

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

DƯƠNG VĂN QUANG

PHÂN TÍCH TÍNH KẾT CẤU VỎ TRỤ
COMPOSITE CƠ TÍNH BIẾN THIÊN
ĐƯỢC GIA CƯỜNG BẰNG CÁC ỐNG
NANO CARBON CHỊU TẢI TRỌNG CƠ
VÀ NHIỆT ĐỘ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2023

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

DƯƠNG VĂN QUANG

**PHÂN TÍCH TÍNH KẾT CẤU VỎ TRỤ
COMPOSITE CƠ TÍNH BIẾN THIÊN
ĐƯỢC GIA CƯỜNG BẰNG CÁC ỐNG
NANO CARBON CHỊU TẢI TRỌNG CƠ
VÀ NHIỆT ĐỘ**

Chuyên ngành : Cơ kỹ thuật

Mã số : 9.52.01.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ KỸ THUẬT

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS Trần Ngọc Đoàn

PGS.TS Đoàn Trắc Luật

HÀ NỘI - 2023

LỜI CAM ĐOAN

Tôi là Dương Văn Quang, xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận án là trung thực và chưa được ai công bố trong bất kỳ công trình nào.

Hà Nội, ngàytháng.....năm 2023

Tác giả luận án

Dương Văn Quang

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn tập thể hướng dẫn: PGS.TS Trần Ngọc Đoàn và PGS.TS Đoàn Trắc Luật đã nhiệt tình hướng dẫn, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành luận án. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các giảng viên, nhân viên Bộ môn Cơ học vật rắn/Khoa Cơ khí, Bộ môn Thiết kế hệ thống kết cấu thiết bị bay/Khoa Hàng không vũ trụ và các đồng chí cán bộ, nhân viên Phòng Sau đại học/Học viện Kỹ thuật Quân sự đã tận tình giúp đỡ tôi trong quá trình thực hiện luận án.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm, giảng viên, nhân viên Khoa Hàng không vũ trụ/Học viện Kỹ thuật Quân sự - nơi tôi công tác - đã tạo mọi điều kiện, giúp đỡ động viên tôi hoàn thành công trình nghiên cứu của mình.

Tôi cũng bày tỏ tình cảm trân trọng biết ơn tới gia đình, người thân và bạn bè đã động viên, khích lệ, giúp đỡ tôi trong quá trình thực hiện luận án.

Tác giả luận án

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU -----	vi
DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT -----	viii
DANH MỤC CÁC BẢNG -----	ix
DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ -----	x
MỞ ĐẦU -----	1
Chương 1. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU -----	6
1.1. Vật liệu composite cơ tính biến thiên được gia cường bởi ống nano carbon FG-CNTRC -----	6
1.1.1. Khái niệm vật liệu FG-CNTRC -----	6
1.1.2. Ống nano cacbon -----	7
1.1.3. Cấu tạo và tính chất vật liệu FG-CNTRC -----	9
1.2. Tổng quan các nghiên cứu kết cấu tấm vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC ---	12
1.2.1. Về tải trọng nhiệt và ảnh hưởng của tải trọng nhiệt đến các tính chất vật liệu trong các nghiên cứu về tấm vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC -----	12
1.2.2. Về lý thuyết tấm vỏ được sử dụng trong các nghiên cứu về kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC -----	16
1.3. Kết quả nghiên cứu đạt được từ các công trình đã công bố và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu -----	22
1.4. Những nội dung nghiên cứu trong luận án -----	24
Chương 2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH TÍNH TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI -----	27
2.1. Bài toán tổng quát -----	27
2.2. Thông số vật liệu FG-CNTRC khi xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ -----	28
2.3. Các phương trình cơ bản -----	30
2.3.1. Trường chuyển vị -----	31
2.3.2. Quan hệ biến dạng và chuyển vị -----	32

2.3.3. Quan hệ ứng suất và biến dạng khi tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ -----	33
2.4. Thiết lập hệ phương trình cân bằng của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt -----	34
2.4.1. Nguyên lý công ảo -----	34
2.4.2. Hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên -----	44
2.4.3. Hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị -----	48
2.5. Trình tự giải bài toán xác định ứng suất của vỏ -----	50
2.6. Phương pháp giải tích trong nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau chịu tải hướng kính -----	51
2.6.1. Chuyển hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng về hệ phương trình vi phân thường bằng chuỗi lượng giác -----	54
2.6.2. Giải bài toán vỏ trụ chịu tải trọng cục bộ hướng kính bằng phép biến đổi Laplace -----	56
Chương 3. NGHIÊN CỨU KHẢO SÁT VỎ TRỤ FG-CNTRC CHỊU TẢI TRỌNG CƠ -----	63
3.1. Mô hình bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ -----	63
3.2. Các ví dụ kiểm chứng -----	64
3.3. Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên -----	69
3.4. Khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng biên -----	76
3.5. Khảo sát ảnh hưởng của thông số vật liệu đến hiệu ứng biên -----	78
3.5.1. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT -----	79
3.5.2. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT -----	81
3.6. Khảo sát ảnh hưởng của tải trọng -----	84
3.6.1. Ảnh hưởng của mức độ tập trung tải trọng -----	84
3.6.2. Ảnh hưởng của vị trí tải trọng -----	86
3.6.3. Ảnh hưởng của dạng hàm tải trọng -----	90

Chương 4. NGHIÊN CỨU KHẢO SÁT VỎ TRỤ FG-CNTRC CHỊU TẢI TRỌNG CƠ NHIỆT -----	95
4.1. Mô hình bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt -----	95
4.2. Xác định phân bố nhiệt độ theo chiều dày vỏ trụ FG-CNTRC -----	97
4.3. Các ví dụ kiểm chứng cho bài toán vỏ chịu tải trọng cơ nhiệt -----	104
4.4. Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên -----	110
4.5. Khảo sát ảnh hưởng của các thông số vật liệu -----	114
4.5.1. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT -----	114
4.5.2. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT -----	120
4.6. Khảo sát ảnh hưởng của tải trọng -----	123
4.6.1. Ảnh hưởng của loại tải trọng -----	123
4.6.2. Ảnh hưởng của nhiệt độ và tải trọng áp suất -----	126
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ -----	134
DANH MỤC CÔNG BỐ CỦA ĐỀ TÀI LUẬN ÁN -----	137
PHỤ LỤC -----	A

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

Kí hiệu	Đơn vị	Ý nghĩa – giải thích
$A_s, A_{e1}, A_{e2}, U,$	J	Công của lực mặt, công của ngoại lực trên biên, năng lượng biến dạng đàn hồi,
$C_{ij} (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3), C_{44}, C_{55}, C_{66}$		Các thông số độ cứng
E	Pa	Mô-đun đàn hồi Young
$E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}, V_{CNT},$ E_m, G_m, V_m	Pa	Các mô-đun đàn hồi Young, mô-đun trượt, tỷ lệ thể tích của vật liệu cốt CNT và vật liệu nền
h, R, L	m	Chiều dày vỏ trụ, Bán kính trung bình vỏ trụ, Chiều dài vỏ trụ
$k_{ii} (i = 1, 2, 3)$	W/mK	Hệ số truyền nhiệt
$N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}$ $M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}$ $Q_\xi, Q_\theta, Q_z, S_\xi, S_\theta, S_z$	N	Các thành phần nội lực
$u(\xi, \theta, z), v(\xi, \theta, z), w(\xi, \theta, z)$	m	Chuyển vị theo các phương ξ, θ và z
$q^+(\xi, \theta), q^-(\xi, \theta)$	Pa	Tải trọng trên bề mặt ngoài và bề mặt trong.
$T(\xi, \theta, z)$	K	Phân bố nhiệt độ trong vỏ

T	K	Nhiệt độ
T_{in}, T_{out}, T_{ref}	K	Nhiệt độ bề mặt trong, bề mặt ngoài, nhiệt độ tham chiếu
V	m ³	Thể tích vật liệu
$\alpha_{ii} (i=1,2,3)$	1/K	Hệ số dẫn nở nhiệt
$\beta_{\xi}, \beta_{\theta}, \beta_z$		Các mô-đun ứng suất liên quan đến hệ số giãn nở nhiệt
ξ, θ, z		Toạ độ trong hệ toạ độ cong trục giao $O\xi\theta z$
$\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\xi z}, \varepsilon_{\theta z}$		Các thành phần biến dạng
$\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}$	Pa	Các thành phần ứng suất
$\nu_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3)$		Hệ số Poisson
σ_m	Pa	Ứng suất tới hạn
ε	%	Độ giãn dài tới hạn
ρ	kg/m ³	Khối lượng riêng
ρ_{CNT}, ρ_m	kg/m ³	Khối lượng riêng của CNT và vật liệu nền
$\eta_i (i=1,2,3)$		Các hệ số hiệu dụng

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Viết tắt	Tiếng Anh	Tiếng Việt
3D	Three Dimensional	Ba chiều
CPT	Classical Plate Theory	Lý thuyết tấm cổ điển
CNT	Carbon NanoTube	Ống nano cacbon
CNTRC	Carbon Nanotube Reinforced Composites	Vật liệu nanocomposite gia cường bằng ống nano cacbon
CST	Classical Shell Theory	Lý thuyết vỏ cổ điển
DQM	Differential Quadrature Method	Phương pháp cầu phương sai phân
FEM	Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn
FGM	Functionally Graded Material	Vật liệu có cơ tính biến thiên
FG-CNTRC	Functionally Graded Carbon NanoTube Reinforced Composites	Vật liệu nanocomposite có cơ tính biến thiên gia cường bằng ống nano cacbon
FSDT	First order Shear Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất
GDQ	Generalized Differential Quadrature	Cầu phương sai phân tổng quát
HOSNT	High Order Shear and Normal Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng cắt và pháp bậc cao
HSDT	Higher Order Shear Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao
MWCNT	Multi Walled Carbon Nanotube	Ống nano cacbon đa vách
MD	Molecular Dynamic Simulation	Mô phỏng động lực học phân tử
ODE	Ordinary Differential Equation	Phương trình vi phân thường
RVE	Representative Volume Element	Phần tử khối quy ước
SWCNT	Single Walled Carbon NanoTube	Ống nano cacbon đơn vách
PDE	Partial Differential Equation	Phương trình đạo hàm riêng
TSDT	Third Order Shear Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba

DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 1.1 So sánh đặc tính cơ học của CNT với một số loại vật liệu khác [30]	8
Bảng 1.2 So sánh đặc tính dẫn nhiệt của CNT với một số loại vật liệu khác [30]	9
Bảng 1.3 So sánh đặc tính dẫn điện của CNT với một số loại vật liệu [30]	9
Bảng 3.1 So sánh kết quả chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM tại điểm giữa	66
Bảng 3.2 Ảnh hưởng của điều kiện biên đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FG-V có $V_{CNT}^* = 0.17$	71
Bảng 3.3 Ứng suất tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG- Λ có $V_{CNT}^* = 0.17$	78
Bảng 3.4 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đối với ứng suất tại vùng biên ngàm của vỏ trụ biên C-C có $V_{CNT}^* = 0.28$, $L/R = 4$, $R/h = 10$	80
Bảng 3.5 Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT đối với ứng suất tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG-V có $L/R = 1$, $R/h = 10$	83
Bảng 4.1 Tính chất vật liệu của (10,10) SWCNT	96
Bảng 4.2 Các hằng số của tính chất vật liệu CNT phụ thuộc vào nhiệt độ	97
Bảng 4.3 So sánh kết quả ứng suất pháp tuyến của vỏ trụ FGM ngàm hai đầu trong môi trường nhiệt	105

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1.1 Cấu trúc vật liệu cốt ống nano cacbon đơn vách và đa vách [27]	7
Hình 1.2 Kết quả mô phỏng minh họa các liên kết hóa học phân tử giữa CNT và vật liệu nền: nền kết tinh (a, c) và nền vô định hình (b) [30].....	11
Hình 1.3 Các kiểu phân bố của mô hình vật liệu FG-CNTRC [44]	12
Hình 2.1 Thông số hình học của vỏ trụ và năm trường hợp phân bố CNT	27
Hình 2.2 Các bước xác định ứng suất của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt.....	51
Hình 2.3 Qui trình giải hệ phương trình cân bằng của vỏ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau chịu tải trọng hướng kính	53
Hình 3.1 Mô hình vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ	63
Hình 3.2 So sánh kết quả ứng suất vòng và ứng suất pháp tuyến không thứ nguyên, $(\bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z) = (\sigma_\theta, \sigma_z)/P_{in}$	69
Hình 3.3 Mô hình vỏ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau.....	70
Hình 3.4 Ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng suất của vỏ trụ FG- Λ có $V_{CNT}^* = 0.17$, $L/R = 4$, $R/h = 10$	74
Hình 3.5 Ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng suất của vỏ trụ FG-V có $V_{CNT}^* = 0.17$, $L/R = 1$, $R/h = 10$	75
Hình 3.6 Ứng suất không thứ nguyên tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG-V với $V_{CNT}^* = 0.17$, $L/R = 0.5$, $R/h = 20$ và điều kiện biên C-F	77
Hình 3.7 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đối với ứng suất tại vị trí biên trái $\xi = 0$ của vỏ trụ biên C-C có $V_{CNT}^* = 0.28$, $L/R = 4$, $R/h = 10$	81
Hình 3.8 Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT đối với ứng suất tại vị trí biên trái $\xi = 0$ của vỏ trụ FG-V với $L/R = 1$, $R/h = 10$ và điều kiện biên C-C	82
Hình 3.9 Sơ đồ khảo sát ảnh hưởng của mức độ phân bố tải trọng	84

Hình 3.10 Ảnh hưởng của mức độ tập trung tải trọng đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ C-C FG-V, với $L/R=6$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$	86
Hình 3.11 Sơ đồ khảo sát ảnh hưởng vị trí tải trọng.....	87
Hình 3.12 Ảnh hưởng của vị trí tải trọng đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ C-C FG-V, với $L/R=4$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$	89
Hình 3.13 Sơ đồ khảo sát ảnh hưởng của dạng hàm tải trọng	90
Hình 3.14 Ảnh hưởng của dạng hàm tải trọng đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ C-C FG-V, với $L/R=3$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$	92
Hình 4.1 Mô hình bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng tải trọng cơ nhiệt	96
Hình 4.2 So sánh kết quả chuyển vị $\bar{w} = w / r_{in} \times 1000$ và ứng suất $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / P_{in}$ của vỏ FGM chịu đồng thời tải trọng cơ nhiệt.....	105
Hình 4.3 So sánh kết quả phân bố nhiệt độ theo chiều dày của vỏ trụ FG-CNTRC gia cường bằng CNT lượn sóng.....	107
Hình 4.4. So sánh kết quả phân bố nhiệt độ không thứ nguyên $\bar{T} = T/273$ theo chiều dày của vỏ trụ FG-CNTRC với nhiệt độ ở mặt ngoài $T_{out} = 100K$	109
Hình 4.5 So sánh kết quả chuyển vị $\bar{w} = w / (\alpha_m T_{out})$ và ứng suất vòng $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / (\alpha_m E_m T_{out})$ theo chiều dày của vỏ trụ FG-CNTRC với nhiệt độ ở mặt ngoài $T_{out} = 100K$	109
Hình 4.6 Ảnh hưởng của điều kiện biên đối với ứng suất của vỏ trụ FG- Λ có $V_{CNT}^* = 0.17$, $L/R = 4$, $R/h = 10$, $T_{in} = 400K$, $T_{out} = 300K$	112
Hình 4.7 Ảnh hưởng của điều kiện biên đối với ứng suất của vỏ trụ FG- Λ có $V_{CNT}^* = 0.17$, $L/R = 1$, $R/h = 10$, $T_{in} = 400K$, $T_{out} = 300K$	114
Hình 4.8 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đến nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ biên C-F với $L/R = 2$, $R/h = 20$, $T_{in} = 400K$, $T_{out} = 300K$	118

Hình 4.9 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đến nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ biên C-C với $L/R=5$, $R/h=10$, $T_{in}=300K$, $T_{out}=400K$.	120
Hình 4.10 Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích V_{CNT}^* đối với nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ C-F FG- Λ có $L/R=2$, $R/h=20$, $T_{in}=400K$, $T_{out}=300K$	123
Hình 4.11 Ảnh hưởng của loại tải đến chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của vỏ trụ C-C FG-V với $V_{CNT}^*=0.28$, $L/R=5$, $R/h=10$	126
Hình 4.12 Ảnh hưởng của nhiệt độ bên trong đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ C-S FG- Λ với $V_{CNT}^*=0.28$, $T_{out}=300K$, $L/R=3$, $R/h=10$	129
Hình 4.13 Ảnh hưởng của nhiệt độ đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ C-C FG-V với $V_{CNT}^*=0.28$, $T_{in}=300K$, $L/R=5$, $R/h=10$	131

MỞ ĐẦU

1. Tính cấp thiết của đề tài

Vật liệu composite cơ tính biến thiên được gia cường bởi ống nano carbon (Functionally graded carbon nanotube reinforced composites FG-CNTRC) là loại vật liệu mới, có nhiều ưu điểm như: độ bền cao, khối lượng riêng nhỏ, tính chất nhiệt và tính chất điện tốt. Nhờ đặc tính vượt trội, FG-CNTRC có tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như: kỹ thuật điện tử, vi cơ điện tử, y học, thể thao, hàng không vũ trụ...

Bị thu hút bởi triển vọng mà FG-CNTRC mang lại, nhiều nhà khoa học đã tham gia nghiên cứu về vật liệu và kết cấu FG-CNTRC. Mô hình vật liệu FG-CNTRC đầu tiên đã được đề xuất bởi Shen [7] vào năm 2009. Kể từ đó hàng loạt nghiên cứu về kết cấu dầm, tấm, vỏ làm bằng vật liệu FG-CNTRC đã được thực hiện bởi các nhà khoa học trên thế giới. Tổng quan về các công trình nghiên cứu ứng xử cơ học các kết cấu chế tạo từ vật liệu FG-CNTRC được tổng kết bởi Liew [8], Behera [9], Singh [10], Rubel [11], Ebrahimi [12], Liew [13].

