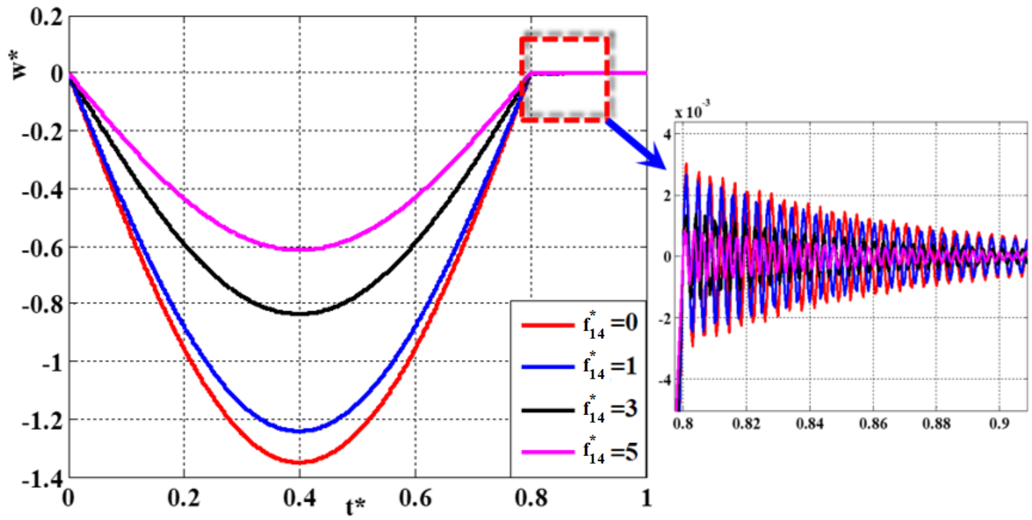
Các đại lượng được chuẩn hóa như sau:

$$w^* = \frac{10^3 c_{11} h_0^3}{12 P_0 a^4} w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right);\ f_{14}^* = \frac{f_{14}}{f_{14}^0};\ K_w^* = \frac{k_w a^4}{D_f};\ K_s^* = \frac{k_s a^2}{D_f};$$
$$D_f = \frac{c_{11} h_0^3}{12};\ \left\{\sigma_x^*, \tau_{xz}^*\right\} = \frac{1}{P_0}\left\{\sigma_x, \tau_{xz}\right\}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right) \tag{4.5}$$

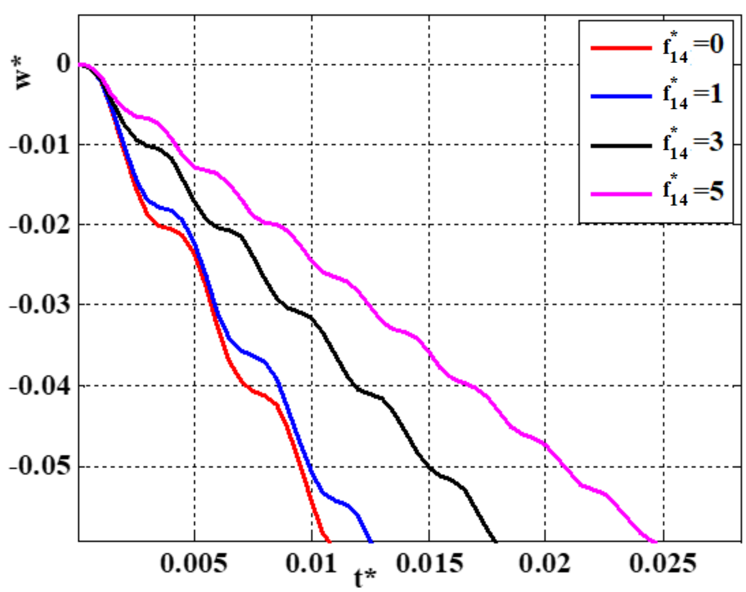
với f_{14}^0 = 10^{-7} C/m và h_0 = a/50.

4.5.1. Tác động của hiệu ứng flexoelectric

Xem xét tấm nano tựa đơn bốn cạnh nằm trên nền hai hệ số (K_w^*=100, K_s^*=10). Để đánh giá rõ tác động của hệ số f_{14} đến đáp ứng động của kết cấu, thay đổi sao cho f_{14}^* nhận giá trị trong khoảng 0 đến 5 (Khi f_{14}^* = 0 tương ứng với trường hợp bỏ qua hiệu ứng flexoelectric). Các kết quả về đáp ứng chuyển vị *w** và ứng suất theo thời gian σ_x^* được mô tả trong Hình 4.12 và Hình 4.13.

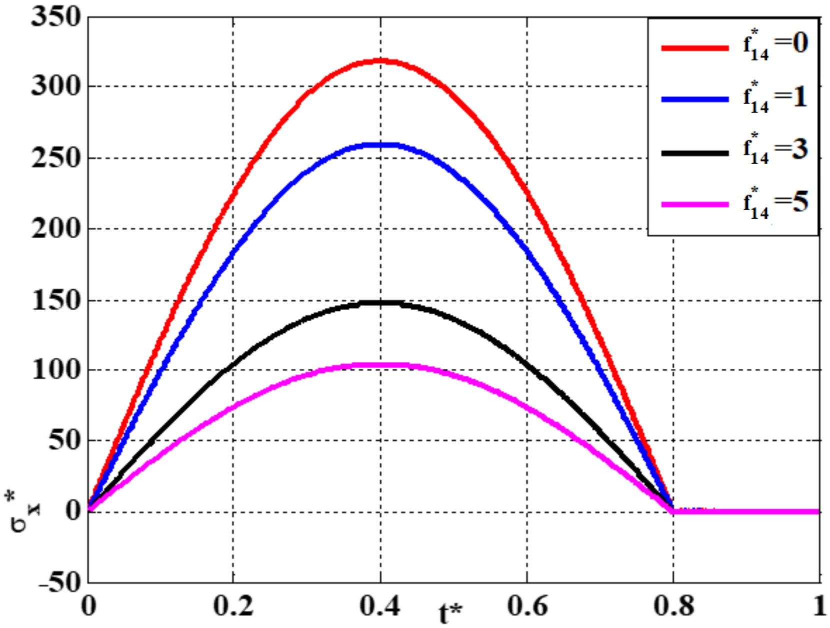


a) Khi *t** = 0-1

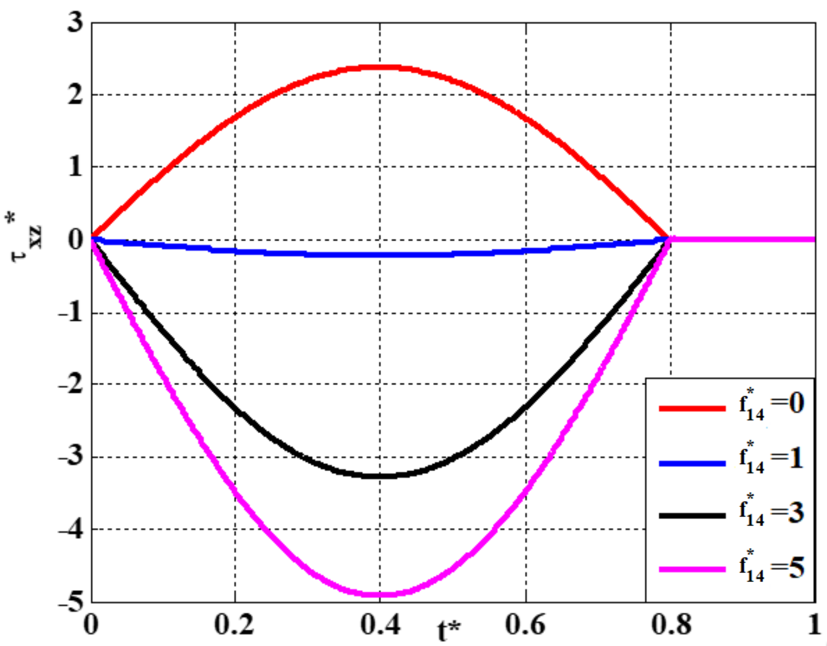


b) Khi *t** = 0-0.025

Hình 4.12. Đáp ứng chuyển vị *w** với thời gian và hệ số f_{14}^*, $t^* = t/t_1$, $\omega = \pi$



a) σ_x^*



b) τ_{xz}^*

Hình 4.13. Đáp ứng ứng suất σ_x^* và τ_{xz}^* với thời gian và hệ số $f_{14}^*, \omega = \pi$

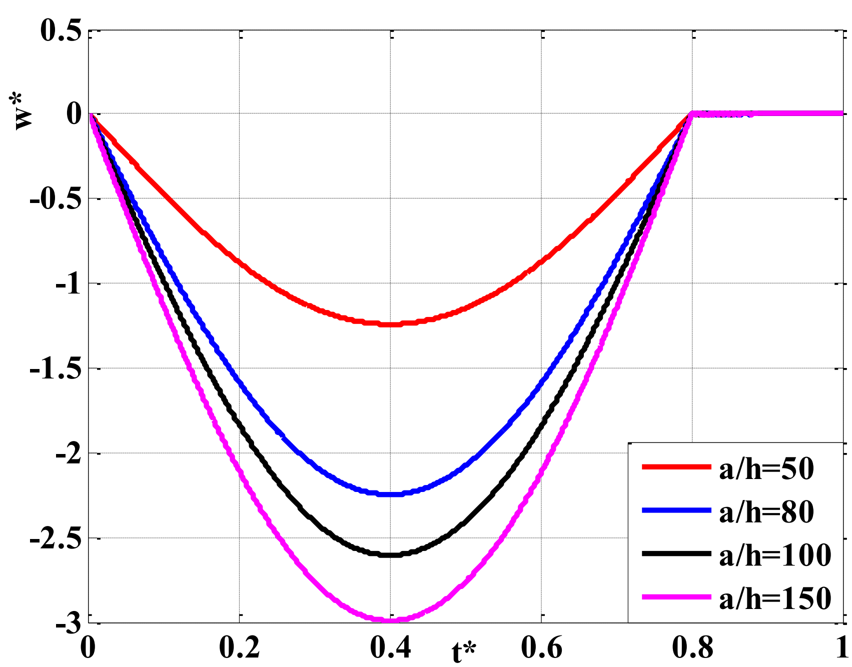
Kết quả cho thấy:

- Khi xét đến tác động của hiệu ứng flexoelectric (tức là f_{14} khác 0) thì chuyển vị cực đại của tấm giảm đi. Khi ngoại lực ngừng tác dụng lên kết cấu thì tấm có kích thước nano chuyển sang dao động tắt dần.

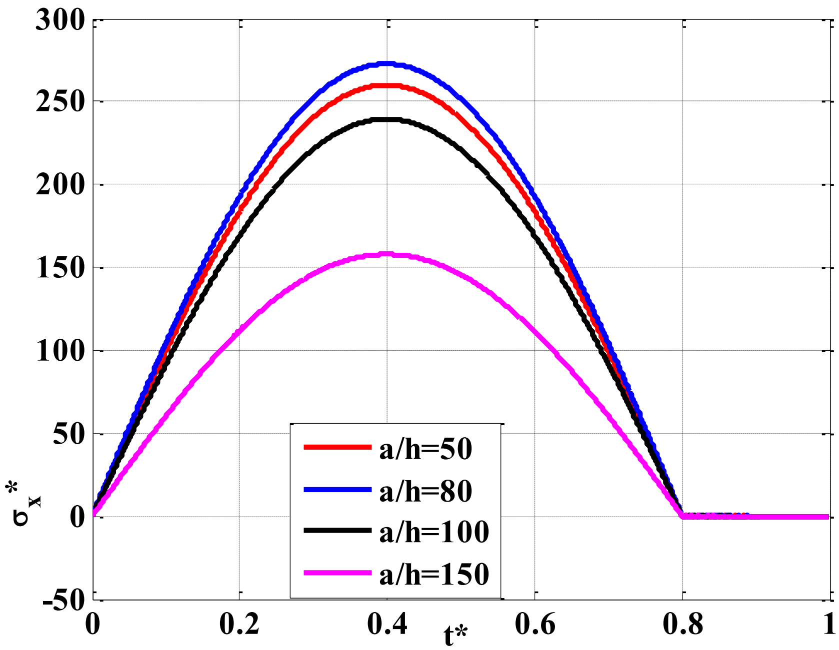
- Mặc dù hệ số f_{14} tăng nhưng chuyển vị cực đại của tấm giảm. Tuy nhiên, quy luật biến đổi của ứng suất tiếp cực đại τ_{xz}^{*} của tấm khác với quy luật biến đổi của chuyển vị *w** và ứng suất pháp σ_{x}^{*}. Điều này là do tham số f_{14} ảnh hưởng đến độ cứng của tấm. Đây là một hiện tượng đặc biệt, hoàn toàn khác với các kết cấu thông thường.

4.5.2. Tác động của chiều dày tấm

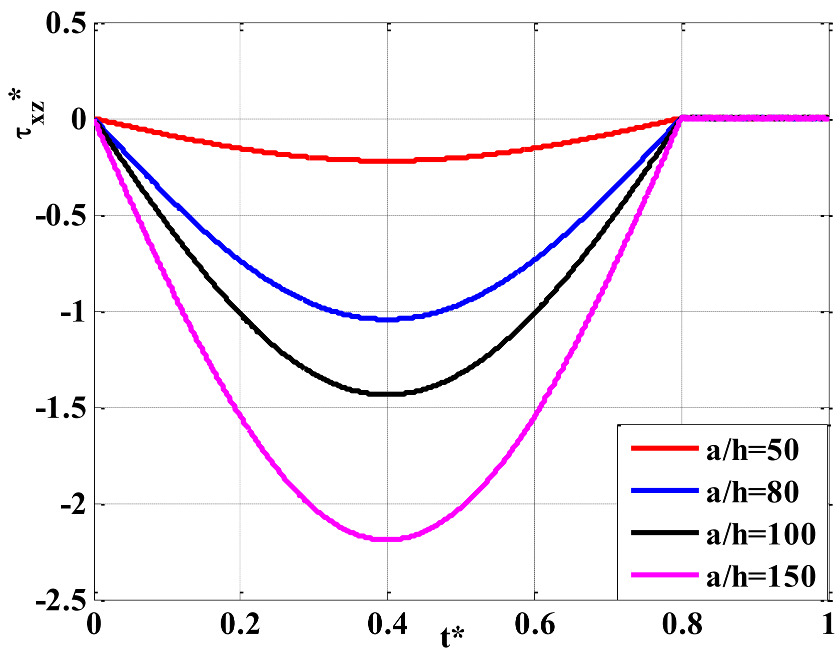
Chiều dày tấm *h* thay đổi sao cho tỷ lệ *a*/*h* thay đổi từ 50 đến100. Đáp ứng động của tấm được mô tả trong Hình 4.14 và Hình 4.15.



Hình 4.14. Đáp ứng chuyển vị *w** với thời gian và tỷ lệ *a*/*h*, $\omega = \pi$



a) σ_x^*



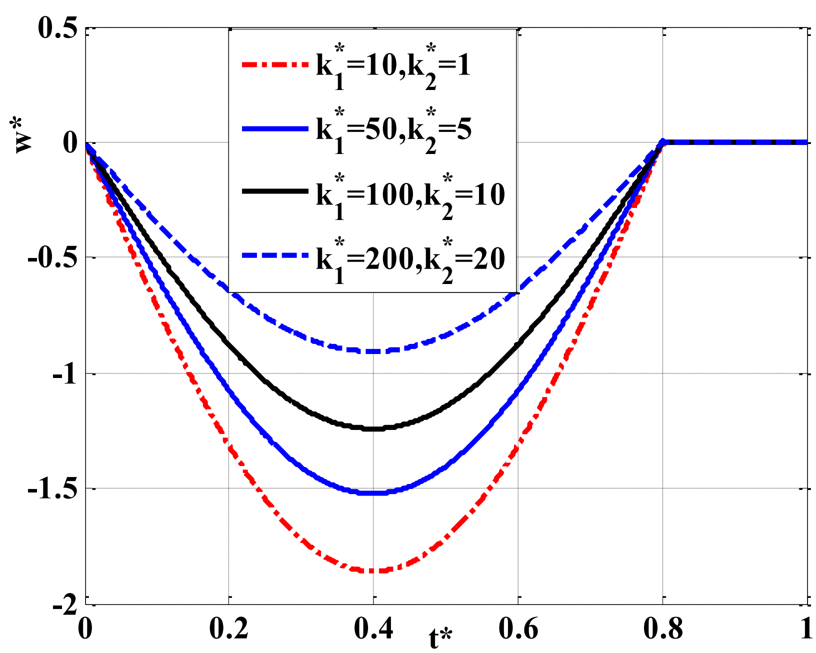
b) τ_{xz}^*

Hình 4.15. Đáp ứng ứng suất σ_x^* và τ_{xz}^* với thời gian và tỷ lệ a/h, $\omega = \pi$