Trong thực tế, các kết cấu khi làm việc thường chịu tác dụng của tải trọng cơ học và tải trọng nhiệt. Đã có nhiều nghiên cứu về ứng xử nhiệt đàn hồi của kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC được thực hiện, đa số các nghiên cứu này đều giả thiết các tính chất của vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ (temperature-independent properties) [14-18]. Một số ít các nghiên cứu đã xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất của vật liệu (temperature-dependent properties) [19, 20]. Tuy nhiên, các nghiên cứu này chưa đánh giá các ảnh hưởng của điều kiện biên đến bài toán nhiệt đàn hồi.

Kỹ thuật hàng không vũ trụ là lĩnh vực mà FG-CNTRC có nhiều tiềm năng ứng dụng. Trong lĩnh vực này thì vỏ trụ là dạng kết cấu điển hình trên các thiết bị bay. Về mặt tải trọng, các kết cấu trên thiết bị bay chịu tác động đồng

thời của tải trọng cơ và nhiệt độ. Do đó, nghiên cứu kết cấu vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC dưới tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt độ là vấn đề quan trọng của cơ học kết cấu thiết bị bay. Hơn nữa, trong thực tế các trường hợp phá hủy kết cấu thường xảy ra tại vùng biên của kết cấu. Vì vậy, để đáp ứng yêu cầu nhiệm vụ thiết kế, chế tạo các sản phẩm công nghệ cao, đặc biệt là lĩnh vực hàng không vũ trụ cần thực hiện phân tích ứng suất – biến dạng tại những vùng chuyển tiếp của kết cấu, vùng biên, vùng chịu tải trọng tập trung...

Trong tính toán phân tích cơ học đối với vỏ trụ, nhiều lý thuyết khác nhau đã được sử dụng như lý thuyết vỏ cổ điển, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao... Trong đa số các nghiên cứu, thường sử dụng lý thuyết bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất pháp tuyến ngang (transverse normal stresses) theo độ dày vỏ. Thời gian gần đây, việc nghiên cứu ứng xử cơ học của vỏ trụ bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có tính đến ảnh hưởng của ứng suất pháp tuyến ngang theo độ dày vỏ đã trở thành một hướng phát triển đáng chú ý, cho phép đánh giá đầy đủ hơn trạng thái ứng suất của vỏ, đặc biệt tại các khu vực biên [21-24].

Từ những phân tích ở trên, có thể kết luận rằng, đề tài “*Phân tích tĩnh kết cấu vỏ trụ composite cơ tính biến thiên được gia cường bằng các ống nano carbon chịu tải trọng cơ và nhiệt độ*” là vấn đề khoa học có tính cấp thiết.

2. Mục tiêu nghiên cứu của luận án

Mục tiêu của luận án bao gồm:

- Xây dựng mô hình, phương pháp giải và chương trình tính toán tin cậy để phân tích tĩnh vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt độ. Góp phần bổ sung và hoàn thiện mô hình và phương pháp tính toán phục vụ nghiên cứu ứng xử cơ học của kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC.

- Khảo sát, đánh giá đáp ứng tĩnh của vỏ trụ làm từ vật liệu FG-CNTRC trong các điều kiện làm việc khác nhau. Từ đó, đưa ra các khuyến cáo và đề xuất khoa học phục vụ cho việc nghiên cứu khai thác, thiết kế chế tạo kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của luận án

Đối tượng nghiên cứu: Đối tượng nghiên cứu là vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC, chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt độ.

Phạm vi nghiên cứu: Vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC có điều kiện biên và thông số hình học khác nhau chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt độ. Vật liệu cốt gia cường là CNT thẳng, đồng phương theo trục dọc của vỏ, có tỷ lệ thể tích biến thiên theo chiều dày vỏ. Vật liệu kết cấu làm việc trong giới hạn đàn hồi. Sử dụng mô hình lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D và tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ.

4. Phương pháp nghiên cứu

Luận án này sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết dựa trên cách tiếp cận giải tích. Thực hiện xây dựng mô hình tính, phương pháp giải và chương trình tính toán để khảo sát kết cấu vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC chịu tải trọng cơ, nhiệt. Phương pháp giải tích sử dụng chuỗi lượng giác kết hợp với phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình cân bằng của vỏ trụ có điều kiện biên khác nhau. Thực hiện so sánh kết quả của luận án với các kết quả đã được công bố để khẳng định tính đúng đắn của mô hình tính, phương pháp giải và chương trình tính toán.

Cấu trúc luận án

Luận án gồm phần mở đầu, 4 chương và kết luận.

Mở đầu : Trình bày tính cấp thiết, mục tiêu, đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu cũng như ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài.

Chương 1. Tổng quan về vấn đề nghiên cứu bao gồm: tính chất đặc điểm vật liệu FG-CNTRC, các kết quả nghiên cứu đã công bố về kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu, từ đó xác định hướng nghiên cứu của luận án.

Chương 2. Xây dựng mô hình tính và phương pháp giải tích cho bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ, nhiệt theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D và tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ

Chương 3. Nghiên cứu khảo sát vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao

Chương 4. Nghiên cứu khảo sát vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ, nhiệt theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ.

Kết luận và kiến nghị. Trình bày các kết quả đã đạt được, những đóng góp mới của luận án và các kiến nghị khác.

5. Ý nghĩa khoa học và tính thực tiễn của đề tài

Vật liệu FG-CNTRC là loại vật liệu mới với nhiều ưu điểm, có tiềm năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực. Kết cấu vỏ trụ là dạng kết cấu thường gặp trong thực tế như tên lửa, đường ống, vỏ động cơ... Trong quá trình làm việc, kết cấu thường chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt. Do vậy nghiên cứu vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC chịu tác dụng cơ nhiệt là vấn đề xuất phát từ thực tiễn.

Đa số các nghiên cứu đều bỏ qua ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu. Trong khi thực tế đã cho thấy các tính chất cơ lý của vật liệu chịu ảnh hưởng lớn bởi nhiệt độ. Mặt khác, đa số các nghiên cứu đều giả sử hàm phân bố nhiệt độ trong vỏ là dạng hàm cho trước (hằng số, tuyến tính, dạng sin..)

Trong luận án thực hiện tính toán với tính chất vật liệu có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ và hàm phân bố nhiệt độ xác định từ phương trình truyền nhiệt, đây là một trong những đóng góp mang tính khoa học và thực tiễn của đề tài.

Bên cạnh đó, sử dụng phương pháp giải tích để nghiên cứu các kết cấu có điều kiện biên khác nhau là một thử thách thú vị. Đa số các nghiên cứu bằng phương pháp giải tích về kết cấu FG-CNTRC chỉ xét đến điều kiện biên gối tựa đơn. Hướng tiếp cận theo phương pháp giải tích của luận án bằng cách sử dụng chuỗi lượng giác để xấp xỉ cho hàm chuyển vị, tải trọng và sử dụng phép biến đổi Laplace để tìm biểu thức nghiệm của chuyển vị cho phép giải quyết đối với các loại biên khác nhau. Ngoài ra, phương pháp giải tích này còn có khả năng tính toán đối với các tải trọng phân bố không đều, tải trọng tác dụng trên một phần của vỏ.

Khi tính toán đối với vỏ dày cho thấy sự cần thiết sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang. Lý thuyết này cũng cho phép khảo sát đầy đủ hơn trạng thái ứng suất tại vùng liên kết biên là nơi thường xảy ra sự phá hủy của kết cấu trong thực tế. Từ đó có thể đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố (biên liên kết, vật liệu, hình học, tải trọng) đến ứng xử cơ học của kết cấu và đưa ra những khuyến cáo quan trọng phục vụ quá trình tính toán thiết kế, khai thác sử dụng kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC. Do đó nghiên cứu vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang mang ý nghĩa khoa học và thực tiễn.

Từ những phân tích trên có thể thấy rằng phân tích tĩnh vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC chịu tải trọng cơ và nhiệt độ là vấn đề có ý nghĩa khoa học và thực tiễn.

Chương 1. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Chương 1 trình bày về về cấu tạo và tính chất vật liệu FG-CNTRC, tổng quan các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt trong nước và trên thế giới. Trên cơ sở tổng hợp, phân tích, đánh giá, luận án khái quát kết quả đã đạt được và các vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu về tính toán kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC, từ đó lựa chọn hướng nghiên cứu của luận án.

1.1. Vật liệu composite cơ tính biến thiên được gia cường bởi ống nano carbon FG-CNTRC

1.1.1. Khái niệm vật liệu FG-CNTRC

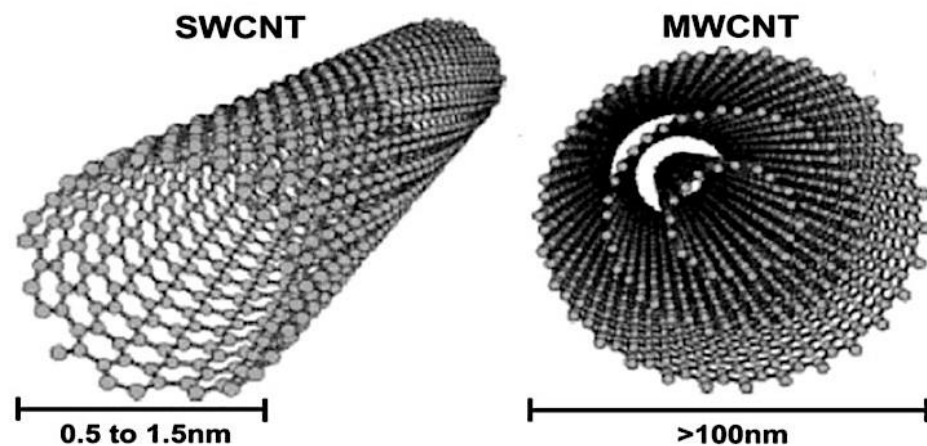
Nanocomposite là một loại vật liệu composite trong đó một hoặc nhiều pha (gọi là vật liệu cốt) ở kích thước nano (nhỏ hơn 100 nm) được nhúng trong vật liệu nền có thể là nền gốm, kim loại hoặc polyme. Loại vật liệu này được tạo ra bởi các thành phần vô cơ hoặc hữu cơ ở cấp độ phân tử để có được các đặc tính mới. Vật liệu cốt và nền tương tác với nhau thông qua các tương tác yếu như van der Waals, liên kết hydro, tương tác tĩnh điện yếu hoặc bằng liên kết cộng hóa trị [25].

Vật liệu nanocomposite thông thường có mật độ pha cốt phân bố trong pha nền một cách đồng đều, do đó tính chất không đổi theo một phương nhất định. Nanocomposite có cơ tính biến thiên là một cấp độ phát triển cao hơn của vật liệu nanocomposite thông thường. Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material-FGM) có các tính chất thay đổi theo các hướng ưu tiên nhờ sự thay đổi tỷ lệ của vật liệu thành phần. Dựa trên ý tưởng của vật liệu FGM, vật liệu nanocomposite có cơ tính biến thiên có vật liệu cốt với kích thước nano được phân bố theo các quy luật định trước nhằm tạo ra được cơ tính biến thiên theo hướng ưu tiên [13].

Xét về thành phần có nhiều loại vật liệu nanocomposite có cơ tính biến thiên khác nhau, trong khuôn khổ của đề tài tập trung nghiên cứu vật liệu nanocomposite cơ tính biến thiên được gia cường bằng ống nano cacbon (Functionally graded carbon nanotube reinforced composites - FG-CNTRC).

1.1.2. Ống nano cacbon

Ống nano cacbon (Carbon nanotube – CNT) là thành phần quan trọng, quyết định đến đặc tính của vật liệu FG-CNTRC. CNT được phát hiện đầu tiên bởi Iijima [26] năm 1991. Nhờ ưu điểm độ bền cao, trọng lượng riêng nhỏ, tính dẫn nhiệt, dẫn điện tốt, CNT được coi là một trong những loại vật liệu thế hệ mới đóng vai trò quan trọng trong ngành công nghệ vật liệu nano



Hình 1.1 Cấu trúc vật liệu cốt ống nano cacbon đơn vách và đa vách [27]

Vật liệu cốt CNT có hai dạng cấu trúc đơn vách và đa vách. Ống carbon nano đơn vách (single walled carbon nanotube - SWCNT) [28, 29] được tạo thành bằng cách quấn liên tục một lớp graphene đơn nhất tạo thành một hình trụ với đường kính cỡ 1nm và độ dài cỡ vài phần cm. Tương tự như vậy, ống carbon nano đa vách (multi walled carbon nanotube - MWCNT) [26] được tạo thành bằng cách cuốn đồng trục các lớp graphene cách nhau cỡ 0.35nm thành hình trụ có đường kính từ 2 đến 100nm có chiều dài cỡ hàng chục micromet.

Bảng 1.1 So sánh đặc tính cơ học của CNT với một số loại vật liệu khác [30]

Vật liệu	$\rho(g/cm^3)$	$E(GPa)$	$\sigma_m(GPa)$	$\varepsilon(\%)$
SWCNT	1.33	1054	150	12
MWCNT	2.6	1200	150	12
Sợi cacbon M60JB	1.93	588	3.82	0.7
Sợi thủy tinh kiểu *S*	2.48	86	4.58	5.4
Kevlar 49	1.44	112	3.00	2.4
Nhôm 2219-T87	2.83	73	0.46	10
Thép 17-7 PH RH950	7.65	204	1.38	6
Epoxy	1.25	3.5	0.005	4

Về đặc tính đàn hồi, Overney và cộng sự [31] đã tính toán độ cứng của SWCNT ngắn và nhận thấy mô-đun Young có giá trị là 1500 GPa, tương tự như mô-đun của graphite. Năm 1997, Wong và cộng sự [32] đã sử dụng kính hiển vi lực nguyên tử (AFM) để đo trực tiếp hằng số độ cứng của một cung MWCNT được ghim ở một đầu. Họ xác định được giá trị mô-đun Young trung bình là 1.28 TPa. Sau đó Wong và cộng sự đã tiếp tục thực hiện khảo sát và xác định độ cứng uốn trung bình của CNT là 14 GPa. Sử dụng AFM để uốn cong một cung MWCNT, được ghim ở mỗi đầu trên một lỗ, Salvétat và cộng sự [33] xác định được mô-đun Young trung bình là 810 GPa. Ống nano carbon có độ cứng vượt trội hơn so với sợi carbon thông thường với giá trị mô-đun Young lớn hơn 1 TPa và khối lượng riêng chỉ $1.3 g/cm^3$. Lu [34] đã xác định được giá trị mô-đun đàn hồi Young của CNT cỡ 1 TPa, giá trị này phụ thuộc đường kính và kiểu CNT. Ngoài ra, độ cứng lý thuyết của CNT cao hơn 100 lần so với thép, trong khi độ biến dạng có thể đạt tới 12% với khối lượng riêng chỉ bằng 1/6 so với thép. Các giá trị cụ thể về đặc tính đàn hồi khi so sánh với các vật liệu khác được liệt kê cụ thể ở Bảng 1.1.

Không chỉ vậy, CNT còn là một trong những vật liệu có khả năng dẫn điện và dẫn nhiệt tốt nhất. Các so sánh về đặc tính dẫn nhiệt và dẫn điện của CNT so với các loại vật liệu khác được cho tương ứng trong Bảng 1.2 và Bảng 1.3.

Bảng 1.2 So sánh đặc tính dẫn nhiệt của CNT với một số loại vật liệu khác [30]

Vật liệu	Hệ số dẫn nhiệt $k(W/mK)$
SWCNT	>3000
Graphite	3000 trong mặt phẳng/6 trong trục c
Nhôm 2219-T87	120
Đồng đỏ	400
Bạc	420
Sắt	80
Sợi thủy tinh	0.046-1.13
Sợi cacbon K1352U	140
Sợi cacbon K13D2U	800
Epoxy	0.12

Bảng 1.3 So sánh đặc tính dẫn điện của CNT với một số loại vật liệu [30]

Vật liệu	Hệ số dẫn điện $\sigma(S/m)$
CNT	10^6-10^7
Đồng đỏ	6×10^6
Bạc	6.3×10^7
Sắt	1.00×10^7
Sợi thủy tinh	10^{-14}
Sợi cacbon Pitch	$1-8.5 \times 10^6$
Sợi cacbon PAN	$6.5-14 \times 10^6$
Epoxy	10^{-8}

1.1.3. Cấu tạo và tính chất vật liệu FG-CNTRC

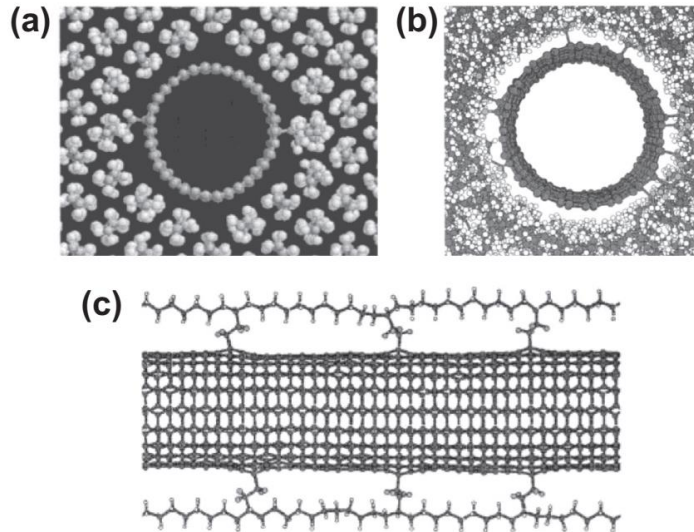
Với những đặc tính nổi bật trên, CNT được coi lựa chọn hàng đầu để gia cường cho vật liệu composite. Các kết quả thu được từ thực nghiệm cho thấy khi thêm thành phần CNT vào nền polymer thì cơ tính cũng như các đặc điểm về điện nhiệt của vật liệu composite tạo thành được cải thiện một cách rõ nét.