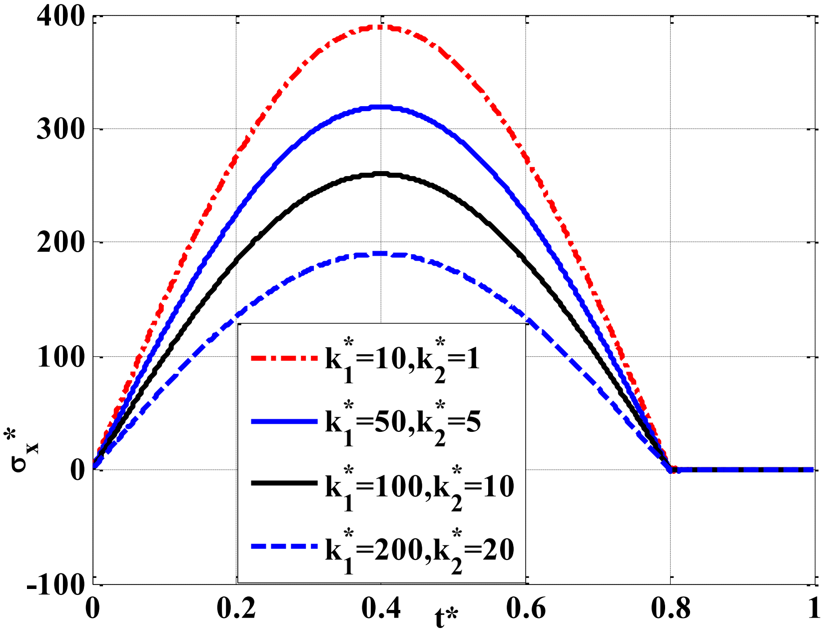
Có thể thấy rằng khi chiều dày tấm giảm xuống, chuyển vị lớn nhất và ứng suất pháp lớn nhất của tấm tăng lên. Tuy nhiên, sự gia tăng của chuyển vị lớn nhất là không đồng đều. Có thể thấy rõ là khi chiều dày tấm giảm và nằm trong khoảng *a*/50 và *a*/80, chuyển vị lớn nhất và ứng suất lớn nhất thay đổi nhiều hơn khi chiều dày tấm thay đổi từ *a*/80 đến *a*/150.

4.5.3. Tác động của nền đàn hồi

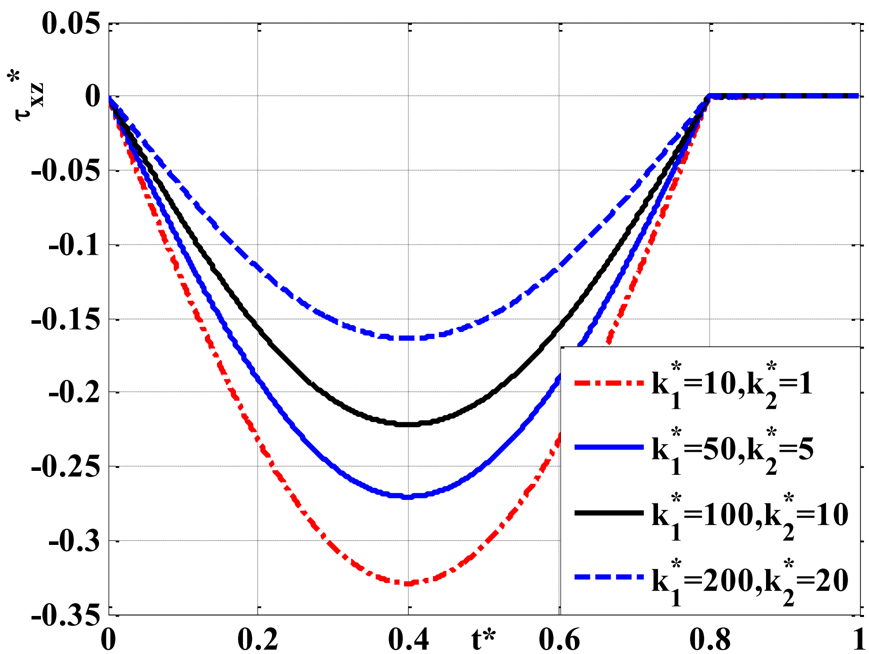
Để nghiên cứu tác động của nền đàn hồi đến đáp ứng động của tấm kích thước nano có tính đến hiệu ứng flexoelectric, cho hệ số nền đàn hồi thứ nhất thay đổi từ 10 đến 200, trong khi hệ số nền đàn hồi thứ hai thay đổi từ 1 đến 20. Đáp ứng chuyển vị *w**, ứng suất pháp và ứng suất tiếp của tấm nano được đưa ra như trong Hình 4.16 và Hình 4.17. Kết quả cho thấy hệ số nền đàn hồi càng cao thì năng lượng của tấm càng lớn, tấm càng cứng. Khi đó, độ dịch chuyển lớn nhất và ứng suất lớn nhất của tấm nano cũng giảm.



Hình 4.16. Đáp ứng chuyển vị *w** với thời gian và nền đàn hồi, $\omega = \pi$



a) σ_x^*

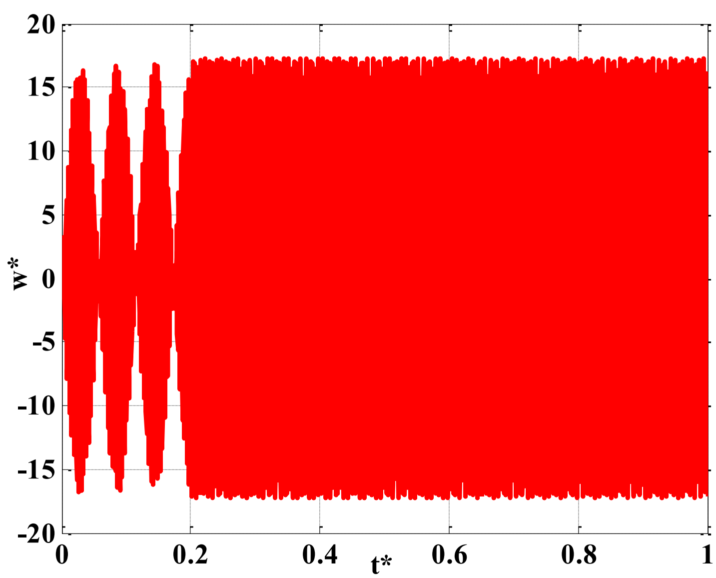


b) τ_{xz}^*

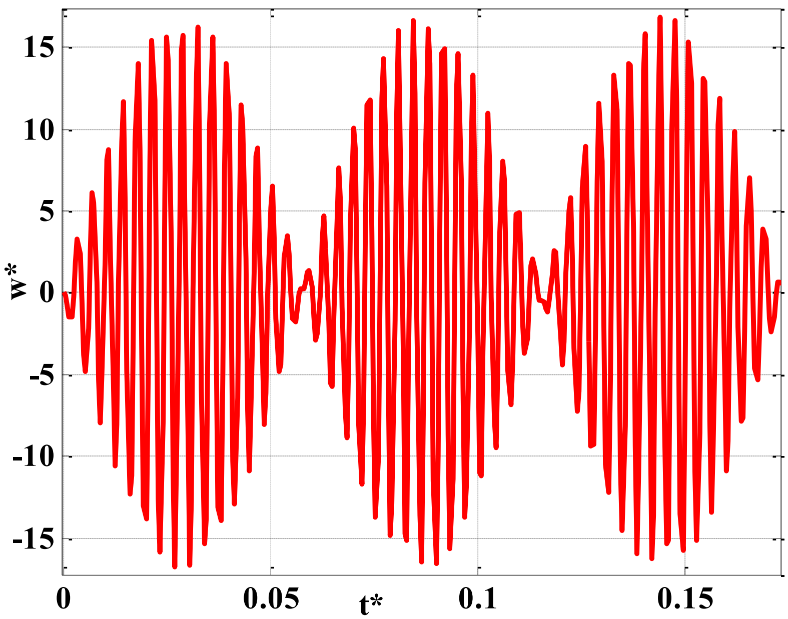
Hình 4.17. Đáp ứng ứng suất σ_x^* và τ_{xz}^* với thời gian và nền đàn hồi, $\omega = \pi$