Vào năm 1999, Shaffer and Windle [35] lần đầu tiên nghiên cứu về các đặc tính cơ nhiệt và điện của màng composite kích thước lớn có chứa CNT dựa trên sự hình thành của chất keo trung gian ổn định. Kết quả phân tích động lực học cơ nhiệt cho màng lắng đọng từ hơi hóa (CVD) -MWCNT-polyvinyl alcohol với tỷ lệ trọng lượng CNT lên đến 60% cho thấy, mô-đun phục hồi của

polyme tăng từ 6 GPa lên 12 GPa. Một nghiên cứu khảo sát khác về vật liệu tổng hợp CVD-MWCNT-polystyrene sau đó được tiến hành bởi Qian và cộng sự [36] bằng cách sử dụng thử nghiệm độ bền kéo. Khi MWCNT được phân bố đều trong nền polystyrene, giá trị mô-đun xác định được tăng từ 1,2 GPa đến 1,62 GPa cho nền polystyrene và 1,69 GPa cho vật liệu composite chứa 1% trọng lượng các ống CNT ngắn ($\sim 15 \mu\text{m}$) và dài ($\sim 50 \mu\text{m}$). Độ bền kéo của polyme cũng tăng từ 12,8 MPa lên 16 MPa cho cả hai loại CNT. Một nghiên cứu tương tự cũng được thực hiện bởi Safadi và cộng sự [37]. Họ quan sát thấy rằng mô-đun của polyme tăng lên 1,53 GPa trong khi mô-đun của composite tăng lên 3,4 GPa với tỷ lệ thể tích CNT tăng thêm 2,5%, độ bền tăng từ 19,5 MPa lên 30,6 MPa.

Cadek và cộng sự [38] đã nghiên cứu các đặc tính hình thái và cơ học của MWCNT khi được phân tán trong nền polyvinyl alcohol và polyvinyl carbazole. Kết quả nghiên cứu cho thấy, mô-đun tăng từ 7 GPa lên 12,6 GPa với tỷ lệ thể tích 0,6 % MWCNT trong nền polyvinyl alcohol. Đối với tỷ lệ thể tích MWCNT 4,8% trong polyvinyl carbazole, thì mô-đun tăng từ 2 GPa lên 5,6 GPa. Ruan và cộng sự [39] đã thiết lập vật liệu composite CVD-MWCNT 1% trong nền polyetylen tỷ trọng cao và quan sát thấy mô-đun và độ bền chỉ được cải thiện một cách khiêm tốn. Tuy nhiên, kết quả thu được rõ nét hơn khi màng được tạo ra bằng cách trộn nóng. Mô-đun và độ bền được tăng lên cùng một tỷ lệ đối với cả polymer và composite được tạo thành khi tăng tỷ lệ trộn. Khi tỷ lệ trộn là 60 và 70 giá trị mô-đun và độ bền của màng composite lần lượt đạt 50 và 2,5 GPa. Tuy nhiên, với tỷ lệ 70, độ dẻo dai tăng nhanh hơn nhiều, đạt 150 MPa. Pötschke và cộng sự [40] đã nghiên cứu đặc tính lưu biến của hỗn hợp đúc nén của polycarbonate và CNT bằng cách sử dụng phép đo lưu biến dao động ở 260°C . Họ phát hiện ra rằng với tỷ lệ 2% về khối lượng của CNT có thể cải thiện một cách rõ nét điện trở suất và độ nhớt. Những nghiên cứu vừa

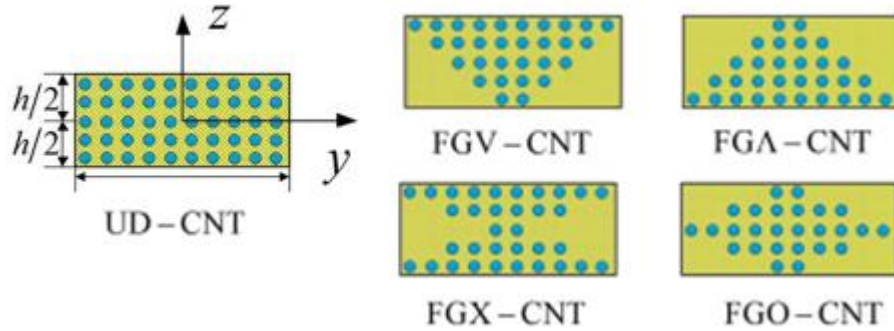
đề cập ở trên đã cho thấy việc đưa CNT vào nền polyme có thể cải thiện rõ nét về cơ tính và các đặc tính điện, nhiệt của các vật liệu nanocomposite tạo thành.



Hình 1.2 Kết quả mô phỏng minh họa các liên kết hóa học phân tử giữa CNT và vật liệu nền: nền kết tinh (a, c) và nền vô định hình (b) [30]

Đối với vật liệu nanocomposite truyền thống (CNTRC), các cơ tính, đặc tính nhiệt, vật lý không thay đổi theo vị trí, do vật liệu gia cường CNT được phân bố một cách không đổi ngẫu nhiên trong vật liệu nền. Để phát huy được tối đa hiệu quả sử dụng của vật liệu, ý tưởng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được đưa vào vật liệu nanocomposite để nghiên cứu chế tạo ra vật liệu nanocomposite có cơ tính biến thiên (FG-CNTRC). Mô hình vật liệu FG-CNTRC được đề xuất đầu tiên bởi Shen [7] vào năm 2009. Sau đó các mô hình này được Shen tiếp tục phát triển trong các nghiên cứu sau đó [17, 41-43].

Hiện nay, có năm mô hình vật liệu FG-CNTRC được đề xuất và tập trung nghiên cứu như Hình 1.3, bao gồm mô hình UD có CNT phân bố đều và bốn mô hình có tỷ lệ thể tích CNT phân bố tuyến tính theo chiều dày được ký hiệu là FG- Λ , FG-V, FG-O, FG-X [7, 16, 17, 41-44]. Các mô hình này đã được nhiều nhà nghiên cứu sử dụng để khảo sát, tính toán cho các kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC.



Hình 1.3 Các kiểu phân bố của mô hình vật liệu FG-CNTRC [44]

1.2. Tổng quan các nghiên cứu kết cấu tấm vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC

Tiềm năng to lớn của FG-CNTRC đã thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học, nhiều nghiên cứu về kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC đã được thực hiện trong những năm qua. Các nghiên cứu này đã được tổng quan lại bởi Liew và cộng sự [8, 13], Zhang và cộng sự [44], Kurmar và cộng sự [45], Behera và cộng sự [9], Ebrahimi và cộng sự [12].

1.2.1. Về tải trọng nhiệt và ảnh hưởng của tải trọng nhiệt đến các tính chất vật liệu trong các nghiên cứu về tấm vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC

Vấn đề nghiên cứu kết cấu tấm, vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC chịu tải trọng nhiệt là vấn đề có tính khoa học và thực tiễn cao. Đến nay các nhà khoa học vẫn đang tiếp tục đề xuất các mô hình truyền nhiệt, các mối liên hệ giữa nhiệt độ và các đặc tính cơ học của vật liệu FG-CNTRC với mong muốn phản ánh đầy đủ các quá trình trong thực tế.

Nhiều nghiên cứu khảo sát không xét đến gradient nhiệt độ trong trường hợp nhiệt độ của toàn bộ kết cấu là đồng nhất. Shen [7] phân tích uốn phi tuyến của tấm FG-CNTRC có biên tựa đơn gia cường bằng SWCNT dưới tác dụng của tải trọng ngang phân bố đều và tải trọng hình sin trong môi trường nhiệt. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao của Reddy, Shen khảo sát ứng xử sau mất ổn định (postbuckling) của vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC gia cường bằng

SWCNT trong môi trường nhiệt chịu tải theo phương dọc trục [42] và tải trọng áp suất [17]. Dựa trên HSDT, Wang và Shen đã khảo sát đặc tính dao động của tấm FG-CNTRC trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt bằng phương pháp nhiễu cải tiến (improved perturbation technique) [46]. Zhu và cộng sự [47] đã tiến hành khảo sát trạng thái chịu uốn và dao động tự do của tấm nanocomposite gia cường bằng SWCNT với trường nhiệt độ đồng nhất trong kết cấu. Shen [48] khảo sát dao động và trạng thái chịu uốn của tấm sandwich với bề mặt CNTRC bằng mô hình tiếp cận đa tỷ lệ (multi-scale model). Sử dụng HSDT, Shen [49] khảo sát hiện tượng mất ổn định (buckling) và ứng xử sau mất ổn định của vỏ trụ FG-CNTRC trong môi trường nhiệt. Ngoài ảnh hưởng của giãn nở do nhiệt, tác giả cũng đã xem xét đặc tính vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ. Trong nghiên cứu này đã chỉ ra rằng nhiệt độ giới hạn (buckling temperature) cũng như giá trị độ bền nhiệt sau mất ổn định tăng lên khi CNT được phân bố biến thiên so với khi CNT phân bố đều. Shen và Xiang [43] sử dụng HSDT khảo sát dao động phi tuyến của vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC. Sử dụng HSDT của Reddy, Shen và Xiang [50] đã khảo sát ứng xử sau mất ổn định của vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC chịu tải trọng dọc trục và hướng tâm trong môi trường nhiệt. Tác giả Ninh và Bích [51] đã nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ FG-CNTRC có lớp áp điện bao quanh bởi nền đàn hồi chịu tải trọng cơ nhiệt với trường nhiệt độ được xét đến đồng nhất trong toàn bộ kết cấu. Tác giả Lê Thị Như Trang đã nghiên cứu ổn định nhiệt đàn hồi của tấm chữ nhật, panel trụ và panel hai độ cong bằng vật liệu composite gia cường CNT trên nền đàn hồi [1]. Phương pháp Galerkin đã được sử dụng để giải quyết các lớp bài toán khác nhau cho kết cấu có điều kiện biên tựa bản lề. Trong lớp bài toán thứ nhất với giả thiết nhiệt độ tăng đều trong toàn bộ kết cấu, tác giả đã khảo sát ổn định phi tuyến của: tấm chữ nhật FG-CNTRC [52-54]; panel trụ FG-CNTRC [55-59]; panel hai độ cong FG-CNTRC [60, 61]. Kết quả khảo sát cho thấy, sự không

hoàn hảo hình dáng và sự ràng buộc liên kết biên đàn hồi ảnh hưởng đến tải tới hạn và khả năng chịu tải sau mất ổn định của kết cấu. Ở nhiệt độ càng cao thì ảnh hưởng của tính không hoàn hảo hình dáng và tính đàn hồi của liên kết biên càng nhạy và rõ ràng. Sự phân bố CNT ảnh hưởng đến khả năng ổn định và chịu tải, khi CNT phân bố nhiều hơn ở gần hai bề mặt kết cấu, khi có nền đàn hồi và/hoặc khi độ cong tăng lên (đối với panel) thì độ ổn định của tấm và panel tăng lên. Tác giả Vũ Thanh Long [2] đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của các kết cấu sandwich dạng tấm chữ nhật, panel trụ và panel hai độ cong làm từ các lớp vật liệu FG-CNTRC chịu điều kiện tải cơ, nhiệt. Trường nhiệt độ được giả thiết đồng nhất trong toàn bộ kết cấu. Các phương trình cơ bản được thiết lập dựa trên FSDT có kể đến phi tuyến hình học do độ võng lớn, tính không hoàn hảo hình dáng ban đầu và áp lực tương tác từ nền đàn hồi Winkler-Pasternak. Các kết quả nghiên cứu đã được tác giả công bố trong các bài báo [62-65]. Sử dụng trường nhiệt độ không đổi trong toàn bộ kết cấu, nhóm tác giả Dong, Van Tien và cộng sự đã khảo sát ổn định phi tuyến của vỏ FG-CNTRC có gân tăng cứng trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi [66], nghiên cứu ổn định của vỏ trụ FG-CNTRC chịu xoắn được tăng cứng [67]. Dat và cộng sự [68] đã nghiên cứu dao động của tấm sandwich có lớp giữa là CNTRC, hai mặt trên dưới là nam châm đàn hồi. Trong nghiên cứu có xét đến ảnh hưởng của nền đàn hồi chịu tải trọng nhiệt, ẩm. Trường nhiệt độ được giả thiết đồng nhất trong toàn bộ kết cấu. Nguyễn Văn Thành [3] đã nghiên cứu ổn định và các đáp ứng phi tuyến của kết cấu tấm và vỏ FG-CNTRC trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt. Áp dụng phương pháp Galerkin cho kết cấu có biên tựa bản lề, tác giả đã thực hiện phân tích tĩnh ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật FG-CNTRC có gân; phân tích đáp ứng động phi tuyến của tấm chữ nhật FG-CNTRC [69]; phân tích dao động và đáp ứng động phi tuyến của tấm FG-CNTRC sandwich [70]; phân tích đáp ứng động và dao động phi tuyến của vỏ

trụ FG-CNTRC [71]; phân tích ổn định phi tuyến của vỏ nón cụt FG-CNTRC [72]; phân tích dao động cưỡng bức phi tuyến của panel trụ sandwich với phần lõi là vật liệu tổ ong có hệ số Poission âm và phần mặt là FG-CNTRC [73]. Các thông số đàn hồi của vật liệu có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ, tuy nhiên trường nhiệt độ được giả sử đồng nhất trong toàn bộ kết cấu. Luận án của Phạm Thanh Hiếu [4] đã thực hiện phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống bằng vật liệu FG-CNTRC có kể đến tính đàn hồi của liên kết biên. Kết cấu được bao quanh bởi nền đàn hồi và chịu tải trọng cơ, nhiệt và kết hợp cơ-nhiệt. Trong các bài toán được xét đến, tác giả đã nghiên cứu hiện tượng mất ổn định và sau mất ổn định của vỏ trụ FG-CNTRC [74-76], vỏ trống [77-79] trong môi trường nhiệt với giả thiết trường nhiệt độ đồng nhất trong toàn bộ kết cấu.

Một số nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC có xét đến tải gradient nhiệt (Thermal gradient loads) nhưng đã sử dụng giả thiết các tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ (Temperature independent properties). Trong những nghiên cứu này yếu tố nhiệt chỉ thể hiện ở phần biến dạng nhiệt. Alibeigloo [18] sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều để khảo sát tấm chữ nhật bằng vật liệu FG-CNTRC có biên tựa đơn chịu tải trọng cơ nhiệt. Dựa trên lý thuyết đàn hồi, Alibeigloo [15] nghiên cứu đáp ứng đàn hồi – nhiệt của tấm chữ nhật bằng vật liệu FG-CNTRC có lớp áp điện với các cạnh biên tựa đơn. Alibeigloo [14] đã tiến hành khảo sát panel trụ bằng vật liệu FG-CNTRC có biên tựa đơn chịu tải trọng cơ nhiệt. Liên quan đến nội dung luận án [1], ở lớp bài toán thứ hai với giả thiết nhiệt độ phân bố trong mặt phẳng tấm được giả sử là các hàm quy luật dạng sin và dạng tuyến tính, tác giả Lê Thị Như Trang đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật FG-CNTRC có bốn cạnh biên bản lề [80]. Các tính chất vật liệu được giả thiết không phụ thuộc vào nhiệt độ. Kết quả cho thấy khác với trường hợp nhiệt độ tăng đều, khi tấm chịu phân bố nhiệt độ phân bố dạng hàm sin, các lực nén do nhiệt gây ra không còn đều nữa

và đáp ứng mất ổn định theo kiểu rẽ nhánh chỉ xảy ra đối với các tấm CNTRC mà trong đó CNT được phân bố theo cấu hình đối xứng qua mặt giữa.

Có rất ít công bố đồng thời xét đến ảnh hưởng của tải gradient nhiệt và ảnh hưởng của yếu tố nhiệt độ đến các thông số đàn hồi (Temperature-dependent properties) bên cạnh ảnh hưởng của biến dạng nhiệt. Sử dụng mô hình hóa theo phương pháp tiếp cận đa tỷ lệ, Shen và Zhang [41] phân tích hiện tượng mất ổn định và ứng xử sau mất ổn định của tấm FG-CNTRC gia cường SWCNT bốn cạnh tựa đơn có nhiệt độ thay đổi trong bề mặt. Pourasghar và Chen [19] nghiên cứu đáp ứng đàn hồi nhiệt của vỏ trụ có CNT phân bố đều được liên kết với nền đàn hồi có xét đến gradient nhiệt. Các tác giả đã sử dụng các hàm chuyển vị và phân bố nhiệt độ thỏa mãn điều kiện biên gối tựa để chuyển hệ phương trình cân bằng về phương trình vi phân tuyến tính. Moradi-Dastiefti và cộng sự [81], Moradi-Dastiefti và Paygeneh [82] khảo sát đáp ứng tĩnh và dao động tự do của vỏ nanocomposite gia cường bằng ống CNT đơn vách lượn sóng chịu tải trọng cơ nhiệt có xét đến gradient nhiệt và thông số đàn hồi phụ thuộc nhiệt độ. Tuy nhiên các nghiên cứu này chưa đánh giá các ảnh hưởng của điều kiện biên đến bài toán nhiệt đàn hồi. Liên quan đến nội dung luận án [4], Hieu và Tung đã nghiên cứu đáp ứng mất ổn định và sau mất ổn định của: vỏ trống FG-CNTRC [83]; vỏ trụ FG-CNTRC [84] chịu tải trọng cơ nhiệt có xét đến đồng thời gradient nhiệt và tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ. Tải trọng nhiệt được giả sử là một hàm tuyến tính cho trước. Hệ phương trình động lực học của vỏ được thiết lập dựa trên CST có kể đến yếu tố phi tuyến hình học. Sử dụng phương pháp Galerkin để giải bài toán cho vỏ có biên tựa bản lề.

1.2.2. Về lý thuyết tấm vỏ được sử dụng trong các nghiên cứu về kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC

Đối với tấm vỏ FG-CNTRC có độ dày mỏng, việc sử dụng lý thuyết tấm vỏ cổ điển (Classical shell theory - CST) để nghiên cứu về tấm vỏ FG-CNTRC

tương đối phổ biến. Tác giả Ninh và Bich [51] sử dụng CST và phi tuyến hình học von Karman để nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ FG-CNTRC có lớp áp điện có biên tựa bao quanh bởi nền đàn hồi. Van Tung và Trang [85] sử dụng CST để khảo sát ổn định phi tuyến của panel trụ FG-CNTRC. Sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển Donnell có kể đến phi tuyến hình học von Karman-Donnell, Hieu và Van Tung đã nghiên cứu hiện tượng mất ổn định và sau mất ổn định của vỏ trụ mỏng FG-CNTRC trong môi trường nhiệt [74-76, 84], vỏ trống FG-CNTRC [83, 86]. Phương pháp Galerkin đã được sử dụng để giải hệ phương trình tổng quát cho vỏ có biên tựa bản lề. Dựa trên lý thuyết vỏ mỏng cổ điển Donnell với phi tuyến von Karman và phương pháp Galerkin, Dong, Van Tien và cộng sự đã khảo sát ổn định phi tuyến của vỏ FG-CNTRC [66], ổn định của vỏ trụ FG-CNTRC chịu xoắn được tăng cứng [67]. Do và cộng sự [87] nghiên cứu ổn định phi tuyến của vỏ FG-CNTRC hình côn có biên tựa bằng CST và phương pháp Galerkin. Duc và cộng sự đã sử dụng CST và phương pháp Galerkin để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ nón cụt FG-CNTRC bao quanh bởi nền đàn hồi trong môi trường nhiệt [72].

Khi khảo sát đối với tấm vỏ dày, các nhà khoa học chủ yếu sử dụng các lý thuyết có kể đến biến dạng cắt. Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (First-order shear deformation theory-FSDT) [88], Zhu và cộng sự [47] đã thực hiện phân tích uốn và dao động tự do của tấm CNTRC có độ dày mỏng và trung bình. Rafiee và cộng sự [89], Bakhadda và cộng sự [90] sử dụng FSDT để phân tích cho tấm CNTRC có chuyển vị lớn. Dựa trên lý thuyết này, Zhang và cộng sự [91] đã nghiên cứu uốn và động lực học phi tuyến của tấm CNTRC. Lie và cộng sự [92] đã công bố phân tích ổn định tĩnh của tấm FG-CNTRC sử dụng lý thuyết tấm Mindlin và phương pháp không lưới *kp*-Ritz. Liew và cộng sự [93] thực hiện khảo sát ứng xử sau mất ổn định của panel trụ FG-CNTRCs dưới tác dụng của tải dọc trục bằng FSDT. Các tác giả đã sử dụng phương pháp Ritz

để giải hệ phương trình cân bằng. Dựa trên lý thuyết tấm Mindlin, hiện tượng ổn định của tấm FG-CNTRCs chịu tải trọng phẳng theo một trục và hai trục đã được xem xét bởi Mehrabadi và cộng sự [94]. Malekzadeh và Shojaee [95] đã khảo sát ổn định của tấm composite chứa các lớp CNTRC. Tiêu chuẩn ổn định Trefftz và FSDT đã được sử dụng để thiết lập phương trình cân bằng cho tấm có độ dày mỏng đến trung bình. Sau đó, phương trình cân bằng với các điều kiện biên tùy ý đã được giải bằng cách sử dụng phương pháp tiếp cận cầu phương ánh xạ-vi phân (the mapping-differential quadrature approach). Dựa trên FSDT, Lei và cộng sự [96] đã trình bày nghiên cứu về động lực học đàn hồi (elastodynamic) của tấm FG-CNTRCs. Phương pháp Ritz và Newmark- β đã được sử dụng để giải phương trình tổng quát. Dao động của vỏ nón cụt bằng vật liệu FG-CNTRC có xét đến sự quay chịu ảnh hưởng bởi lực ly tâm và lực Coriolis đã được khảo sát bởi Heydarpour và cộng sự [97]. Phương trình tổng quát được xác định từ lý thuyết tấm Mindlin và nguyên lý Hamilton's. Sau đó sử dụng phương pháp cầu phương vi phân (DQM) để giải hệ phương trình tổng quát. Dựa vào FSDT, Ansari và Torabi [98] đã nghiên cứu dao động và ổn định của vỏ nón FG-CNTRCs chịu tải trọng dọc trục phức tạp. Phương pháp DQM toán tử vi phân tuần hoàn đã được sử dụng để giải hệ phương trình vi phân toàn cục. Thu, Chung và cộng sự [99] đã khảo sát hiện tượng flutter phi tuyến của tấm FG-CNTRC chịu tải trọng khí động. Hệ phương trình được thiết lập dựa trên lý thuyết tấm Mindlin và quan hệ phi tuyến von Karman. Sử dụng FEM và giải thuật tích phân theo thời gian Newmark kết hợp phương pháp giải Newton-Raphson để xác định giá trị vận tốc tới hạn. Liên quan tới luận án [2], tác giả Long và Van Tung đã sử dụng FSDT để nghiên cứu ổn định phi tuyến của các kết cấu sandwich dạng tấm chữ nhật, panel trụ và panel hai độ cong làm từ các lớp vật liệu FG-CNTRC [62-65]. Phương pháp Galerkin được áp dụng để giải quyết cho bài toán kết cấu có điều kiện biên tựa bản lề. Van Thanh và cộng sự

[71] dựa trên FSDT của Reddy và phương pháp Galerkin đã khảo sát đáp ứng động lực học phi tuyến và dao động của vỏ trụ FG-CNTRC với các cạnh biên bản lề trên nền đàn hồi. Nguyen và cộng sự [100] đã sử dụng FSDT và hàm B-Spline hợp lý không đồng nhất (non-uniform rational B-Spline - NURBS) để phân tích tĩnh và dao động tự do cho vỏ FG-CNTRC. Truong-Thi và cộng sự [101] thực hiện phân tích tĩnh và dao động tự do của tấm FG-CNTRC sử dụng phương pháp CS-DSG3 (The cell-based smoothed discrete shear gap method) dùng phần tử tam giác 3 nút. Hệ phương trình cân bằng của tấm được thiết lập dựa trên FSDT của Reddy. Liên quan đến nội dung luận án [4], khi thực hiện phân tích đáp ứng mất ổn định và sau mất ổn định của vỏ trụ và vỏ trống dày có biên tựa bản lề, Hieu và Van Tung đã sử dụng FDST để thiết lập hệ phương trình tổng quát của vỏ [78, 79]. Phương pháp Galerkin đã được áp dụng để giải quyết cho bài toán vỏ có các cạnh biên tựa bản lề.

Để khắc phục việc phải sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt của FSDT cũng như nâng cao độ chính xác khi khảo sát đáp ứng cơ học của kết cấu tấm vỏ dày, các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (The higher-order shear deformation theories-HSDTs) đã được nghiên cứu phát triển như một dạng nâng cấp của FSDT [88, 102]. Dựa trên HSDT, Phung-Van và cộng sự [103, 104] đã trình bày phân tích đẳng hình học (iso-geometrical analysis) của tấm FG-CNTRCs. Soni và cộng sự [105] tiến hành phân tích uốn của tấm CNTRC. Trong nghiên cứu này, các tác giả đã sử dụng lý thuyết chuyển vị cắt là dạng nghịch đảo của hàm hyperbolic. Janghorban và Nami [106] đề xuất lời giải giải tích cho ứng xử cơ học của tấm FG-CNTRC chữ nhật sử dụng lý thuyết tám bậc hai. Các tác giả đã tập trung vào khảo sát ảnh hưởng của quy luật phân bố và tỷ lệ thể tích CNT đến tần số và pha của vận tốc chuyển vị. Karami và cộng sự [107] đã trình bày kết quả phân tích uốn, ổn định và dao động tự do của tấm FG-CNTRCs trên nền đàn hồi sử dụng lý thuyết tám bậc hai và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của

Eringen. Natarajan và cộng sự [108] đã nghiên cứu uốn và dao động uốn tự do của tấm sandwich với lớp bề mặt được gia cường bằng CNT. Các tác giả đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử 8 nút QUAD-8 chịu uốn và chịu cắt (a QUAD-8 shear flexible element) được phát triển dựa trên HSDT. Shen [7] đã sử dụng HSDT của Reddy và phi tuyến von Karman để nghiên cứu uốn phi tuyến của tấm FG-CNTRC liên kết biên tựa chịu tải trọng ngang không đổi hoặc biến đổi theo hàm sin trong môi trường nhiệt. Các hệ số hiệu dụng của vật liệu FG-CNTRC được xác định dựa trên quy luật hỗn hợp. Shen [49] đã thực hiện khảo sát hiện tượng mất ổn định và đáp ứng sau mất ổn định của vỏ trụ FG-CNTRC sử dụng HSDT. Trong luận án [3], Nguyễn Văn Thành và cộng sự đã sử dụng HSDT bậc ba của Reddy để nghiên cứu đáp ứng động lực học và dao động của tấm FG-CNTRC [69]; tấm FG-CNTRC sandwich [70]; panel trụ FG-CNTRC sandwich [73] tựa trên nền đàn hồi. Phương pháp Galerkin và phương pháp Runge–Kutta bậc 4 để giải hệ phương trình tổng quát cho tấm có bốn cạnh biên bản lề. Trong luận án [5], Vũ Văn Thắm đã sử dụng lý thuyết tấm bốn ẩn cải tiến (The four-variable shear deformation refined plate theory-HSDT4) để phân tích tĩnh và động tấm, vỏ thoải hai độ cong FG-CNTRC có lớp áp điện. Tác giả đã sử dụng phương pháp giải tích với nghiệm Navier cho bài toán tấm, vỏ có biên tựa bản lề và phương pháp FEM cho kết cấu có các điều kiện biên khác. Lý thuyết cải tiến này đã được Van Tham, Huu Quoc, Minh Tu áp dụng để phân tích tĩnh các tấm FG-CNT có lớp composite áp điện (PFRC) chịu tải trọng cơ-điện [109]; sau đó được sử dụng để khảo sát dao động tự do của: vỏ thoải hai độ cong bằng vật liệu FG-CNTRC có lớp áp điện [110], tấm FG-CNTRC có lớp áp điện [111], tấm FG-CNTRC trong môi trường chất lỏng [112]; điều khiển dao động của panel vỏ cầu FG-CNTRC có gắn lớp áp điện [113]. Tác giả Chung và cộng sự [114] đã sử dụng một dạng cải tiến của lý thuyết tấm bốn ẩn để phân tích động lực học của tấm có gân bằng vật liệu

composite gia cường bằng ống nanocarbon (SFG-CNTRC) chịu tải trọng nổ. FEM và giải thuật Newmark đã được sử dụng để giải hệ phương trình động lực học của tấm. Dat và cộng sự [68] đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 của Reddy và phương pháp Galerkin để nghiên cứu dao động của tấm sandwich có lớp giữa là CNTRC hai mặt trên dưới là nam châm đàn hồi với các cạnh biên bản lề.

Lý thuyết đàn hồi 3 chiều cũng đã được một số tác giả sử dụng để khảo sát đối với kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC. Alibeigloo và Liew [18] trình bày phân tích của tấm FG-CNTRC chữ nhật có các cạnh biên gối tựa dưới tác dụng của tải cơ-nhiệt sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều. Các kết quả đã chỉ ra rằng ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT đến đáp ứng đàn hồi nhiệt theo chiều dọc lớn hơn các phương khác. Các tác giả đã chỉ ra rằng sự tăng lên của tỷ lệ thể tích CNT ảnh hưởng không lớn đến ứng suất dọc trên bề mặt trên của vỏ. Dựa trên lý thuyết này, Alibeigloo [115] phân tích uốn của tấm FG-CNTRC có các lớp áp điện mỏng chịu tác dụng tải trọng cơ học phân bố đều. Ngược lại với vật liệu nền, kết quả đã chứng minh rằng sự biến thiên ứng suất theo độ dày của các lớp áp điện thay đổi tuyến tính. Kết quả cũng cho thấy ảnh hưởng của lớp áp điện lên bản mỏng là lớn hơn đáng kể so với bản dày. Abdollahzadeh và Alibeigloo [116] đã sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều để nghiên cứu dao động tự do của tấm CNTRC với các điều kiện biên khác nhau. Trong nghiên cứu này, các tác giả đã sử dụng phương pháp Ritz bằng cách phát triển tập hợp các hàm số trực giao. Nghiên cứu đã chỉ ra rằng tần số dao động không thứ nguyên của tấm có điều kiện biên CFFF là nhỏ nhất, trong khi đó tấm có điều kiện biên CCCC là lớn nhất. Malekzadeh và Zarei [117] công bố nghiên cứu phân tích tĩnh và dao động tự do của tấm FG-CNTRC sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều. Yas và cộng sự [118] đã thực hiện khảo sát dao động tự do ba chiều của panel trụ FG-CNTRC. Các kết quả cho thấy đối với panel ngắn và dài, khi CNT được

bố trí với góc $\Phi = 2\pi$ và $\Phi = \pi/6$, tần số dao động tự nhiên là lớn nhất. Alibeigloo [119] đã phân tích dao động tự do của panel trụ FG-CNTRC có lớp áp điện với điều kiện biên gôi tựa dựa trên lý thuyết đàn hồi ba chiều.

Có thể thấy từ các nghiên cứu trên, việc sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều trong nghiên cứu ứng xử cơ học của kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC cho kết quả chính xác nhất. Tuy nhiên, sử dụng lý thuyết này gặp khó khăn khi tính toán bằng phương pháp giải tích cho các điều kiện biên không phải biên gôi tựa. Bên cạnh đó, ảnh hưởng của ứng suất pháp tuyến ngang được bỏ qua trong nhiều dạng HSDT khi giả thiết rằng chuyển vị pháp tuyến là hằng số. Một số lý thuyết HSDT có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang đã được đề xuất. Sử dụng HSDT kiểu quasi-3D có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang bằng cách khai triển chuyển vị pháp tuyến là đa thức bậc hai của tọa độ theo chiều dày, Doan và cộng sự đã thực hiện phân tích uốn của vỏ trụ composite lớp [22, 23] và vỏ trụ FGM [24]. Trong các công bố này, phương pháp giải tích đã được sử dụng để khảo sát với vỏ có các điều kiện biên khác nhau. Kết quả cho thấy khi sử dụng HDST kiểu quasi-3D đã chỉ ra được hiện tượng tập trung ứng suất của vỏ tại khu vực cạnh biên.

1.3. Kết quả nghiên cứu đạt được từ các công trình đã công bố và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu

Dựa trên nội dung tổng hợp, phân tích, đánh giá các kết quả của các nghiên cứu về vỏ FG-CNTRC đã được công bố có thể rút ra các nhận xét sau:

- FG-CNTRC là vật liệu thế hệ mới có nhiều ứng dụng, do đó tính toán kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC là vấn đề được tiếp tục quan tâm nghiên cứu.
- Nội dung các nghiên cứu về tấm vỏ FG-CNTRC đã được thực hiện rất đa dạng. Nhiều lớp bài toán về tấm vỏ FG-CNTRC khác nhau đã được thực hiện như: phân tích tĩnh, ổn định, dao động tự do, dao động cưỡng bức, điều

khí dao động với các mức độ từ tuyến tính đến phi tuyến. Đối tượng nghiên cứu bao gồm nhiều loại kết cấu khác nhau: tấm chữ nhật, tấm hình bình hành, vỏ trụ, vỏ nón, vỏ nón cụt, vỏ cầu, vỏ hyperbol, tấm vỏ có lỗ giảm yếu, tấm vỏ có gân gia cường, tấm vỏ trên nền đàn hồi...

- Các nghiên cứu về kết cấu tấm vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC hầu hết đều sử dụng các mô hình vật liệu do Shen đề xuất với năm loại phân bố CNT.

- Lý thuyết sử dụng trong các tính toán có thể là CST, FSDT, HSDT hoặc lý thuyết đàn hồi 3 chiều. Có thể thấy rằng việc sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều trong nghiên cứu ứng xử cơ học của kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC cho kết quả chính xác nhất. Tuy nhiên, sử dụng lý thuyết này gặp khó khăn khi tính toán bằng phương pháp giải tích cho các điều kiện biên không phải biên gối tựa. Ảnh hưởng của ứng suất pháp ngang được bỏ qua trong nhiều dạng HSDT khi giả thiết chuyển vị theo chiều dày là hằng số. Giả thiết này không phù hợp trong tính toán đối với tấm vỏ có độ dày lớn.

- Các nghiên cứu về vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC theo hướng tiếp cận giải tích thường tập trung khảo sát đối với điều kiện biên gối tựa đơn giản. Các điều kiện biên khác như biên ngàm, biên tự do chưa được thực hiện nhiều, do việc giải bài toán đối với các điều kiện biên khác bằng phương pháp giải tích có những khó khăn nhất định.

- Bài toán tấm vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC chịu tải trọng nhiệt cần tiếp tục nghiên cứu. Các mô hình tải trọng nhiệt, ứng xử đối với tải trọng nhiệt của vật liệu FG-CNTRC vẫn đang được các nhà khoa học xây dựng hoàn thiện. Đa số các nghiên cứu đều sử dụng giả thiết trường nhiệt độ là đồng nhất trong toàn bộ kết cấu. Mô hình đàn hồi-nhiệt có xét đến gradient nhiệt độ và ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu có rất ít các nghiên cứu được công bố.

Chưa có nghiên cứu đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên đến đàn hồi nhiệt của kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC.

- Chưa có các nghiên cứu phân tích một cách chi tiết trạng thái ứng suất biến dạng tại vùng biên đối với kết cấu FG-CNTRC trong cả hai trường hợp chịu tải trọng cơ và tải trọng nhiệt độ. Thực tế cho thấy, các kết cấu thường chịu ứng suất tập trung tại vùng gần biên. Các trường hợp kết cấu bị phá hủy được ghi nhận xảy ra ở vùng biên. Do đó, việc khảo sát cả về mặt định tính và mặt định lượng sự phân bố của ứng suất tại khu vực biên có ý nghĩa quan trọng phục vụ cho bài toán thiết kế, khai thác kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC.