4.5.4. Tác động của tần số lực kích động

Để xem xét tác động của tần số ngoại lực đến đáp ứng của tấm có kích thước nano, luận án xét hai trường hợp bỏ qua cản và xét đến cản của kết cấu, tương ứng với trường hợp tần số ngoại lực kích động xa tần số dao động của tấm và tần số ngoại lực kích động bằng với tần số dao động cơ bản đầu tiên của tấm. Kết quả tính toán chuyển vị w^* biến đổi theo thời gian được mô tả như trên Hình 4.18 và Hình 4.19. Có thể thấy rằng trong khoảng thời gian ngoại lực còn tác dụng lên tấm, chuyển vị của tấm biến đổi tuần hoàn theo chu kỳ liên quan đến tần số của tấm và của lực kích động. Khi ngoại lực ngừng tác dụng: Trường hợp bỏ qua cản thì chuyển vị của tấm dao động tự do và không tắt dần, nhưng trong trường hợp có tính đến cản thì chuyển vị của tấm dao động tắt dần. Ngoài ra, giá trị lớn nhất chuyển vị w^* với trường hợp không có cản lớn hơn so với trường hợp có xét đến cản, điều này có thể gây bất lợi cho tấm. Do vậy, trong thực tế, để tránh những trường hợp bất lợi do ngoại lực gây ra, chúng ta cần lựa chọn tần số kích thích xa tần số dao động riêng của tấm.

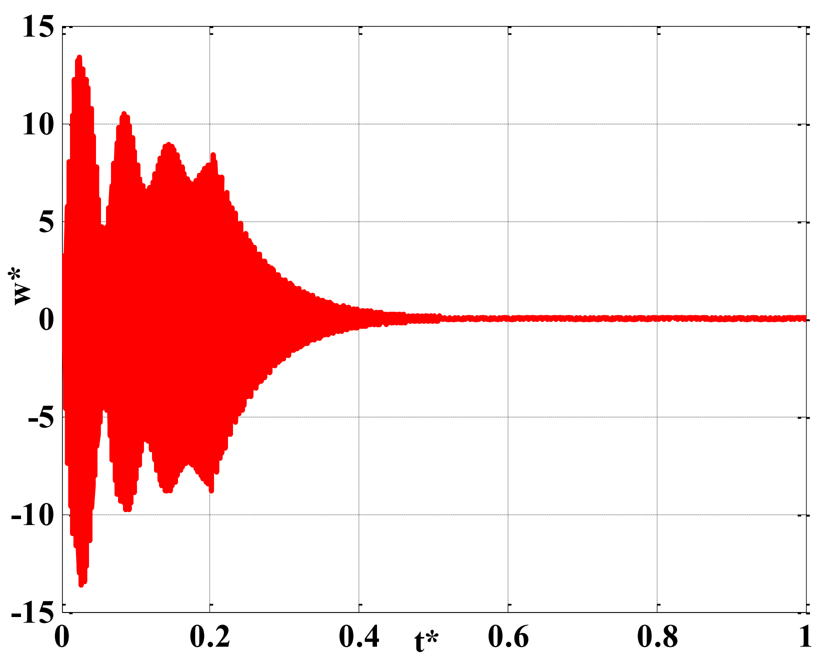


a) Khi $t^* = 0\text{-}1$, $t_1 = 0.2t$

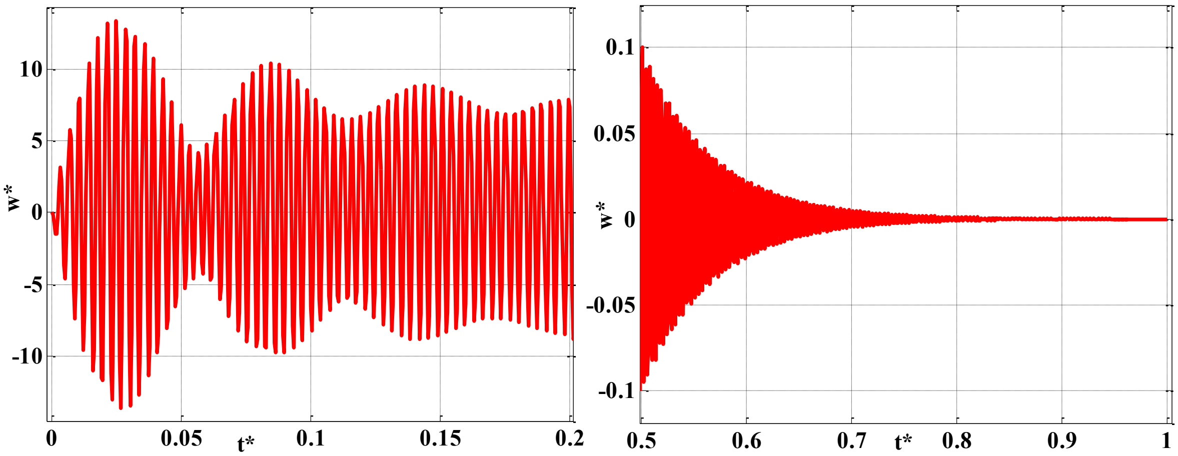


b) Khi t^* = 0-0.2, $t_1 = 0.2t$

Hình 4.18. Đáp ứng chuyển vị w^* theo thời gian trong trường hợp không cản, tần số ngoại lực bằng tần số dao động cơ bản đầu tiên của tấm ($\omega = \omega_1 t_1$)



a) Khi t^* = 0-1, $t_1 = 0.2t$



b) Khi *t** = 0-0.2 c) Khi *t** = 0.5-1

Hình 4.19. Đáp ứng chuyển vị *w** theo thời gian trong trường hợp có xét đến cản, tần số của ngoại lực bằng tần số dao động cơ bản đầu tiên của tấm ($\omega = \omega_1 t_1$)

4.6. Kết luận chương 4

Chương này trình bày bài toán dao động riêng và cưỡng bức của tấm kích thước nano đặt trên nền đàn hồi hai hệ số có xét đến hiệu ứng flexoelectric. Từ thuật toán, chương trình tính và kết quả đánh giá, tác giả rút ra một số kết luận chính như sau:

- Xây dựng lưu đồ thuật toán và chương trình tính toán NFFV_2023 và NFD_2023 để phân tích bài toán dao động tự do và dao động cưỡng bức.

- Kết quả đánh giá cho thấy có nhiều yếu tố tác động đến dao động tự do và dao động cưỡng bức của tấm nano đặt trên nền đàn hồi, đặc biệt là tác động của hiệu ứng flexoelectric.

Từ những kết quả này, khi thiết kế các tấm nano cho các yêu cầu đặc biệt, các kỹ sư cần lưu ý để cấu trúc hoạt động đạt hiệu suất cao.

Kết quả trong chương này được thể hiện trong công trình số 2 và 4 ở danh mục các bài báo của nghiên cứu sinh.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Những đóng góp mới của luận án

Dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn và lý thuyết biến dạng cắt cải tiến hàm hyperbol, luận án đã nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh, dao động riêng và cưỡng bức của tấm có kích thước nano đặt trên nền đàn hồi xét đến hiệu ứng flexoelectric. Một số đóng góp mới của luận án như sau:

- Tổng hợp và phân tích được các tài liệu liên quan tới hiệu ứng flexoelectric và chỉ ra tiềm năng ứng dụng trong ngành kỹ thuật hiện đại.

- Thiết lập được mô hình, thuật toán phần tử hữu hạn và các chương trình tính toán để giải bài toán uốn tĩnh, dao động riêng và dao động cưỡng bức của tấm kích thước nano đặt trên nền đàn hồi với hiệu ứng flexoelectric.

- Khảo sát tác động của các thông số như đặc tính vật liệu, kích thước hình học, độ cứng nền đàn hồi, điều kiện biên, v.v. đến đáp ứng uốn tĩnh, dao động riêng và cưỡng bức của tấm kích thước nano đặt trên nền đàn hồi có kể đến hiệu ứng flexoelectric.