Từ các nhận xét nêu trên tác giả đề xuất một số vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu sau đây:

- Nghiên cứu tấm vỏ FG-CNTRC bằng phương pháp giải tích với các điều kiện biên khác nhau sử dụng HSDT có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang.
- Nghiên cứu tấm vỏ FG-CNTRC có điều kiện biên khác nhau chịu tải trọng nhiệt có xét đến gradient nhiệt độ và ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu.
- Nghiên cứu ổn định, dao động của kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang.
- Nghiên cứu về tối ưu hóa kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC có tính đến các vấn đề về điều khiển dao động kết cấu, kết cấu thông minh, đáp ứng ổn định,...
- Nghiên cứu thực nghiệm kết cấu FG-CNTRC.

1.4. Những nội dung nghiên cứu trong luận án

Qua quá trình tìm hiểu, nghiên cứu, tác giả thấy rằng việc sử dụng HSDT có tính đến ứng suất pháp tuyến ngang, phương pháp giải tích trong nghiên cứu đánh giá ứng xử vỏ FG-CNTRC dưới tác dụng tải trọng cơ-nhiệt, với các điều

kiện biên khác nhau có tính đến gradient nhiệt và ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu là vấn đề có ý nghĩa khoa học và thực tiễn. Các công bố theo hướng này chưa nhiều và vẫn đang được các nhà khoa học nghiên cứu, phát triển. Do đó trong luận án này, tác giả lựa chọn các nội dung nghiên cứu sau:

- Xây dựng mô hình toán học phân tích tĩnh vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ - nhiệt dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D, đồng thời xét đến ảnh hưởng của gradient nhiệt và ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu. Ngoài ra, để chính xác hóa các thành phần ứng suất cắt, luận án sử dụng các phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi 3D trong tính toán; giải pháp này đảm bảo điều kiện cân bằng nội tại của phần tử kết cấu vỏ và điều kiện biên ở mặt trong và mặt ngoài của vỏ.

- Sử dụng phương pháp giải tích để giải quyết cho vỏ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau. Trong đó sử dụng chuỗi lượng giác đơn để chuyển hệ phương trình đạo hàm riêng về hệ phương trình vi phân thường, còn phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình vi phân thường. Thực hiện xây dựng chương trình tính toán số phục vụ phân tích tĩnh kết cấu vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ và nhiệt độ.

- Phân tích ảnh hưởng của điều kiện biên đến chuyển vị, ứng suất của vỏ từ đó đi sâu khảo sát hiện tượng tập trung ứng suất ở khu vực biên. Thực hiện khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố: thông số hình học (độ dài, độ dày vỏ), thông số vật liệu (kiểu phân bố CNT, tỷ lệ thể tích CNT), ảnh hưởng của tải trọng đến chuyển vị, ứng suất của vỏ. Trên cơ sở các kết quả thu được, đề xuất các khuyến cáo khoa học cho quá trình thiết kế, chế tạo kết cấu tấm vỏ bằng vật liệu FG-CNTRC.

Kết luận chương 1

FG-CNTRC là vật liệu mới, có nhiều tiềm năng ứng dụng do đó tiếp tục được quan tâm nghiên cứu. Dựa trên kết quả của các nghiên cứu về tấm vỏ FG-CNTRC đã công bố có thể rút ra một số nhận xét sau:

- Lý thuyết sử dụng để nghiên cứu về tấm vỏ FG-CNTRC là đa dạng bao gồm CPT, FSDT, HSDT, lý thuyết đàn hồi ba chiều. Lý thuyết đàn hồi ba chiều cho kết quả chính xác nhất, tuy nhiên sử dụng lý thuyết này gặp khó khăn khi tính toán bằng phương pháp giải tích cho các điều kiện biên không phải biên tựa. Ảnh hưởng của ứng suất pháp ngang được bỏ qua trong nhiều dạng HSDT.

- Các nghiên cứu về vỏ trụ bằng vật liệu FG-CNTRC thường tập trung khảo sát đối với điều kiện biên gối tựa đơn giản. Các điều kiện biên khác như biên ngàm, biên tự do chưa được thực hiện nhiều.

- Đa số các nghiên cứu về tấm vỏ FG-CNTRC đều sử dụng giả thiết trường nhiệt độ đồng nhất trong toàn bộ kết cấu. Các nghiên cứu có xét đến tải gradient nhiệt và ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu chưa nhiều. Chưa có nghiên cứu đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên trong nghiên cứu kết cấu tấm vỏ FG-CNTRC chịu tải trọng nhiệt.

- Vùng liên kết biên là vùng nguy hiểm của kết cấu tuy nhiên chưa có các nghiên cứu phân tích trạng thái ứng suất biến dạng tại vùng biên đối với kết cấu FG-CNTRC trong cả hai trường hợp chịu tải trọng cơ và tải trọng nhiệt độ.

- Nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC có điều kiện biên khác nhau chịu tải trọng cơ nhiệt theo HSDT có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang, có xét đến gradient nhiệt độ và ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu là vấn đề mới, có tính thực tiễn cao. Trên cơ sở đó trong luận án này tác giả thực hiện phân tích ảnh hưởng của điều kiện biên, vật liệu, hình học, tải trọng đến ứng suất của vỏ và đi sâu phân tích trạng thái ứng suất của vỏ trụ FG-CNTRC tại khu vực biên.

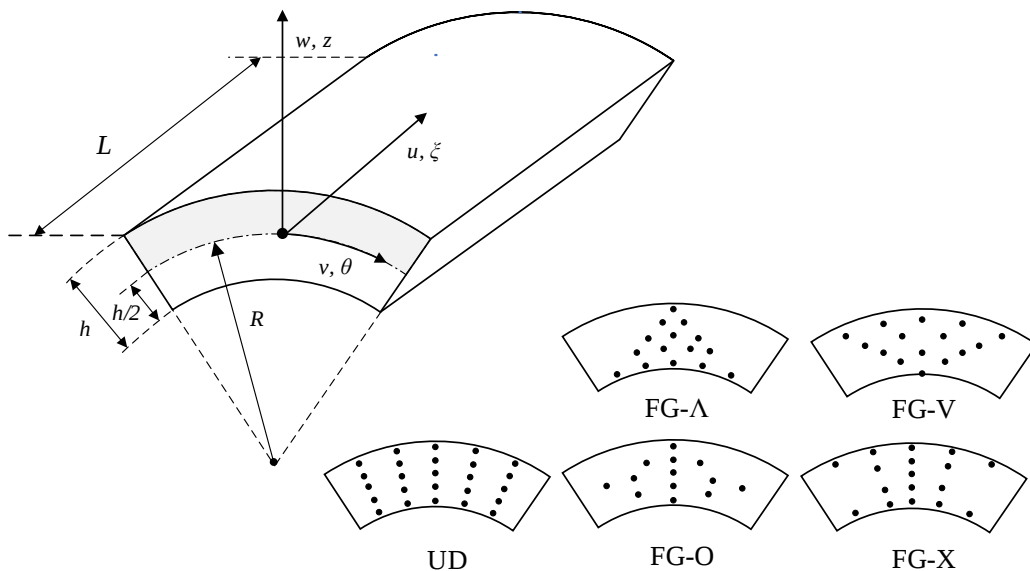
Chương 2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH TÍNH TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong chương này luận án thực hiện các nội dung sau:

- Xây dựng mô hình tính toán cho bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt với tính chất vật liệu FG-CNTRC phụ thuộc vào nhiệt độ và các mối quan hệ cơ bản của chuyển vị - biến dạng - ứng suất theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D.
- Thiết lập hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ nhiệt dựa trên nguyên lý công ảo.
- Thiết lập phương pháp giải tích và chương trình tính toán cho bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cục bộ hướng kính tuần hoàn trong môi trường nhiệt với các điều kiện biên khác nhau.

2.1. Bài toán tổng quát

Xét vỏ trụ FG-CNTRC có chiều dài L , bán kính trung bình R , độ dày h như ở Hình 2.1.



Hình 2.1 Thông số hình học của vỏ trụ và năm trường hợp phân bố CNT

Sử dụng hệ tọa độ cong trục giao $O\xi\theta z$, với gốc tọa độ đặt ở mặt trung bình của vỏ, giả thiết mặt trung hòa trùng với mặt trung bình. Ở đây, $\xi = x / R$

là tọa độ tương đối theo đường sinh vỏ trụ, θ là tọa độ theo hướng vòng và z là tọa độ theo phương pháp tuyến với vỏ trụ, tương ứng với các chuyển vị u , v và w . Tải trọng hướng kính $q^+(\xi, \theta)$ trên bề mặt ngoài, $q^-(\xi, \theta)$ - trên bề mặt trong. Phân bố nhiệt độ trong vỏ $T(\xi, \theta, z)$.

Vỏ được làm từ vật liệu nền và vật liệu gia cường CNT. Giả định các CNT thẳng, đồng phương theo trục dọc vỏ trụ và được phân bố theo chiều dày vỏ theo năm trường hợp bao gồm: phân bố đều (UD) và bốn trường hợp phân bố biến thiên tuyến tính FG- Λ , FG-V, FG-X và FG-O.

2.2. Thông số vật liệu FG-CNTRC khi xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ

Để thực hiện tính toán cho các kết cấu làm bằng vật liệu FG-CNTRC, hai phương pháp chủ yếu được sử dụng để đồng nhất hoá vật liệu FG-CNTRC bao gồm: phương pháp Eshelbly – Mori – Tanaka và Quy luật hỗn hợp (The rule of mixture). Trong đó phương pháp Quy luật hỗn hợp được sử dụng phổ biến do sự thuận tiện mà vẫn đảm bảo độ chính xác [7, 120]. Để tăng mức độ chính xác, Quy luật hỗn hợp đã được phát triển thành Quy luật hỗn hợp mở rộng (Extend rule of mixture) bằng cách đưa thêm các hệ số hiệu dụng (Efficiency parameter) để hiệu chỉnh kết quả đồng nhất hoá [7, 20, 41, 43, 120, 121]. Các hệ số hiệu dụng η_i ($i = 1, 2, 3$) được xác định bằng cách đối chiếu mô-đun của vật liệu CNTRC xác định từ mô phỏng động lực học phân tử (The molecular dynamic simulation - MD) [122, 123] với kết quả xác định được bằng Quy luật hỗn hợp.

Theo Quy luật hỗn hợp mở rộng, các thông số hiệu dụng vật liệu FG-CNTRC khi xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ được xác định như sau [16, 18, 19, 65, 68]:

$$E_{11}(T, z) = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT}(T) + V_m E_m(T), \quad (2.1.a)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}(T, z)} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}(T)} + \frac{V_m}{E_m(T)}, \quad (2.1.b)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}(T, z)} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}(T)} + \frac{V_m}{G_m(T)}, \quad (2.1.c)$$

$$\nu_{12}(z) = V_{CNT}^* \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu_m, \quad (2.1.d)$$

$$\rho(z) = V_{CNT}^* \rho_{CNT} + V_m \rho_m, \quad (2.1.e)$$

$$\alpha_{11}(T, z) = \frac{V_{CNT} E_{11}^{CNT}(T) \alpha_{11}^{CNT}(T) + V_m E_m(T) \alpha_m(T)}{V_{CNT} E_{11}^{CNT}(T) + V_m E_m(T)}, \quad (2.1.f)$$

$$\alpha_{22}(T, z) = (1 + \nu_{12}^{CNT}) V_{CNT} \alpha_{22}^{CNT}(T) + (1 + \nu_m) V_m \alpha_m(T) - \nu_{12} \alpha_{11}(T), \quad (2.1.g)$$

$$k_{11}(z) = V_{CNT} k_{11}^{CNT} + V_m k_m, \quad (2.1.h)$$

$$\frac{1}{k_{22}(z)} = \frac{V_{CNT}}{k_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{k_m}, \quad (2.1.i)$$

trong đó:

$\eta_i (i=1, 2, 3)$ là các hệ số hiệu dụng của CNT;

E_{ii}^{CNT} , G_{12}^{CNT} , ν_{12}^{CNT} , ρ_{CNT} , α_{ii}^{CNT} và k_{ii}^{CNT} lần lượt là mô-đun đàn hồi, mô-đun cắt, hệ số Poisson, khối lượng riêng, hệ số giãn nở nhiệt và hệ số truyền nhiệt theo phương dọc trục ($i=1$) và phương pháp tuyến ($i=2$) của CNT;

E_m , G_m , ν_m , ρ_m , α_m và k_m lần lượt là mô-đun đàn hồi Young, mô-đun cắt, hệ số Poisson, khối lượng riêng, hệ số giãn nở nhiệt và hệ số truyền nhiệt của vật liệu nền.

V_{CNT} và V_m là tỷ lệ thể tích của vật liệu cốt CNT và vật liệu nền, có quan hệ như sau:

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (2.2)$$

Tỷ lệ thể tích CNT trong hệ tọa độ $O\xi\theta z$ được tính như sau:

$$\text{Trường hợp UD:} \quad V_{CNT} = V_{CNT}^* \quad (2.3.a)$$

$$\text{Trường hợp FG-}\Lambda: \quad V_{CNT} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)V_{CNT}^* \quad (2.3.b)$$

$$\text{Trường hợp FG-V:} \quad V_{CNT} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)V_{CNT}^* \quad (2.3.c)$$

$$\text{Trường hợp FG-O:} \quad V_{CNT} = 2\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right)V_{CNT}^* \quad (2.3.d)$$

$$\text{Trường hợp FG-X:} \quad V_{CNT} = 4\frac{|z|}{h}V_{CNT}^* \quad (2.3.e)$$

trong đó:

$$V_{CNT}^* = \frac{W_{CNT}}{W_{CNT} + \frac{\rho_{CNT}}{\rho_m} - \frac{\rho_{CNT}}{\rho_m} W_{CNT}} \quad (2.4)$$

với W_{CNT} là tỷ lệ khối lượng của CNT.

Các thông số đàn hồi khác của vật liệu được xác định như sau:

$$\begin{aligned} E_{22} = E_{33}, G_{12} = G_{13} = G_{23}, \nu_{12} = \nu_{13}, \nu_{31} = \nu_{21} = \nu_{32} = \nu_{23}, \\ \nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}}\nu_{12}, \alpha_{33} = \alpha_{22}, k_{33} = k_{22} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3. Các phương trình cơ bản

Trong mục này, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D và thông số vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ, dựa trên các mối quan hệ cơ bản của chuyển vị - biến dạng - ứng suất để thiết lập hệ phương trình cân bằng của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt.

2.3.1. Trường chuyển vị

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D [124], trường chuyển vị của vỏ trụ được phân tích dưới dạng đa thức theo chiều dày như sau:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{6} \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{6} \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} \end{aligned} \quad (2.6.a)$$

trong đó, u - chuyển vị theo phương dọc trục ξ ($\xi = x / R$), v - chuyển vị theo phương vòng θ , w - chuyển vị theo chiều dày (phương z). Cụ thể, u_0, v_0, w_0 tương ứng là chuyển vị thẳng tại một điểm trong mặt tham chiếu; u_1, v_1, w_1 - các góc xoay của pháp tuyến mặt tham chiếu; u_2, v_2, w_2 - các chuyển vị thẳng bậc cao; còn u_3, v_3 - thành phần chuyển vị góc bậc cao. Theo lý thuyết này, chuyển vị pháp tuyến w không phải là hằng số mà là hàm bậc hai của toạ độ z , do đó thành phần ứng suất pháp tuyến ngang không đồng nhất bằng 0. Đây là mô hình lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ảnh hưởng của ứng suất pháp tuyến ngang (ký hiệu là K3-2).

Trong trường hợp bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất pháp tuyến ngang theo chiều dày vỏ, trường chuyển vị có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{6}, \\
v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{6}, \\
w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta).
\end{aligned} \tag{2.6.b}$$

Ký hiệu mô hình này là *K3-0*. Đây là dạng thông dụng của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khi bỏ qua ứng suất pháp tuyến ngang theo chiều dày vỏ.

2.3.2. Quan hệ biến dạng và chuyển vị

Quan hệ biến dạng-chuyển vị tuyến tính trong hệ tọa độ cong trực giao $O\xi\theta z$ được xác định như sau [125]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\
\gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Thế các thành phần chuyển vị từ (2.6) vào các phương trình (2.7), ta nhận được biểu thức của các thành phần biến dạng đối với mô hình *K3-2* như sau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \left(\varepsilon_\xi^0 + \chi_\xi z + \varepsilon_\xi^* \frac{z^2}{2} + \chi_\xi^* \frac{z^3}{3!} \right), \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{R+z} \left(\varepsilon_\theta^0 + \chi_\theta z + \varepsilon_\theta^* \frac{z^2}{2} + \chi_\theta^* \frac{z^3}{3!} \right), \quad \varepsilon_z = \left(\varepsilon_z^0 + \chi_z z \right), \\
\gamma_{\xi\theta} &= \frac{1}{R} \left(\gamma_{\xi\theta}^0 + \chi_{\xi\theta} z + \gamma_{\xi\theta}^* \frac{z^2}{2} + \chi_{\xi\theta}^* \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{1}{R+z} \left(\lambda_{\theta\xi}^0 + \kappa_{\theta\xi} z + \lambda_{\theta\xi}^* \frac{z^2}{2} + \kappa_{\theta\xi}^* \frac{z^3}{3!} \right), \\
\gamma_{\xi z} &= \frac{1}{R} \left(\gamma_{\xi z}^0 + \chi_{\xi z} z + \gamma_{\xi z}^* \frac{z^2}{2} + \chi_{\xi z}^* \frac{z^3}{3!} \right), \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \left(\gamma_{\theta z}^0 + \chi_{\theta z} z + \gamma_{\theta z}^* \frac{z^2}{2} + \chi_{\theta z}^* \frac{z^3}{3!} \right)
\end{aligned} \tag{2.8.a}$$

trong đó:

$$\varepsilon_\xi^0 = \frac{\partial u_0}{\partial \xi}, \quad \chi_\xi = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\xi^* = \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \quad \chi_\xi^* = \frac{\partial u_3}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_z^0 = w_1, \quad \chi_z = w_2,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\theta^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0, \lambda_{\theta\xi}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial \theta}, \gamma_{\theta z}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + Rv_1 - v_0, \\
\chi_\theta &= \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + w_1, \varepsilon_\theta^* = \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_2, \chi_\theta^* = \frac{\partial v_3}{\partial \theta}, \gamma_{\xi\theta}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial \xi}, \chi_{\xi\theta} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\
\gamma_{\xi\theta}^* &= \frac{\partial v_2}{\partial \xi}, \chi_{\xi\theta}^* = \frac{\partial v_3}{\partial \xi}, \kappa_{\theta\xi} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \lambda_{\theta\xi}^* = \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \kappa_{\theta\xi}^* = \frac{\partial u_3}{\partial \theta}, \\
\gamma_{\xi z}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + Ru_1, \chi_{\xi z} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + Ru_2, \gamma_{\xi z}^* = \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + Ru_3, \chi_{\xi z}^* = 0, \\
\chi_{\theta z} &= \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + Rv_2, \gamma_{\theta z}^* = \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + Rv_3 + v_2, \chi_{\theta z}^* = 2v_3.
\end{aligned} \tag{2.8.b}$$

ở đây, các biến dạng $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ là các thành phần biến dạng pháp tương ứng theo các phương ξ, θ và z , $\gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\xi z}, \gamma_{\theta z}$ là các thành phần biến dạng cắt.