- Ảnh hưởng của hiệu ứng flexoelectric đến đáp ứng uốn tĩnh, dao động riêng và dao động cưỡng bức của tấm có kích thước nano đặt trên nền đàn hồi hai hệ số được nghiên cứu toàn diện. Với bài toán uốn tĩnh và dao động riêng, khi tấm có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric thì độ cứng tổng thể của kết cấu tăng lên, dẫn đến đáp ứng chuyển vị tĩnh của tấm giảm đi; các tần số dao động riêng của kết cấu tấm có kích thước nano cũng tăng lên. Với bài toán động lực học, khi xét đến tác động của hiệu ứng flexoelectric thì đáp ứng chuyển vị cực đại của tấm giảm đi so với trường hợp không có hiệu ứng flexoelectric do hiệu ứng flexoelectric làm tăng độ cứng của kết cấu tấm.

2. Kiến nghị

Dựa trên kết quả đã đạt được của luận án, một vài hướng nghiên cứu có thể phát triển như sau:

- Phân tích ứng xử cơ học của kết cấu có kích nước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric và hiệu ứng kích thước nhỏ.

- Kết hợp phương pháp số và giải tích để nghiên cứu ứng xử cơ học của các kết cấu dầm, tấm và vỏ có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric.

- Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để khảo sát dao động của dầm, tấm kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric dưới tác dụng của các loại tải trọng cơ học đặt trong môi trường đa vật lý.

- Nghiên cứu ổn định tĩnh và động của tấm kích thước nano có xét đến hiệu ứng flexoelectric trong môi trường đàn nhớt chịu nhiều loại tải trọng khác nhau.

- Tính toán tấm nano có hiệu ứng flexoelectric và biến dạng lớn.

- Nghiên cứu ứng xử cơ học của các kết cấu dạng vỏ có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric trong các môi trường đa vật lý.

- Tính toán tối ưu hình dạng và tối ưu vật liệu cho tấm, vỏ có kích thước nano kể đến hiệu ứng flexoelectric.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ

1. Lê Minh Thái, Đoàn Trắc Luật, Phùng Văn Bình, **Phùng Văn Minh**, Đỗ Văn Thơm* (2021). "Finite element modeling of mechanical behaviors of piezoelectric nanoplates with flexoelectric effects", *Archive of Applied Mechanics*, **92**, 163-182. https://doi.org/10.1007/s00419-021-02048-3**. (NXB Springer Nature, SCIE, Q2, IF=2.467).**

2. Đoàn Hồng Đức, Đỗ Văn Thơm*, Phạm Hồng Công, **Phùng Văn Minh**, Nguyễn Xuân Nguyên (2022). "Vibration and static buckling behavior of variable thickness flexoelectric nanoplates", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. https://doi.org/10.1080/15397734.2022.2088558. (**NXB Taylor & Francis, SCIE, Q2, IF=4.364**).

3. **Phùng Văn Minh***, Lê Minh Thái, Đoàn Trắc Luật, Nguyễn Đình Anh Vũ (2022). "Static bending analysis of nanoplates on discontinuous elastic foundation with flexoelectric effect", *Tạp chí Khoa học và Kỹ thuật – Học viện KTQS*, **17**(5), 47-57. https://doi.org/10.56651/lqdtu.jst.v17.n05.529.

4. Trương Thị Hương Huyền, **Phùng Văn Minh***, Trần Văn Kế, Đỗ Văn Thơm (2022). "Forced vibration analysis nanoplates resting on elastic foundations taking into account flexoelectric effect", *HN Cơ học toàn quốc lần thứ XI*.

5. **Phùng Văn Minh**, Lê Minh Thái*, Nguyễn Thái Dũng, Abdelouahed Tounsi, Nguyễn Thị Cẩm Nhung, Đỗ Văn Thơm*. "An overview of the flexoelectric phenomenon, potential applications, and proposals for further research directions", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. https://doi.org/10.1007/s10999-023-09678-1. **(NXB Springer Nature, SCIE, Q1, IF=3.561).**

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. V. Yudin, A.K. Tagantsev, Fundamentals of flexoelectricity in solids, Nanotechnology. 24 (2013). https://doi.org/10.1088/0957-4484/24/43/432001.

[2] S. Huang, L. Qi, W. Huang, L. Shu, S. Zhou, X. Jiang, Flexoelectricity in dielectrics: Materials, structures and characterizations, J. Adv. Dielectr. 8 (2018). https://doi.org/10.1142/S2010135X18300025.

[3] W. Huang, F.G. Yuan, X. Jiang, Flexoelectric effect, materials, and structures, Struct. Heal. Monit. Aerosp. Struct. (2016) 119–148. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100148-6.00005-6.

[4] P. Zubko, G. Catalan, A.K. Tagantsev, Flexoelectric effect in solids, Annu. Rev. Mater. Res. 43 (2013) 387–421. https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-071312-121634.

[5] V.S. Mashkevich, K.B. Tolpygo, Electrical, Optical and Elastic Properties of Diamond Type Crystals, Sov. Phys. - JETP. 5 (1957) 435–439.

[6] K. Tolpygo, Long wavelength oscillations of diamond-type crystals including long range forces, Sov. Physics-Solid State. 4 (1963) 1297–1305.

[7] S.M. Kogan, Piezoelectric effect during inhomogeneous deformation and acoustic scattering of carriers in crystals, Sov. Physics-Solid State. 5 (1964) 2069–2070.

[8] P. Harris, Mechanism for the shock polarization of dielectrics, J. Appl. Phys. 36 (1965) 739–741. https://doi.org/10.1063/1.1714210.

[9] R.D. Mindlin, Polarization Gradient in Elastic Dielectrics, Polariz. Gradient Elastic Dielectr. (1972). https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2998-2.

[10] A. Askar, P.C.Y. Lee, A.S. Cakmak, Lattice-dynamics approach to the theory of elastic dielectrics with polarization gradient, Phys. Rev. B. 1 (1970)

3525–3537. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.1.3525.

[11] A.K. Tagantsev, Piezoelectricity and flexoelectricity in crystalline dielectrics, Phys. Rev. B. 34 (1986) 5883–5889. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.34.5883.

[12] W. Ma, L.E. Cross, Flexoelectric polarization of barium strontium titanate in the paraelectric state, Appl. Phys. Lett. 81 (2002) 3440–3442. https://doi.org/10.1063/1.1518559.

[13] W. Ma, L.E. Cross, Observation of the flexoelectric effect in relaxor Pb(Mg1/3Nb2/3)O3 ceramics, Appl. Phys. Lett. 78 (2001) 2920–2921. https://doi.org/10.1063/1.1356444.

[14] W. Ma, L.E. Cross, Flexoelectric effect in ceramic lead zirconate titanate, Appl. Phys. Lett. 86 (2005) 1–3. https://doi.org/10.1063/1.1868078.

[15] S.A. Pikin, V.L. Indenbom, Piezoeffects and ferroelectric phenomena in smectic liquid crystals, Ferroelectrics. 20 (1978) 151–153. https://doi.org/10.1080/00150197808237194.

[16] A.K. Tagantsev, Theory of flexoelectric effect in crystals, Sov.Phys. JETP. 61 (1985) 1246.

[17] E. Sahin, S. Dost, A strain-gradients theory of elastic dielectrics with spatial dispersion, Int. J. Eng. Sci. 26 (1988) 1231–1245. https://doi.org/10.1016/0020-7225(88)90043-2.

[18] M. Marvan, A. Havránek, Flexoelectric effect in elastomers, Relationships Polym. Struct. Prop. (2007) 33–36. https://doi.org/10.1007/bfb0114342.

[19] M. Marvan, A. Havránek, Static volume flexoelectric effect in a model of linear chains, Solid State Commun. 101 (1997) 493–496. https://doi.org/10.1016/S0038-1098(96)00623-0.

[20] M. Schulz, M. Marvan, The theory of flexoelectric effect of polymer glasses, Colloid Polym. Sci. 269 (1991) 553–555. https://doi.org/10.1007/BF00659908.

[21] E.A. Eliseev, A.N. Morozovska, M.D. Glinchuk, R. Blinc, Spontaneous flexoelectric/flexomagnetic effect in nanoferroics, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. 79 (2009). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.165433.