2.3.3. Quan hệ ứng suất và biến dạng khi tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ

Phương trình định luật Hooke [125] liên hệ giữa biến dạng và ứng suất đối với vật liệu trục hướng khi xét đến tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ (Temperature-dependent properties) có dạng như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{z\theta} \\ \tau_{\xi z} \\ \tau_{\xi\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(T, z) & C_{12}(T, z) & C_{13}(T, z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}(T, z) & C_{22}(T, z) & C_{23}(T, z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}(T, z) & C_{32}(T, z) & C_{33}(T, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}(T, z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}(T, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}(T, z) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\xi\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\theta \\ \beta_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T, \tag{2.9}$$

ở đây, $\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}$ là các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp tương ứng, $\Delta T = T - T_{ref}$ với T_{ref} là nhiệt độ tham chiếu, tại nhiệt độ này giả sử không xuất hiện biến dạng nhiệt.

Các thông số độ cứng $C_{ij} (i=1, 2, 3, j=1, 2, 3), C_{44}, C_{55}, C_{66}$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} C_{11}(T, z) &= \frac{E_{11}(T, z)}{\Delta} (1 - \nu_{23}\nu_{32}), C_{22}(T, z) = \frac{E_{22}(T, z)}{\Delta} (1 - \nu_{31}\nu_{13}), \\ C_{33}(T, z) &= \frac{E_{33}(T, z)}{\Delta} (1 - \nu_{21}\nu_{12}), C_{12}(T, z) = \frac{E_{11}(T, z)}{\Delta} (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}), \\ C_{13}(T, z) &= \frac{E_{11}(T, z)}{\Delta} (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}), C_{23}(T, z) = \frac{E_{22}(T, z)}{\Delta} (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}), \quad (2.10) \\ C_{44}(T, z) &= G_{23}(T, z), C_{55}(T, z) = G_{13}(T, z), C_{66}(T, z) = G_{12}(T, z), \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{32} \end{aligned}$$

$\beta_\xi, \beta_\theta, \beta_z$ là các mô-đun ứng suất liên quan đến hệ số giãn nở nhiệt α_{ii} theo biểu thức sau:

$$\begin{Bmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\theta \\ \beta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11}(T, z)\alpha_{11} + C_{12}(T, z)\alpha_{22} + C_{13}(T, z)\alpha_{33} \\ C_{21}(T, z)\alpha_{11} + C_{22}(T, z)\alpha_{22} + C_{23}(T, z)\alpha_{33} \\ C_{31}(T, z)\alpha_{11} + C_{32}(T, z)\alpha_{22} + C_{33}(T, z)\alpha_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

ở đây ta thấy các thông số độ cứng $C_{ij} (i=1, 2, 3, j=1, 2, 3), C_{44}, C_{55}, C_{66}$ không còn là hằng số mà là một hàm số phụ thuộc vào nhiệt độ T của điểm đang xét.

2.4. Thiết lập hệ phương trình cân bằng của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt

2.4.1. Nguyên lý công ảo

Sử dụng nguyên lý công ảo để thiết lập hệ phương trình cân bằng của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt, theo đó:

$$\delta U - \delta A_s - \delta A_{e1} - \delta A_{e2} = 0 \quad (2.12)$$

trong đó, δU là biến phân năng lượng biến dạng đàn hồi của kết cấu, δA_s là biến phân công của lực mặt, δA_{e1} là biến phân công của ngoại lực trên biên $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, δA_{e2} là biến phân công của ngoại lực trên biên $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Biến phân công ngoại lực

Biến phân công của lực mặt tác dụng lên vỏ xác định bởi biểu thức sau:

$$\delta A_s = \iint_{\xi, \theta} \left[q^+ \delta \left(w_0 + \frac{h}{2} w_1 + \frac{h^2}{8} w_2 \right) \left(1 + \frac{h}{2R} \right) + q^- \delta \left(w_0 - \frac{h}{2} w_1 + \frac{h^2}{8} w_2 \right) \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \right] R^2 d\xi d\theta.$$

trong đó miền lấy tích phân của δA_s là: $(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$. Từ đây biến phân công lực mặt có thể viết dưới dạng:

$$\delta A_s = \iint_{\xi, \theta} (p_0 \delta w_0 + p_1 \delta w_1 + p_2 \delta w_2) R^2 d\xi d\theta \quad (2.13)$$

trong đó, $p_i = q^+ \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \frac{(h/2)^i}{i!} + q^- \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \frac{(-h/2)^i}{i!}$, $i = 0, 1, 2$.

Biến phân công của các ngoại lực tác dụng lên biên tìm được theo công thức:

$$\begin{aligned} \delta A_{e1} &= \iint_{\theta, z} (\bar{\sigma}_\xi \delta u + \bar{\tau}_{\xi\theta} \delta v + \bar{\tau}_{\xi z} \delta w) R \left(1 + \frac{z}{R} \right) d\theta dz \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2}, \\ \delta A_{e2} &= \iint_{\xi, z} (\bar{\tau}_{\theta\xi} \delta u + \bar{\sigma}_\theta \delta v + \bar{\tau}_{\theta z} \delta w) R d\xi dz \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

trong đó miền lấy tích phân của δA_{e1} là $(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; -h/2 \leq z \leq h/2)$, của δA_{e2} là $(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; -h/2 \leq z \leq h/2)$.

Ta đặt các ký hiệu sau:

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_\xi \\ \bar{N}_{\xi\theta} \\ \bar{Q}_\xi \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \\ \bar{\tau}_{\xi z} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad \begin{bmatrix} \bar{N}_\theta \\ \bar{N}_{\theta\xi} \\ \bar{Q}_\theta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{M}_\xi \\ \bar{M}_{\xi\theta} \\ \bar{S}_\xi \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \\ \bar{\tau}_{\xi z} \end{bmatrix} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & \begin{bmatrix} \bar{M}_\theta \\ \bar{M}_{\theta\xi} \\ \bar{S}_\theta \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{bmatrix} z dz, \\
\begin{bmatrix} \bar{N}_\xi^* \\ \bar{N}_{\xi\theta}^* \\ \bar{Q}_\xi^* \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \\ \bar{\tau}_{\xi z} \end{bmatrix} \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & \begin{bmatrix} \bar{N}_\theta^* \\ \bar{N}_{\theta\xi}^* \\ \bar{Q}_\theta^* \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{bmatrix} \frac{z^2}{2} dz, \\
\begin{bmatrix} \bar{M}_\xi^* \\ \bar{M}_{\xi\theta}^* \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \end{bmatrix} \frac{z^3}{6} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & \begin{bmatrix} \bar{M}_\theta^* \\ \bar{M}_{\theta\xi}^* \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \end{bmatrix} \frac{z^3}{6} dz.
\end{aligned}$$

Biểu thức (2.14) có thể viết lại dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}
\delta A_{e1} &= \int_{\theta} \left[\bar{N}_\xi \delta u_0 + \bar{M}_\xi \delta u_1 + \bar{N}_\xi^* \delta u_2 + \bar{M}_\xi^* \delta u_3 \right] R d\theta \bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
&+ \int_{\theta} \left[\bar{N}_{\xi\theta} \delta v_0 + \bar{M}_{\xi\theta} \delta v_1 + \bar{N}_{\xi\theta}^* \delta v_2 + \bar{M}_{\xi\theta}^* \delta v_3 \right] R d\theta \bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
&+ \int_{\theta} \left[\bar{Q}_\xi \delta w_0 + \bar{S}_\xi \delta w_1 + \bar{Q}_\xi^* \delta w_2 \right] R d\theta \bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2}, \\
\delta A_{e2} &= \int_{\xi} \left[\bar{N}_{\theta\xi} \delta u_0 + \bar{M}_{\theta\xi} \delta u_1 + \bar{N}_{\theta\xi}^* \delta u_2 + \bar{M}_{\theta\xi}^* \delta u_3 \right] R d\xi \bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
&+ \int_{\xi} \left[\bar{N}_\theta \delta v_0 + \bar{M}_\theta \delta v_1 + \bar{N}_\theta^* \delta v_2 + \bar{M}_\theta^* \delta v_3 \right] R d\xi \bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
&+ \int_{\xi} \left[\bar{Q}_\theta \delta w_0 + \bar{S}_\theta \delta w_1 + \bar{Q}_\theta^* \delta w_2 \right] R d\xi \bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Biến phân năng lượng biến dạng đàn hồi của kết cấu

Ta có biến phân năng lượng biến dạng đàn hồi xác định theo công thức:

$$\begin{aligned} \delta U = \iiint_{\xi, \theta, z} & \left[\sigma_{\xi} \delta \varepsilon_{\xi} + \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta} + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\xi\theta} \delta \gamma_{\xi\theta} + \right. \\ & \left. + \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} + \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz. \end{aligned} \quad (2.16)$$

trong đó miền lấy tích phân của δU là trên toàn bộ miền thể tích vỏ $(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; -h/2 \leq z \leq h/2)$. Trong các biểu thức xác định các thành phần của biến phân năng lượng biến dạng đàn hồi tiếp sau đây, miền lấy tích phân được hiểu là toàn bộ miền thể tích vỏ. Ta phân tích từng số hạng thứ nhất trong biểu thức biến phân năng lượng biến dạng đàn hồi (2.16):

$$\delta U_1 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sigma_{\xi} \delta \varepsilon_{\xi} \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz$$

Thay ε_{ξ} từ (2.8) vào biểu thức nhận được, ta có:

$$\delta U_1 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^3 \sigma_{\xi} \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi} \frac{z^i}{i!} \left(1 + \frac{z}{R} \right) R d\xi d\theta dz.$$

Ta đặt các ký hiệu sau:

$$(N_{\xi}, M_{\xi}, N_{\xi}^*, M_{\xi}^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\xi} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6} \right) dz. \quad (2.17)$$

Khi đó δU_1 được viết lại như sau:

$$\delta U_1 = \iint_{\xi, \theta} \left(N_{\xi} \frac{\partial \delta u_0}{\partial \xi} + M_{\xi} \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi} + N_{\xi}^* \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi} + M_{\xi}^* \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi} \right) R d\xi d\theta.$$

Lấy tích phân từng phần biểu thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} \delta U_1 = & - \iint_{\xi, \theta} \left(\frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} \delta u_0 + \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \delta u_1 + \frac{\partial N_\xi^*}{\partial \xi} \delta u_2 + \frac{\partial M_\xi^*}{\partial \xi} \delta u_3 \right) R d\xi d\theta + \\ & + \int_{\theta} \left(N_\xi \delta u_0 + M_\xi \delta u_1 + N_\xi^* \delta u_2 + M_\xi^* \delta u_3 \right) R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ta phân tích số hạng thứ hai trong biểu thức biến phân năng lượng biến dạng đàn hồi (2.16):

$$\delta U_2 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz.$$

Kết hợp công thức xác định $\delta \varepsilon_\theta$ theo (2.8) vào đây ta được:

$$\delta U_2 = \iiint_{\xi, \theta, z} \left(\sum_{i=0}^3 \sigma_\theta \frac{\partial \delta v_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^2 \sigma_\theta \delta w_i \frac{z^i}{i!} \right) R d\xi d\theta dz$$

Ta đặt các ký hiệu sau:

$$(N_\theta, M_\theta, N_\theta^*, M_\theta^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6} \right) dz. \quad (2.19)$$

Khi đó δU_2 được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \delta U_2 = & \iint_{\xi, \theta} \left(N_\theta \frac{\partial \delta v_0}{\partial \theta} + M_\theta \frac{\partial \delta v_1}{\partial \theta} + N_\theta^* \frac{\partial \delta v_2}{\partial \theta} + M_\theta^* \frac{\partial \delta v_3}{\partial \theta} \right) R d\xi d\theta + \\ & + \iint_{\xi, \theta} (N_\theta \delta w_0 + M_\theta \delta w_1 + N_\theta^* \delta w_2) R d\xi d\theta. \end{aligned}$$

Lấy tích phân từng phần biểu thức trên, ta được:

$$\begin{aligned}
\delta U_2 = & - \iint_{\xi, \theta} \left(\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \delta v_0 + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \delta v_1 + \frac{\partial N_\theta^*}{\partial \theta} \delta v_2 + \frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} \delta v_3 \right) R d\xi d\theta + \\
& + \iint_{\xi, \theta} \left(N_\theta \delta w_0 + M_\theta \delta w_1 + N_\theta^* \delta w_2 \right) R d\xi d\theta + \\
& + \int_{\xi} \left(N_\theta \delta v_0 + M_\theta \delta v_1 + N_\theta^* \delta v_2 + M_\theta^* \delta v_3 \right) R d\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Đối với thành phần thứ ba $\delta U_3 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sigma_z \delta \varepsilon_z \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz$, thay ε_z từ (2.8.a) vào biểu thức nhận được, ta có:

$$\delta U_3 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^1 \sigma_z \delta w_{i+1} \frac{z^i}{i!} \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz$$

Biểu thức xác định δU_3 viết lại dưới dạng:

$$\delta U_3 = \iint_{\xi, \theta} (Q_z \delta w_1 + S_z \delta w_2) R^2 d\xi d\theta. \tag{2.21}$$

trong đó:

$$Q_z = \int_{-h}^{+h} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad S_z = \int_{-h}^{+h} \sigma_z z \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz. \tag{2.22}$$

Tiếp tục phân tích thành phần thứ tư trong biểu thức xác định năng lượng biến dạng đàn hồi (2.16): $\delta U_4 = \iiint_{\xi, \theta, z} \tau_{\xi\theta} \delta \gamma_{\xi\theta} \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz$

Kết hợp biểu thức của δU_4 với (2.8) ta được:

$$\delta U_4 = \iiint_{\xi, \theta, z} \left[\sum_{i=0}^3 \tau_{\xi\theta} \frac{\partial \delta u_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^3 \tau_{\xi\theta} \frac{\partial \delta v_i}{\partial \xi} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^i}{i!} \right] R d\xi d\theta dz$$

Ta đặt các ký hiệu sau:

$$\begin{aligned}
(N_{\theta\xi}, M_{\theta\xi}, N_{\theta\xi}^*, M_{\theta\xi}^*) &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\xi\theta} \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6} \right) dz, \\
(N_{\xi\theta}, M_{\xi\theta}, N_{\xi\theta}^*, M_{\xi\theta}^*) &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\xi\theta} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6} \right) dz.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Khi đó δU_4 được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
\delta U_4 = \iint_{\xi, \theta} & \left(N_{\theta\xi} \frac{\partial \delta u_0}{\partial \theta} + M_{\theta\xi} \frac{\partial \delta u_1}{\partial \theta} + N_{\theta\xi}^* \frac{\partial \delta u_2}{\partial \theta} + M_{\theta\xi}^* \frac{\partial \delta u_3}{\partial \theta} + \right. \\
& \left. + N_{\xi\theta} \frac{\partial \delta v_0}{\partial \xi} + M_{\xi\theta} \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} + N_{\xi\theta}^* \frac{\partial \delta v_2}{\partial \xi} + M_{\xi\theta}^* \frac{\partial \delta v_3}{\partial \xi} \right) R d\xi d\theta.
\end{aligned}$$

Lấy tích phân từng phần biểu thức trên, nhận được:

$$\begin{aligned}
\delta U_4 = - \iint_{\xi, \theta} & \left(\frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} \delta u_0 + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} \delta u_1 + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} \delta u_2 + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} \delta u_3 + \right. \\
& \left. + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} \delta v_0 + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} \delta v_1 + \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} \delta v_2 + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} \delta v_3 \right) R d\xi d\theta + \\
& + \int_{\theta} \left(N_{\xi\theta} \delta v_0 + M_{\xi\theta} \delta v_1 + N_{\xi\theta}^* \delta v_2 + M_{\xi\theta}^* \delta v_3 \right) R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\xi} \left(N_{\theta\xi} \delta u_0 + M_{\theta\xi} \delta u_1 + N_{\theta\xi}^* \delta u_2 + M_{\theta\xi}^* \delta u_3 \right) R d\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Đối với thành phần $\delta U_5 = \iiint_{\xi, \theta, z} \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz$, thay $\gamma_{\xi z}$ từ

(2.8) vào biểu thức của δU_5 , ta có:

$$\delta U_5 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^2 \tau_{\xi z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^i}{i!} \frac{\partial \delta w_i}{\partial \xi} R d\xi d\theta dz + \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^2 \tau_{\xi z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^i}{i!} \delta u_{i+1} R^2 d\xi d\theta dz$$

Ta đặt các ký hiệu sau:

$$(Q_\xi, S_\xi, Q_\xi^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\xi z} \left(1, z, \frac{z^2}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz. \quad (2.25)$$

Thực hiện lấy tích phân từng phần biểu thức xác định δU_5 , sau một số phép biến đổi toán học ta có:

$$\begin{aligned} \delta U_5 = & - \iint_{\xi, \theta} \left(\frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} \delta w_0 + \frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} \delta w_1 + \frac{\partial Q_\xi^*}{\partial \xi} \delta w_2 \right) R d\xi d\theta + \iint_{\xi, \theta} (Q_\xi \delta u_1 + \\ & + S_\xi \delta u_2 + Q_\xi^* \delta u_3) R^2 d\xi d\theta + \int_{\theta} \left(Q_\xi \delta w_0 + S_\xi \delta w_1 + Q_\xi^* \delta w_2 \right) R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ta xét thành phần còn lại trong (2.16)

$$\delta U_6 = \iiint_{\xi, \theta, z} \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz.$$

Kết hợp biểu thức trên với (2.8), sau một số phép biến đổi toán học đơn giản ta được:

$$\delta U_6 = \iiint_{\xi, \theta, z} \left(\sum_{i=0}^2 \frac{\partial \delta w_i}{\partial \theta} \tau_{\theta z} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^2 R \delta v_{i+1} \tau_{\theta z} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^3 (i-1) \delta v_i \tau_{\theta z} \frac{z^i}{i!} \right) R d\xi d\theta dz$$

Ta đặt các ký hiệu sau:

$$(Q_\theta, S_\theta, Q_\theta^*, S_\theta^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta z} \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6} \right) dz. \quad (2.27)$$

Thực hiện lấy tích phân từng phần biểu thức xác định δU_6 , sau một số phép biến đổi toán học đơn giản ta có:

$$\begin{aligned}
\delta U_6 = & - \iint_{\xi, \theta} \left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \delta w_0 + \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \delta w_1 + \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} \delta w_2 \right) R d\xi d\theta + \\
& R \iint_{\xi, \theta} (Q_\theta \delta v_1 + S_\theta \delta v_2 + Q_\theta^* \delta v_3) R d\xi d\theta + \iint_{\xi, \theta} (-Q_\theta \delta v_0 + Q_\theta^* \delta v_2 + \\
& 2S_\theta^* \delta v_3) R d\xi d\theta + \int_{\xi} (Q_\theta \delta w_0 + S_\theta \delta w_1 + Q_\theta^* \delta w_2) R d\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Thay các biểu thức (2.18) ÷ (2.28) vào (2.16), ta nhận được biểu thức xác định biến phân năng lượng biến dạng đàn hồi δU thông qua các thành phần nội lực suy rộng:

$$\begin{aligned}
\delta U = & - \iint_{\xi, \theta} \left[\left(\frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right) \delta u_0 + \left(\frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - R Q_\xi \right) \delta u_1 + \right. \\
& + \left(\frac{\partial N_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - R S_\xi \right) \delta u_2 + \left. \left(\frac{\partial M_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - R Q_\xi^* \right) \delta u_3 \right] R d\xi d\theta \\
& - \iint_{\xi, \theta} \left[\left(\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_\theta \right) \delta v_0 + \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} - R Q_\theta \right) \delta v_1 + \right. \\
& + \left(\frac{\partial N_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - R S_\theta - Q_\theta^* \right) \delta v_2 + \\
& + \left. \left(\frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - R Q_\theta^* - 2S_\theta^* \right) \delta v_3 \right] R d\xi d\theta - \\
& - \iint_{\xi, \theta} \left[\left(\frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta \right) \delta w_0 + \left(\frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} - M_\theta - R Q_z \right) \delta w_1 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial Q_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - N_\theta^* - R S_z \right) \delta w_2 \right] R d\xi d\theta + \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\theta} \left(N_{\xi} \delta u_0 + M_{\xi} \delta u_1 + N_{\xi}^* \delta u_2 + M_{\xi}^* \delta u_3 \right) Rd\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\theta} \left(N_{\xi\theta} \delta v_0 + M_{\xi\theta} \delta v_1 + N_{\xi\theta}^* \delta v_2 + M_{\xi\theta}^* \delta v_3 \right) Rd\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\xi} \left(N_{\theta\xi} \delta u_0 + M_{\theta\xi} \delta u_1 + N_{\theta\xi}^* \delta u_2 + M_{\theta\xi}^* \delta u_3 \right) Rd\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
& + \int_{\xi} \left(N_{\theta} \delta v_0 + M_{\theta} \delta v_1 + N_{\theta}^* \delta v_2 + M_{\theta}^* \delta v_3 \right) Rd\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
& + \int_{\theta} \left(Q_{\xi} \delta w_0 + S_{\xi} \delta w_1 + Q_{\xi}^* \delta w_2 \right) Rd\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\xi} \left(Q_{\theta} \delta w_0 + S_{\theta} \delta w_1 + Q_{\theta}^* \delta w_2 \right) Rd\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}.
\end{aligned}$$

Thay các biểu thức (2.13), (2.15), (2.29) vào nguyên lý công ảo (2.12), ta được:

$$\begin{aligned}
0 = & - \iint_{\xi, \theta} \left[\left(\frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right) \delta u_0 + \left(\frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - RQ_{\xi} \right) \delta u_1 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial N_{\xi}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RS_{\xi} \right) \delta u_2 + \left(\frac{\partial M_{\xi}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RQ_{\xi}^* \right) \delta u_3 \right] Rd\xi d\theta + \\
& - \iint_{\xi, \theta} \left[\left(\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_{\theta} \right) \delta v_0 + \left(\frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} - RQ_{\theta} \right) \delta v_1 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial N_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - RS_{\theta} - Q_{\theta}^* \right) \delta v_2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - RQ_\theta^* - 2S_\theta^* \right) \delta v_3 \Big] Rd\xi d\theta + \\
& - \iint_{\xi, \theta} \left[\left(\frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta - Rp_0 \right) \delta w_0 + \left(\frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} - M_\theta - RQ_z - Rp_1 \right) \delta w_1 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial Q_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - N_\theta^* - RS_z - Rp_2 \right) \delta w_2 \right] Rd\xi d\theta + \quad (2.30) \\
& + \int_\theta \left[(N_\xi - \bar{N}_\xi) \delta u_0 + (M_\xi - \bar{M}_\xi) \delta u_1 + (N_\xi^* - \bar{N}_\xi^*) \delta u_2 + \right. \\
& + (M_\xi^* - \bar{M}_\xi^*) \delta u_3 + (N_{\xi\theta} - \bar{N}_{\xi\theta}) \delta v_0 + (M_{\xi\theta} - \bar{M}_{\xi\theta}) \delta v_1 + \\
& + (N_{\xi\theta}^* - \bar{N}_{\xi\theta}^*) \delta v_2 + (M_{\xi\theta}^* - \bar{M}_{\xi\theta}^*) \delta v_3 + (Q_\xi - \bar{Q}_\xi) \delta w_0 + \\
& \quad \left. + (S_\xi - \bar{S}_\xi) \delta w_1 + (Q_\xi^* - \bar{Q}_\xi^*) \delta w_2 \right] Rd\theta \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_\xi \left[(N_{\theta\xi} - \bar{N}_{\theta\xi}) \delta u_0 + (M_{\theta\xi} - \bar{M}_{\theta\xi}) \delta u_1 + (N_{\theta\xi}^* - \bar{N}_{\theta\xi}^*) \delta u_2 + \right. \\
& + (M_{\theta\xi}^* - \bar{M}_{\theta\xi}^*) \delta u_3 + (N_\theta - \bar{N}_\theta) \delta v_0 + (M_\theta - \bar{M}_\theta) \delta v_1 + \\
& + (N_\theta^* - \bar{N}_\theta^*) \delta v_2 + (M_\theta^* - \bar{M}_\theta^*) \delta v_3 + (Q_\theta - \bar{Q}_\theta) \delta w_0 \\
& \quad \left. + (S_\theta - \bar{S}_\theta) \delta w_1 + (Q_\theta^* - \bar{Q}_\theta^*) \delta w_2 \right] Rd\xi \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}.
\end{aligned}$$

2.4.2. Hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên

Để đảm bảo thỏa mãn phương trình (2.30) với mọi δu_i , δv_i , δw_j , ta suy ra hệ phương trình cân bằng gồm 11 phương trình tương ứng với 11 ẩn chuyển vị như sau:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} = 0, \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_\theta = 0, \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta - Rp_0 = 0, \\
\delta u_1 : \quad & \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - RQ_\xi = 0, \\
\delta v_1 : \quad & \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - RQ_\theta = 0, \\
\delta w_1 : \quad & \frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} - M_\theta - RQ_z - Rp_1 = 0, \tag{2.31} \\
\delta u_2 : \quad & \frac{\partial N_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RS_\xi = 0, \\
\delta v_2 : \quad & \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_\theta^*}{\partial \theta} - RS_\theta - Q_\theta^* = 0, \\
\delta w_2 : \quad & \frac{\partial Q_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - N_\theta^* - RS_z - Rp_2 = 0, \\
\delta u_3 : \quad & \frac{\partial M_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RQ_\xi^* = 0, \\
\delta v_3 : \quad & \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} - RQ_\theta^* - 2S_\theta^* = 0
\end{aligned}$$

Đối với mô hình chuyển vị $K3-0$, các phương trình tương ứng với $\delta w_1, \delta w_2$ không tồn tại.

Các điều kiện biên tương ứng với hệ phương trình cân bằng (2.31) bao gồm:

- Tại $\xi = \xi_1, \xi_2$:

$$\begin{aligned} N_\xi &= \bar{N}_\xi \cup u_0 = \bar{u}_0; N_\xi^* = \bar{N}_\xi^* \cup u_2 = \bar{u}_2; \\ M_\xi &= \bar{M}_\xi \cup u_1 = \bar{u}_1; M_\xi^* = \bar{M}_\xi^* \cup u_3 = \bar{u}_3; \\ M_\xi &= \bar{M}_\xi \cup u_1 = \bar{u}_1; M_\xi^* = \bar{M}_\xi^* \cup u_3 = \bar{u}_3; \\ N_{\xi\theta} &= \bar{N}_{\xi\theta} \cup v_0 = \bar{v}_0; N_{\xi\theta}^* = \bar{N}_{\xi\theta}^* \cup v_2 = \bar{v}_2; \\ M_{\xi\theta} &= \bar{M}_{\xi\theta} \cup v_1 = \bar{v}_1; M_{\xi\theta}^* = \bar{M}_{\xi\theta}^* \cup v_3 = \bar{v}_3; \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$Q_\xi = \bar{Q}_\xi \cup w_0 = \bar{w}_0; Q_\xi^* = \bar{Q}_\xi^* \cup w_2 = \bar{w}_2; S_\xi = \bar{S}_\xi \cup w_1 = \bar{w}_1.$$

- Tại $\theta = \theta_1, \theta_2$:

$$\begin{aligned} N_{\theta\xi} &= \bar{N}_{\theta\xi} \cup u_0 = \bar{u}_0; N_{\theta\xi}^* = \bar{N}_{\theta\xi}^* \cup u_2 = \bar{u}_2; \\ M_{\theta\xi} &= \bar{M}_{\theta\xi} \cup u_1 = \bar{u}_1; M_{\theta\xi}^* = \bar{M}_{\theta\xi}^* \cup u_3 = \bar{u}_3; \\ N_\theta &= \bar{N}_\theta \cup v_0 = \bar{v}_0; N_\theta^* = \bar{N}_\theta^* \cup v_2 = \bar{v}_2; \\ M_\theta &= \bar{M}_\theta \cup v_1 = \bar{v}_1; M_\theta^* = \bar{M}_\theta^* \cup v_3 = \bar{v}_3; \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$Q_\theta = \bar{Q}_\theta \cup w_0 = \bar{w}_0; Q_\theta^* = \bar{Q}_\theta^* \cup w_2 = \bar{w}_2; S_\theta = \bar{S}_\theta \cup w_1 = \bar{w}_1.$$

ở đây, các đại lượng $\bar{N}_\xi, \bar{N}_\xi^*, \bar{M}_\xi, \bar{M}_\xi^*, \bar{N}_{\xi\theta}, \bar{N}_{\xi\theta}^*, \bar{M}_{\xi\theta}, \bar{M}_{\xi\theta}^*, \bar{Q}_\xi, \bar{Q}_\xi^*, \bar{S}_\xi, \bar{N}_\theta, \bar{N}_\theta^*, \bar{M}_\theta, \bar{M}_\theta^*, \bar{N}_{\theta\xi}, \bar{N}_{\theta\xi}^*, \bar{M}_{\theta\xi}, \bar{M}_{\theta\xi}^*, \bar{Q}_\theta, \bar{Q}_\theta^*, \bar{S}_\theta, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{v}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{w}_2$ là đại lượng cho trước trên biên. Các thành phần nội lực suy rộng $N_\xi, M_\xi, N_\xi^*, M_\xi^*, N_\theta, M_\theta, N_\theta^*, M_\theta^*, Q_z, S_z, N_{\theta\xi}, M_{\theta\xi}, N_{\theta\xi}^*, M_{\theta\xi}^*, N_{\xi\theta}, M_{\xi\theta}, N_{\xi\theta}^*, M_{\xi\theta}^*, Q_\xi, S_\xi, Q_\xi^*, Q_\theta, S_\theta, Q_\theta^*, S_\theta^*$ được biểu diễn thông qua các thành phần biến dạng và ứng suất nhiệt theo các biểu thức sau:

$$\begin{bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \\ N_\xi^* \\ M_\xi^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (C_{11}(T, z)\varepsilon_\xi + C_{12}(T, z)\varepsilon_\theta + C_{13}(T, z)\varepsilon_z) \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz - \begin{bmatrix} N_\xi^T \\ M_\xi^T \\ N_\xi^{T*} \\ M_\xi^{T*} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \\ N_\theta^* \\ M_\theta^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (C_{21}(T, z)\varepsilon_\xi + C_{22}(T, z)\varepsilon_\theta + C_{23}(T, z)\varepsilon_z) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz - \begin{bmatrix} N_\theta^T \\ M_\theta^T \\ N_\theta^{T*} \\ M_\theta^{T*} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Q_z \\ S_z \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (C_{31}(T, z)\varepsilon_\xi + C_{32}(T, z)\varepsilon_\theta + C_{33}(T, z)\varepsilon_z) \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} dz - \begin{bmatrix} Q_z^T \\ S_z^T \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N_{\theta\xi} \\ M_{\theta\xi} \\ N_{\theta\xi}^* \\ M_{\theta\xi}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{44}(T, z)\gamma_{\xi\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz, \quad (2.34)$$

$$\begin{bmatrix} N_{\xi\theta} \\ M_{\xi\theta} \\ N_{\xi\theta}^* \\ M_{\xi\theta}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{44}(T, z)\gamma_{\xi\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{bmatrix} Q_\xi \\ S_\xi \\ Q_\xi^* \\ S_\xi^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{55}(T, z)\gamma_{\xi z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} Q_\theta \\ S_\theta \\ Q_\theta^* \\ S_\theta^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{66}(T, z)\gamma_{\theta z} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz.$$

trong đó, các thành phần nội lực suy rộng gây ra do nhiệt xác định như sau:

$$\begin{bmatrix} N_{\xi}^T \\ M_{\xi}^T \\ N_{\xi}^{T*} \\ M_{\xi}^{T*} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (C_{11}(T, z)\alpha_{\xi} + C_{12}(T, z)\alpha_{\theta} + C_{13}(T, z)\alpha_z) \Delta T \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{bmatrix} N_{\theta}^T \\ M_{\theta}^T \\ N_{\theta}^{T*} \\ M_{\theta}^{T*} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (C_{21}(T, z)\alpha_{\xi} + C_{22}(T, z)\alpha_{\theta} + C_{23}(T, z)\alpha_z) \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz, \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} Q_z^T \\ S_z^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (C_{31}(T, z)\alpha_{\xi} + C_{32}(T, z)\alpha_{\theta} + C_{33}(T, z)\alpha_z) \Delta T \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} dz.$$

2.4.3. Hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị

Trong trường hợp hàm nhiệt độ phân bố theo chiều dày $\Delta T = \Delta T(z)$, có thể viết lại hệ phương trình (2.31) như sau: Thế biểu thức chuyển vị (2.6) vào biểu thức quan hệ biến dạng-chuyển vị (2.7), quan hệ biến dạng - ứng suất (2.9) và các biểu thức nội lực suy rộng (2.34), (2.35) thu được hệ gồm 11 phương trình đạo hàm riêng cấp 2 tương ứng với 11 ẩn chuyển vị:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 \left(H_{1n}^l u_n + H_{1n,11}^l \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_n + H_{1n,22}^l \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_n \right) + \\ + \sum_{n=0}^3 H_{2n,12}^l \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^2 H_{3n,1}^l \frac{\partial}{\partial \xi} w_n = 0, \quad l = 1 \div 4 \end{aligned} \quad (2.36.a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 \left(H_{2n}^k v_n + H_{2n,11}^k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v_n + H_{2n,22}^k \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v_n \right) + \\ + \sum_{n=0}^3 H_{1n,12}^k \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_n + \sum_{n=0}^3 H_{3n,2}^k \frac{\partial}{\partial \theta} w_n = 0, \quad k = 5 \div 8 \end{aligned} \quad (2.36.b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^2 \left(H_{3n}^t w_n + H_{3n,11}^t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w_n + H_{3n,22}^t \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} w_n \right) + \sum_{n=0}^3 H_{1n,1}^t \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \\ + \sum_{n=0}^3 H_{2n,2}^t \frac{\partial}{\partial \theta} v_n = H_4^t q^+ + H_5^t q^- + H_T^t \Delta T, \quad t = 9 \div 11 \end{aligned} \quad (2.36.c)$$

trong đó, các hệ số H_β^α , phụ thuộc vào các thông số vật liệu, hình học của vỏ và được xác định bằng cách tính toán các hệ số theo các biểu thức (2.6), (2.7) (2.9), (2.34), (2.35) rồi thực hiện nhóm theo các số hạng cấp đạo hàm của u, v, w . Biểu thức của các hệ số H_β^α được trình bày cụ thể ở phần Phụ lục. Đối với mô hình $K3-0$ các phương trình số 10 và 11 không tồn tại.