[22] A.N. Morozovska, E.A. Eliseev, A.K. Tagantsev, S.L. Bravina, L.Q. Chen, S. V. Kalinin, Thermodynamics of electromechanically coupled mixed ionic-electronic conductors: Deformation potential, Vegard strains, and flexoelectric effect, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. 83 (2011). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.83.195313.

[23] S. Shen, S. Hu, A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics, J. Mech. Phys. Solids. 58 (2010) 665–677. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.03.001.

[24] J. Hong, D. Vanderbilt, First-principles theory and calculation of flexoelectricity, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. 88 (2013). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.174107.

[25] J. Hong, D. Vanderbilt, First-principles theory of frozen-ion flexoelectricity, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. 84 (2011). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.180101.

[26] S. Kanungo, First Principles study of HEAs, (2013).

[27] J. Narvaez, S. Saremi, J. Hong, M. Stengel, G. Catalan, Large Flexoelectric Anisotropy in Paraelectric Barium Titanate, Phys. Rev. Lett. 115 (2015). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.037601.

[28] C.E. Dreyer, M. Stengel, D. Vanderbilt, Current-density implementation for

calculating flexoelectric coefficients, Phys. Rev. B. 98 (2018). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.075153.

[29] M. Stengel, Surface control of flexoelectricity, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. 90 (2014). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.201112.

[30] A.R. Hadjesfandiari, Size-dependent piezoelectricity, Int. J. Solids Struct. 50 (2013) 2781–2791. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.04.020.

[31] H.T. Chen, A.K. Soh, Y. Ni, Phase field modeling of flexoelectric effects in ferroelectric epitaxial thin films, Acta Mech. 225 (2014) 1323–1333. https://doi.org/10.1007/s00707-013-1045-5.

[32] Y. Gu, M. Li, A.N. Morozovska, Y. Wang, E.A. Eliseev, V. Gopalan, L.Q. Chen, Flexoelectricity and ferroelectric domain wall structures: Phase-field modeling and DFT calculations, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. 89 (2014). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.89.174111.

[33] P. V. Yudin, R. Ahluwalia, A.K. Tagantsev, Upper bounds for flexoelectric coefficients in ferroelectrics, Appl. Phys. Lett. 104 (2014). https://doi.org/10.1063/1.4865208.

[34] A. Abdollahi, C. Peco, D. Millán, M. Arroyo, I. Arias, Computational evaluation of the flexoelectric effect in dielectric solids, J. Appl. Phys. 116 (2014). https://doi.org/10.1063/1.4893974.

[35] R. Maranganti, P. Sharma, Atomistic determination of flexoelectric properties of crystalline dielectrics, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. 80 (2009). https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.054109.

[36] A. Abdollahi, F. Vásquez-Sancho, G. Catalan, Piezoelectric Mimicry of Flexoelectricity, Phys. Rev. Lett. 121 (2018). https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.205502.

[37] H. Le Quang, Q.C. He, The number and types of all possible rotational symmetries for flexoelectric tensors, Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 467 (2011) 2369–2386. https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0521.

[38] L. Shu, X. Wei, T. Pang, X. Yao, C. Wang, Symmetry of flexoelectric coefficients in crystalline medium, J. Appl. Phys. 110 (2011). https://doi.org/10.1063/1.3662196.

[39] L. Shu, R. Liang, Z. Rao, L. Fei, S. Ke, Y. Wang, Flexoelectric materials and their related applications: A focused review, J. Adv. Ceram. 8 (2019) 153–173. https://doi.org/10.1007/s40145-018-0311-3.

[40] H. Zhou, Y. Pei, J. Hong, D. Fang, Analytical method to determine flexoelectric coupling coefficient at nanoscale, Appl. Phys. Lett. 108 (2016). https://doi.org/10.1063/1.4943660.

[41] T. Hu, Q. Deng, X. Liang, S. Shen, Measuring the flexoelectric coefficient of bulk barium titanate from a shock wave experiment, J. Appl. Phys. 122 (2017). https://doi.org/10.1063/1.4997475.

[42] A. Tripathy, B. Saravanakumar, S. Mohanty, S.K. Nayak, A. Ramadoss, Comprehensive Review on Flexoelectric Energy Harvesting Technology: Mechanisms, Device Configurations, and Potential Applications, ACS Appl. Electron. Mater. 3 (2021) 2898–2924. https://doi.org/10.1021/acsaelm.1c00267.

[43] Y. Su, X. Lin, R. Huang, Z. Zhou, Analytical electromechanical modeling of nanoscale flexoelectric energy harvesting, Appl. Sci. 9 (2019). https://doi.org/10.3390/app9112273.

[44] H. Zou, C. Zhang, H. Xue, Z. Wu, Z.L. Wang, Boosting the Solar Cell Efficiency by Flexo-photovoltaic Effect?, ACS Nano. 13 (2019) 12259–12267. https://doi.org/10.1021/acsnano.9b07222.

[45] X. Liang, S. Hu, S. Shen, Size-dependent buckling and vibration behaviors of piezoelectric nanostructures due to flexoelectricity, Smart Mater. Struct. 24 (2015). https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/10/105012.

[46] L. Qi, S. Zhou, A. Li, Size-dependent bending of an electro-elastic bilayer nanobeam due to flexoelectricity and strain gradient elastic effect, Compos. Struct. 135 (2016) 167–175. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.020.

[47] M.C. Ray, Analysis of smart nanobeams integrated with a flexoelectric nano actuator layer, Smart Mater. Struct. 25 (2016). https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/5/055011.

[48] Y.M. Yue, K.Y. Xu, T. Chen, A micro scale Timoshenko beam model for piezoelectricity with flexoelectricity and surface effects, Compos. Struct. 136 (2016) 278–286. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.046.

[49] Y. Tadi Beni, Size-dependent electromechanical bending, buckling, and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric nanobeams, J. Intell. Mater. Syst. Struct. 27 (2016) 2199–2215. https://doi.org/10.1177/1045389X15624798.

[50] M.S. Ebnali Samani, Y.T. Beni, Size dependent thermo-mechanical buckling of the flexoelectric nanobeam, Mater. Res. Express. 5 (2018). https://doi.org/10.1088/2053-1591/aad2ca.

[51] L. Chu, G. Dui, C. Ju, Flexoelectric effect on the bending and vibration responses of functionally graded piezoelectric nanobeams based on general modified strain gradient theory, Compos. Struct. 186 (2018) 39–49. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.083.

[52] R. Sun, D. Liu, Z. Yan, A finite element approach for flexoelectric nonuniform nanobeam energy harvesters, Mech. Adv. Mater. Struct. (2022).

https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2053914.

[53] G. Zhang, Z. He, J. Qin, J. Hong, Magnetically tunable bandgaps in phononic crystal nanobeams incorporating microstructure and flexoelectric effects, Appl. Math. Model. 111 (2022) 554–566. https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.07.005.

[54] Z. Yan, Size-dependent bending and vibration behaviors of piezoelectric circular nanoplates, Smart Mater. Struct. 25 (2016). https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/3/035017.

[55] W. Yang, X. Liang, S. Shen, Electromechanical responses of piezoelectric nanoplates with flexoelectricity, Acta Mech. 226 (2015) 3097–3110. https://doi.org/10.1007/s00707-015-1373-8.

[56] A. Li, S. Zhou, L. Qi, Size-dependent electromechanical coupling behaviors of circular micro-plate due to flexoelectricity, Appl. Phys. A Mater. Sci. Process. 122 (2016). https://doi.org/10.1007/s00339-016-0455-3.

[57] X. Wang, R. Zhang, L. Jiang, A Study of the Flexoelectric Effect on the Electroelastic Fields of a Cantilevered Piezoelectric Nanoplate, Int. J. Appl. Mech. 9 (2017). https://doi.org/10.1142/S1758825117500569.

[58] L. He, J. Lou, A. Zhang, H. Wu, J. Du, J. Wang, On the coupling effects of piezoelectricity and flexoelectricity in piezoelectric nanostructures, AIP Adv. 7 (2017). https://doi.org/10.1063/1.4994021.

[59] B. Wang, X.F. Li, Flexoelectric effects on the natural frequencies for free vibration of piezoelectric nanoplates, J. Appl. Phys. 129 (2021). https://doi.org/10.1063/5.0032343.

[60] A.E. Giannakopoulos, A.J. Rosakis, Dynamic Magneto-FlexoElectricity and seismo-electromagnetic phenomena: Connecting mechanical response to

electromagnetic signatures, J. Mech. Phys. Solids. (2022) 105058. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.105058.

[61] S. Naskar, K.B. Shingare, S. Mondal, T. Mukhopadhyay, Flexoelectricity and surface effects on coupled electromechanical responses of graphene reinforced functionally graded nanocomposites: A unified size-dependent semi-analytical framework, Mech. Syst. Signal Process. 169 (2022). https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108757.

[62] Z. Soleimani-Javid, E. Arshid, M. Khorasani, S. Amir, A. Tounsi, Size-dependent flexoelectricity-based vibration characteristics of honeycomb sandwich plates with various boundary conditions, Adv. Nano Res. 10 (2021) 449–460. https://doi.org/10.12989/anr.2021.10.5.449.

[63] F. Ebrahimi, M.R. Barati, Static stability analysis of embedded flexoelectric nanoplates considering surface effects, Appl. Phys. A Mater. Sci. Process. 123 (2017). https://doi.org/10.1007/s00339-017-1265-y.

[64] A. Ghobadi, Y.T. Beni, H. Golestanian, Nonlinear thermo-electromechanical vibration analysis of size-dependent functionally graded flexoelectric nano-plate exposed magnetic field, Arch. Appl. Mech. 90 (2020) 2025–2070. https://doi.org/10.1007/s00419-020-01708-0.

[65] S. Amir, H. BabaAkbar-Zarei, M. Khorasani, Flexoelectric vibration analysis of nanocomposite sandwich plates, Mech. Based Des. Struct. Mach. 48 (2020) 146–163. https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1624175.

[66] A. Ghobadi, Y.T. Beni, H. Golestanian, Size dependent thermo-electro-mechanical nonlinear bending analysis of flexoelectric nano-plate in the presence of magnetic field, Int. J. Mech. Sci. 152 (2019) 118–137. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.049.

[67] A. Ghobadi, Y. Tadi Beni, H. Golestanian, Size Dependent Nonlinear Bending Analysis of a Flexoelectric Functionally Graded Nano-Plate Under Thermo-Electro-Mechanical Loads, J. Solid Mech. 12 (2020) 33–56. http://jsm.iau-arak.ac.ir/article_670598.html%0Ahttp://jsm.iau-arak.ac.ir/article_670598_33046179b9d8267e4f6111de3f7af938.pdf.

[68] Y. gyu Kim, H. Kim, G.J. Lee, H.U. Lee, S.G. Lee, C. Baek, M.K. Lee, J.J. Park, Q. Wang, S.B. Cho, C.K. Jeong, K. Il Park, Flexoelectric-boosted piezoelectricity of BaTiO3@SrTiO3 core-shell nanostructure determined by multiscale simulations for flexible energy harvesters, Nano Energy. 89 (2021). https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2021.106469.

[69] L. Sun, Z. Zhang, C. Gao, C. Zhang, Effect of flexoelectricity on piezotronic responses of a piezoelectric semiconductor bilayer, J. Appl. Phys. 129 (2021) 1ENG. https://doi.org/10.1063/5.0050947.

[70] C. Yoon, S. Ippili, V. Jella, A.M. Thomas, J.S. Jung, Y. Han, T.Y. Yang, S.G. Yoon, G. Yoon, Synergistic contribution of flexoelectricity and piezoelectricity towards a stretchable robust nanogenerator for wearable electronics, Nano Energy. 91 (2022). https://doi.org/10.1016/j.nanoen.2021.106691.

[71] I. Esen, R. Özmen, Thermal vibration and buckling of magneto-electro-elastic functionally graded porous nanoplates using nonlocal strain gradient elasticity, Compos. Struct. 296 (2022). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115878.

[72] Z. Liu, X. Wen, Y. Wang, Y. Jia, F. Wang, G. Yuan, Y. Wang, Robust Flexo-Catalysis in Centrosymmetric Nanoparticles, Adv. Mater. Technol. (2022). https://doi.org/10.1002/admt.202101484.

[73] B. Zhang, J. Luo, A phase field model for electromechanical fracture in flexoelectric solids, Eng. Fract. Mech. 271 (2022). https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.108564.

[74] S. Khorshidi, S. Chakouvari, H. Askari, L. Cveticanin, Free Vibrations of Flexoelectric FGM Conical Nanoshells with Piezoelectric Layers: Modeling and Analysis, Energies. 15 (2022). https://doi.org/10.3390/en15092973.

[75] A. Ashrafi Dehkordi, R. Jahanbazi Goojani, Y. Tadi Beni, Porous flexoelectric cylindrical nanoshell based on the non-classical continuum theory, Appl. Phys. A Mater. Sci. Process. 128 (2022). https://doi.org/10.1007/s00339-022-05584-z.

[76] A.R. Asghari Ardalani, A. Amiri, R. Talebitooti, On size-dependent wave propagation of flexoelectric nanoshells interacted with internal moving fluid flow, Waves in Random and Complex Media. (2022). https://doi.org/10.1080/17455030.2021.2018152.

[77] S. Fattaheian Dehkordi, Y. Tadi Beni, Size-dependent continuum-based model of a truncated flexoelectric/flexomagnetic functionally graded conical nano/microshells, Appl. Phys. A Mater. Sci. Process. 128 (2022). https://doi.org/10.1007/s00339-022-05386-3.

[78] H. Liu, S. Sahmani, B. Safaei, Nonlinear buckling mode transition analysis in nonlocal couple stress-based stability of FG piezoelectric nanoshells under thermo-electromechanical load, Mech. Adv. Mater. Struct. (2022). https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2073620.

[79] F. Ebrahimi, M.R. Barati, Dynamic modeling of embedded nanoplate systems incorporating flexoelectricity and surface effects, Microsyst. Technol. 25 (2019) 175–187. https://doi.org/10.1007/s00542-018-3946-7.

[80] R. Bagheri, Y. Tadi Beni, On the size-dependent nonlinear dynamics of viscoelastic/flexoelectric nanobeams, JVC/Journal Vib. Control. 27 (2021) 2018–2033. https://doi.org/10.1177/1077546320952225.

[81] M. Malikan, V.A. Eremeyev, On the dynamics of a visco-piezo-flexoelectric nanobeam, Symmetry (Basel). 12 (2020). https://doi.org/10.3390/SYM12040643.

[82] K.B. Shingare, S. Naskar, Analytical solution for static and dynamic analysis of graphene-based hybrid flexoelectric nanostructures, J. Compos. Sci. 5 (2021). https://doi.org/10.3390/jcs5030074.

[83] J. Sladek, V. Sladek, M. Repka, Q. Deng, Flexoelectric effect in dielectrics under a dynamic load, Compos. Struct. 260 (2021). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113528.

[84] A.F. Babadi, Y. Tadi Beni, K.K. Żur, On the flexoelectric effect on size-dependent static and free vibration responses of functionally graded piezo-flexoelectric cylindrical shells, Thin-Walled Struct. 179 (2022). https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109699.

[85] F. Shayestenia, M. Ghadiri, Investigation of flexoelectric effect on nonlinear vibration and dynamic instability of piezoelectric sandwich micro/nanobeam using the nonlocal strain gradient theory, Int. J. Struct. Stab. Dyn. (2022). https://doi.org/10.1142/s0219455423500451.

[86] K. Fang, P. Li, Z. Qian, Static and Dynamic Analysis of a Piezoelectric Semiconductor Cantilever Under Consideration of Flexoelectricity and Strain Gradient Elasticity, Acta Mech. Solida Sin. 34 (2021) 673–686. https://doi.org/10.1007/s10338-021-00236-w.

[87] W. Chen, X. Liang, S. Shen, Forced vibration of piezoelectric and

flexoelectric Euler–Bernoulli beams by dynamic Green's functions, Acta Mech. 232 (2021) 449–460. https://doi.org/10.1007/s00707-020-02859-5.

[88] H. V. Do, T. Lahmer, X. Zhuang, N. Alajlan, H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, An isogeometric analysis to identify the full flexoelectric complex material properties based on electrical impedance curve, Comput. Struct. 214 (2019) 1–14. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.10.019.

[89] C. Le Thanh, P. Phung-Van, C.H. Thai, H. Nguyen-Xuan, M. Abdel Wahab, Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite nanoplates using modified couple stress theory, Compos. Struct. 184 (2018) 633–649. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.025.

[90] P. Phung-Van, A.J.M. Ferreira, H. Nguyen-Xuan, M. Abdel Wahab, An isogeometric approach for size-dependent geometrically nonlinear transient analysis of functionally graded nanoplates, Compos. Part B Eng. 118 (2017) 125–134. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.03.012.

[91] N.T. Khiem, D.T. Huan, T.T. Hieu, Vibration of Cracked FGM Beam with Piezoelectric Layer Under Moving Load, J. Vib. Eng. Technol. (2022). https://doi.org/10.1007/s42417-022-00607-8.

[92] N.T. Khiem, T.T. Hai, L.Q. Huong, Crack identification of functionally graded beam using distributed piezoelectric sensor, JVC/Journal Vib. Control. (2022). https://doi.org/10.1177/10775463221095649.

[93] N.T. Khiem, T.T. Hai, L.Q. Huong, Modal analysis of cracked FGM beam with piezoelectric layer, Mech. Based Des. Struct. Mach. (2021). https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1992775.

[94] N.D. Anh, D. V. Hieu, Nonlinear random vibration of functionally graded nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory, Acta Mech. 233 (2022)

1633–1648. https://doi.org/10.1007/s00707-022-03199-2.

[95] N.D. Anh, D. V. Hieu, Nonlinear vibration of nonlocal strain gradient nanotubes under longitudinal magnetic field, Vietnam J. Mech. (2020). https://doi.org/10.15625/0866-7136/15467.

[96] V.H. Dang, D.A. Nguyen, M.Q. Le, T.H. Duong, Nonlinear vibration of nanobeams under electrostatic force based on the nonlocal strain gradient theory, Int. J. Mech. Mater. Des. 16 (2020) 289–308. https://doi.org/10.1007/s10999-019-09468-8.

[97] N.T. Chung, D.T.N. Thu, L.X. Thuy, Dynamic analysis of stiffened functionally graded composite plates reinforced by carbon nanotubes subjected to blast loads using a new four-variable refined plate theory, Int. J. Comput. Mater. Sci. Eng. 12 (2023). https://doi.org/10.1142/S2047684123500045.

[98] N.T. Chung, N.N. Thuy, D.T.N. Thu, L.H. Chau, Numerical and Experimental Analysis of the Dynamic Behavior of Piezoelectric Stiffened Composite Plates Subjected to Airflow, Math. Probl. Eng. 2019 (2019). https://doi.org/10.1155/2019/2697242.

[99] C. Nguyen Thai, T. Tran Ich, T. Le Xuan, Static and Dynamic Analysis of Piezoelectric Laminated Composite Beams and Plates, Perovskite Piezoelectric Mater. (2021). https://doi.org/10.5772/intechopen.89303.

[100] N. Van Quyen, N.D. Duc, Vibration and nonlinear dynamic response of nanocomposite multi-layer solar panel resting on elastic foundations, Thin-Walled Struct. 177 (2022). https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109412.

[101] L.K. Hoa, P. Van Vinh, N.D. Duc, N.T. Trung, L.T. Son, D. Van Thom, Bending and free vibration analyses of functionally graded material nanoplates via a novel nonlocal single variable shear deformation plate theory, Proc. Inst. Mech.

Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci. 235 (2021) 3641–3653. https://doi.org/10.1177/0954406220964522.

[102] D.H. Duc, D. Van Thom, P.H. Cong, P. Van Minh, N.X. Nguyen, Vibration and static buckling behavior of variable thickness flexoelectric nanoplates, Mech. Based Des. Struct. Mach. (2022). https://doi.org/10.1080/15397734.2022.2088558.

[103] T.I. Thinh, P.N. Thanh, Vibroacoustic Behavior of Double-Composite Plate Filled with Porous Materials, Lect. Notes Mech. Eng. (2022) 185–199. https://doi.org/10.1007/978-981-19-1968-8_15.

[104] T. Lien, N. Duc, T. Dinh, P. Dat, Free vibration analysis of FGM stepped nanostructures using nonlocal dynamic stiffness model, J. Theor. Appl. Mech. (2022) 277–290. https://doi.org/10.15632/jtam-pl/149175.

[105] T. Tran, H.T. Trinh, K.D. Nguyen, Vibration of Sandwich Beams Reinforced By Carbon Nanotubes Under a Moving Load, Vietnam J. Sci. Technol. 59 (2021). https://doi.org/10.15625/2525-2518/59/5/15866.

[106] H.Q. Tran, V.T. Vu, M.T. Tran, P. Nguyen-Tri, A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates, Mech. Mater. 142 (2020). https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103294.

[107] T.H. Quoc, V. Van Tham, T.M. Tu, Active vibration control of a piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced spherical shell panel, Acta Mech. 232 (2021) 1005–1023. https://doi.org/10.1007/s00707-020-02899-x.

[108] P.G. Vũ, Nghiên cứu hiệu ứng của các chất gia cường Clay hữu cơ cấu trúc nano đối với biến đổi cấu trúc và tính chất của một số vật liệu polyme phân cực,

Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 2010.
[109] P.T.T. Mai, Nghiên cứu chế tạo vật liệu compozit chứa các hạt áp điện kích thước nano và khảo sát sự biến đổi tính chất cơ nhiệt trong điều kiện khí hậu nhiệt đới, Đại học Khoa học Tự nhiên, 2012.
[110] N.V. Thành, Ổn định và các đáp ứng phi tuyến của kết cấu tấm và vỏ composite gia cường các sợi nano carbon, có cơ lý tính biến đổi (FG-CNTRC), Đại học Công nghệ, 2022.
[111] L.P. Bình, Phân tích tuyến tính tĩnh và động lực học của tấm nano bằng vật liệu xốp cơ tính biến thiên sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, Học viện Kỹ Thuật quân sự, 2023.
[112] Q. Deng, M. Kammoun, A. Erturk, P. Sharma, Nanoscale flexoelectric energy harvesting, Int. J. Solids Struct. 51 (2014) 3218–3225. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.018.
[113] Z. Yan, L. Jiang, Surface effects on the electroelastic responses of a thin piezoelectric plate with nanoscale thickness, J. Phys. D. Appl. Phys. 45 (2012). https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/25/255401.
[114] Z. Zhang, L. Jiang, Size effects on electromechanical coupling fields of a bending piezoelectric nanoplate due to surface effects and flexoelectricity, J. Appl. Phys. 116 (2014). https://doi.org/10.1063/1.4897367.
[115] R.P. Shimpi, Refined plate theory and its variants, AIAA J. 40 (2002) 137–146. https://doi.org/10.2514/3.15006.
[116] H.T. Thai, T. Park, D.H. Choi, An efficient shear deformation theory for vibration of functionally graded plates, Arch. Appl. Mech. 83 (2013) 137–149. https://doi.org/10.1007/s00419-012-0642-4.
[117] H.T. Thai, T.P. Vo, A new sinusoidal shear deformation theory for bending,

buckling, and vibration of functionally graded plates, Appl. Math. Model. 37 (2013) 3269–3281. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.08.008.

[118] N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E.A. El, A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, Int. J. Mech. Sci. 53 (2011) 237–247. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004.

[119] H.T. Thai, D.H. Choi, Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates, Finite Elem. Anal. Des. 75 (2013) 50–61. https://doi.org/10.1016/j.finel.2013.07.003.

[120] M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sci. 29 (1991) 901–916. https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y.

[121] K.P. Soldatos, A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, Acta Mech. 94 (1992) 195–220. https://doi.org/10.1007/BF01176650.

[122] J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Mech. Laminated Compos. Plates Shells. (2003). https://doi.org/10.1201/b12409.

[123] J.B. Han, K.M. Liew, Numerical differential quadrature method for Reissner/Mindlin plates on two-parameter foundations, Int. J. Mech. Sci. 39 (1997) 977–989. https://doi.org/10.1016/s0020-7403(97)00001-5.

[124] H.T. Thai, M. Park, D.H. Choi, A simple refined theory for bending, buckling, and vibration of thick plates resting on elastic foundation, Int. J. Mech. Sci. 73 (2013) 40–52. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.017.

[125] H. Matsunaga, Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings, Compos. Struct. 87 (2009) 344–357. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.02.002.

[126] A.H. Baferani, A.R. Saidi, H. Ehteshami, Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation, Compos. Struct. 93 (2011) 1842–1853. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020.

[127] M. Song, S. Kitipornchai, J. Yang, Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets, Compos. Struct. 159 (2017) 579–588. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.09.070.