Các điều kiện biên (2.32), (2.33) ở các trường hợp thường gặp trong thực tế tính toán [124] được xác định dựa trên các ràng buộc về chuyển vị và lực, cụ thể như sau:

- Đối với điều kiện biên tự do:

$$\text{Tại } \xi = 0, \frac{L}{R}: N_\xi = N_{\xi\theta} = Q_\xi = M_\xi = M_{\xi\theta} = S_\xi = 0,$$

$$N_\xi^* = N_{\xi\theta}^* = Q_\xi^* = M_\xi^* = M_{\xi\theta}^* = 0.$$

$$\text{Tại } \theta = \theta_1, \theta_2: N_\theta = N_{\theta\xi} = Q_\theta = M_\theta = M_{\theta\xi} = S_\theta = 0,$$

$$N_\theta^* = N_{\theta\xi}^* = Q_\theta^* = M_\theta^* = M_{\theta\xi}^* = 0.$$

- Đối với điều kiện biên gối tựa:

$$\text{Tại } \xi = 0, \frac{L}{R}: N_\xi = M_\xi = N_\xi^* = M_\xi^* = 0, v_i = 0, w_j = 0, \quad (i = 0, 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2),$$

$$\text{Tại } \theta = \theta_1, \theta_2: N_\theta = M_\theta = N_\theta^* = M_\theta^* = 0, u_i = 0, w_j = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2).$$

- Đối với điều kiện biên ngàm:

Tại $\xi = 0, \frac{L}{R}$: $u_i = 0, v_i = 0, w_j = 0, (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2)$.

Tại $\theta = \theta_1, \theta_2$: $u_i = 0, v_i = 0, w_j = 0 (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2)$.

- Điều kiện biên nhiệt độ:

Tại $z = -h/2$: $T = T_{in}$

Tại $z = h/2$: $T = T_{out}$

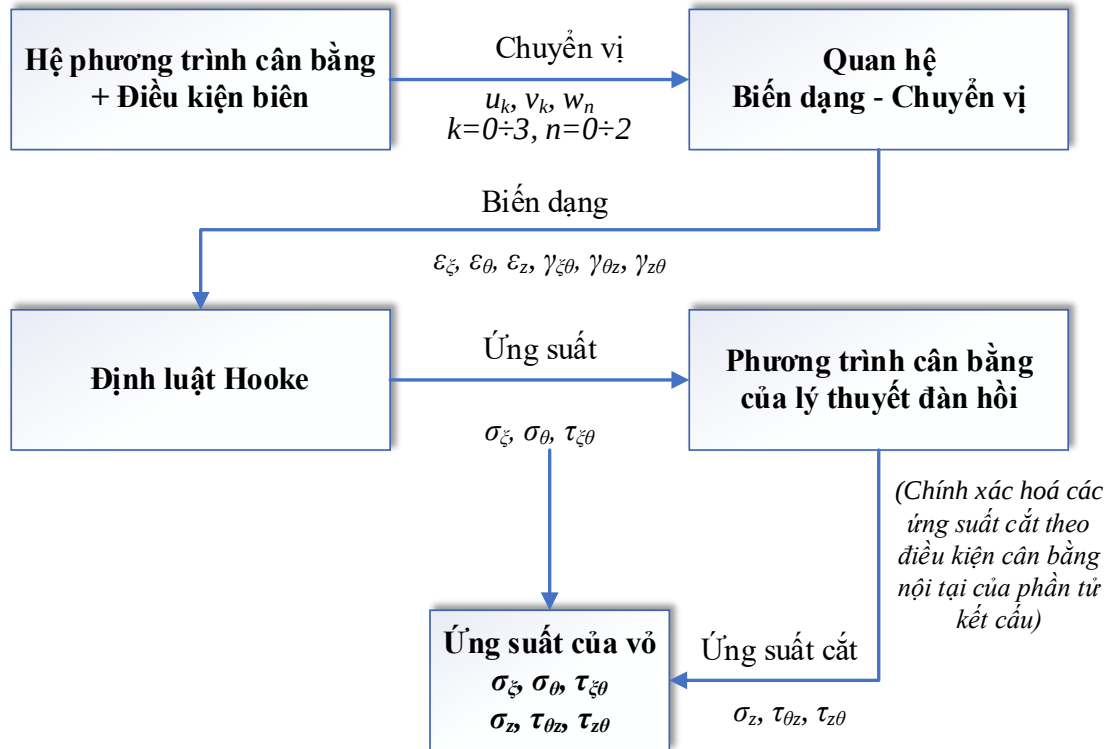
2.5. Trình tự giải bài toán xác định ứng suất của vỏ

Thực hiện giải hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng (2.31) cùng các điều kiện biên tương ứng, ta nhận được trường chuyển vị $u_i, v_i (i = 0, 1, 2, 3)$ và $w_j (j = 0, 1, 2)$. Từ phương trình quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị (2.7) ta tìm được các biến dạng $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\xi z}, \gamma_{\theta z}$. Tiếp theo, sử dụng biểu thức quan hệ biến dạng và ứng suất theo định luật Hooke (2.9) để xác định các ứng suất $\sigma_\xi, \sigma_\theta, \tau_{\xi\theta}$. Các thành phần ứng suất còn lại được xác định dựa trên phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi 3D [124] theo các tích phân sau:

$$\begin{aligned}\tau_{\xi z} &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^z \left[\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\theta}}{\partial \theta} \right] dz, \\ \tau_{\theta z} &= -\frac{R}{(R+z)^2} \int_{-h/2}^z \left[\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 \frac{\partial \tau_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right] dz, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^z \left[\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \sigma_\theta \right] dz + \frac{R-h/2}{R+h/2} q^-.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Phương trình này nhằm chính xác hoá các thành phần ứng suất cắt để đảm bảo thỏa mãn điều kiện cân bằng nội tại bên trong kết cấu và điều kiện biên tại mặt trên và mặt dưới của vỏ.

Các bước để giải bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D và tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ được thể hiện ở sơ đồ Hình 2.2.



Hình 2.2 Các bước xác định ứng suất của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt

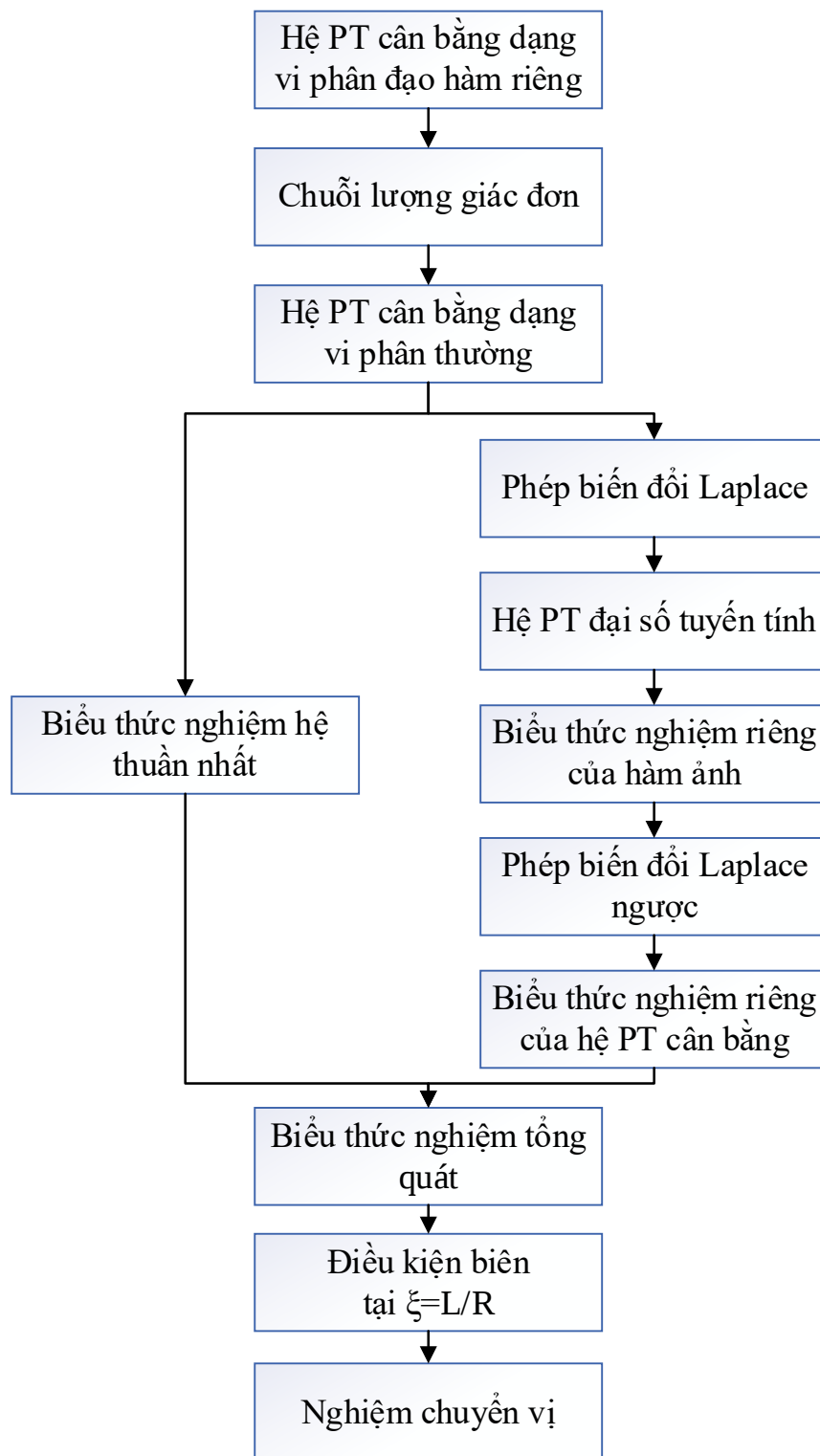
2.6. Phương pháp giải tích trong nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau chịu tải hướng kính

Trong phần này của luận án thực hiện giải quyết bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt theo hướng sử dụng phương pháp giải tích. Trong phương pháp giải tích, điều kiện biên đóng vai trò quyết định trong việc lựa chọn dạng nghiệm từ đó ảnh hưởng lớn đến sự phức tạp của bài toán, mức độ hiệu quả của phương pháp. Thông thường, đối với bài toán có biên tựa đơn sẽ được giải quyết một cách trọn vẹn bằng cách sử dụng phương pháp Galerkin với chuỗi lượng giác kép. Đối với bài toán có biên không phải tựa đơn (non-simply

supported), cần sử dụng thêm kỹ thuật đặc biệt khác để giải quyết như phương pháp cầu phương vi phân (Differential Quadrature Method - DQM), phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (Generalized Differential Quadrature-GDQ)... Trong luận án này, đề xuất sử dụng phương pháp giải tích kết hợp giữa chuỗi lượng giác đơn và phép biến đổi Laplace để giải quyết bài toán võ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau trong trường hợp võ chịu tải trọng cục bộ hướng kính tuần hoàn. Trình tự cơ bản của phương pháp này bao gồm:

- Sử dụng chuỗi lượng giác đơn để xấp xỉ cho chuyển vị, tải trọng nhằm chuyển hệ phương trình cân bằng dạng vi phân đạo hàm riêng trở thành dạng hệ phương trình vi phân thường.
- Xác định nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất.
- Xác định nghiệm riêng theo các dạng tải trọng bằng cách sử dụng phép biến đổi Laplace.
- Xác định các hệ số tích phân theo điều kiện biên, từ đó xác định được biểu thức của chuyển vị.

Quy trình tính toán được trình bày ở sơ đồ Hình 2.3.



Hình 2.3 Qui trình giải hệ phương trình cân bằng của vỏ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau chịu tải trọng hướng kính

2.6.1. Chuyển hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng về hệ phương trình vi phân thường bằng chuỗi lượng giác

Đối với trường hợp vỏ trụ kín, để chuyển hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng (2.36) thành phương trình vi phân thường, luận án sử dụng chuỗi lượng giác khai triển đối với toạ độ vòng θ . Khi đó các điều kiện biên tuần hoàn theo biên θ sẽ tự động thoả mãn. Đối với trường hợp panel trụ, chuỗi lượng giác này có thể sử dụng trong trường hợp biên tựa tại các vị trí $\theta = 0$ và $\theta = \theta_0$

Trong cả hai trường hợp, ta phân tích chuyển vị u_i , v_i , w_j , tải trọng cơ $q^\pm(\xi, \theta)$ và nhiệt độ ΔT dưới dạng chuỗi lượng giác đơn như sau [126]:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi, \theta) &= U_{i0}(\xi) + \sum_m U_{im}(\xi) \sin \varphi_m \theta, \\
 v_i(\xi, \theta) &= V_{i0}(\xi) - \sum_m V_{im}(\xi) \cos \varphi_m \theta, \\
 w_j(\xi, \theta) &= W_{j0}(\xi) + \sum_m W_{jm}(\xi) \sin \varphi_m \theta, \\
 q^\pm(\xi, \theta) &= Q_0^\pm(\xi) + \sum_m Q_m^\pm(\xi) \sin \varphi_m \theta, \\
 \Delta T &= T_0(\xi) + \sum_m T_m(\xi) \sin \varphi_m \theta, \\
 \varphi_m &= \frac{m\pi}{\theta_0}, i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Đối với vỏ trụ kín, ta giả thiết $\theta_0 = \pi$.

Thay thế các biểu thức ở (2.38) vào hệ phương trình (2.36), thực hiện các phép biến đổi theo hệ số của chuỗi lượng giác ta được các phương trình vi phân để xác định các hàm U_{i0} , V_{i0} , W_{j0} , $i = 0 \div 3$, $j = 0 \div 2$.

$$\sum_{i=0}^3 \left(H_{1i}^l U_{i0} + H_{1i,11}^l \frac{d^2}{d\xi^2} U_{i0} \right) + \sum_{j=0}^2 H_{3j,1}^l \frac{d}{d\xi} W_{j0} = 0, \quad l = 1 \div 4, \quad (2.39)$$

$$\sum_{i=0}^3 \left(H_{2i}^k V_{i0} + H_{2i,11}^k \frac{d^2}{d\xi^2} V_{i0} \right) = 0, \quad k = 5 \div 8, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^2 \left(H_{3j}^t W_{j0} + H_{3j,11}^t \frac{d^2}{d\xi^2} W_{j0} \right) + \sum_{i=0}^3 H_{1i,1}^t \frac{d}{d\xi} U_{i0} + \\ & = H_4^t Q_0^+ + H_5^t Q_0^- + H_T^t T_0, \quad t = 9 \div 11, \end{aligned} \quad (2.41)$$

và cho các hàm $U_{im}^{(s)}$, $V_{im}^{(s)}$, $W_{jm}^{(s)}$, $i = 0 \div 3$, $j = 0 \div 2$, $s = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^3 \left(H_{1i}^l U_{im}^{(s)} + H_{1i,11}^l \frac{d^2}{d\xi^2} U_{im}^{(s)} - \varphi_m^2 H_{1i,22}^l U_{im}^{(s)} \right) + \\ & + \sum_{i=0}^3 \varphi_m H_{2i,12}^l \frac{d}{d\xi} V_{im}^{(s)} + \sum_{j=0}^2 H_{3j,1}^l \frac{d}{d\xi} W_{jm}^{(s)} = 0, \quad l = 1 \div 4, \\ & \sum_{i=0}^3 \left(H_{2i}^k V_{im}^{(s)} + H_{2i,11}^k \frac{d^2}{d\xi^2} V_{im}^{(s)} - \varphi_m^2 H_{2i,22}^k V_{im}^{(s)} \right) - \\ & - \sum_{i=0}^3 \varphi_m H_{1i,12}^k \frac{d}{d\xi} U_{im}^{(s)} - \sum_{j=0}^2 \varphi_m H_{3j,2}^k W_{jm}^{(s)} = 0, \quad k = 5 \div 8, \\ & \sum_{j=0}^2 \left(H_{3j}^t W_{jm}^{(s)} + H_{3j,11}^t \frac{d^2}{d\xi^2} W_{jm}^{(s)} - \varphi_m^2 H_{3j,22}^t W_{jm}^{(s)} \right) + \sum_{i=0}^3 H_{1i,1}^t \frac{d}{d\xi} U_{im}^{(s)} + \\ & + \sum_{i=0}^3 \varphi_m H_{2i,2}^t V_{im}^{(s)} = H_4^t Q_m^{(s)+} + H_5^t Q_m^{(s)-} + H_T^t T_m^{(s)}, \quad t = 9 \div 11. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Các hệ phương trình (2.39) – (2.42) là các hệ phương trình vi phân thường đối với các biến số U_{i0} , V_{i0} , W_{j0} và $U_{im}^{(s)}$, $V_{im}^{(s)}$, $W_{jm}^{(s)}$. Các hệ phương trình này độc lập tương đối với nhau theo từng giá trị của m .

Trong trường hợp tải trọng đối xứng trục thì $V_{i0}(\xi) = 0$.

Như vậy, sử dụng phương pháp tách biến và phân tích theo chuỗi lượng giác đơn, thực hiện chuyển từ việc nghiên cứu hệ phương trình đạo hàm riêng (2.36) sang nghiên cứu các hệ phương trình vi phân thường (2.39) ÷ (2.41) và (2.42). Trường hợp vỏ trụ kín FG-CNTRC có kết cấu đối xứng trục, chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt hướng kính và đối xứng trục thì các thành phần chuyển vị, ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào θ , thành phần chuyển vị $v_i = 0$. Chuyển vị và tải trọng có được như khai triển ở (2.38) với $m = 0$. Trong trường hợp này hệ phương trình đạo hàm riêng (2.36) trở thành các phương trình vi phân thường tương tự như phương trình (2.39) và (2.41).

Hệ phương trình vi phân thường vừa nhận được có thể được giải bằng phương pháp số hoặc phương pháp giải tích. Từ các nghiệm tổng quát kết hợp với các điều kiện biên tương ứng, ta sẽ nhận được biểu thức của các hàm U_{i0} , V_{i0} , W_{j0} và $U_{im}^{(s)}$, $V_{im}^{(s)}$, $W_{jm}^{(s)}$. Từ đó, ta sẽ nhận được biểu thức của các thành phần chuyển vị $u_i(\xi, \theta)$, $v_i(\xi, \theta)$, $w_j(\xi, \theta)$ thông qua tổng (2.38).

2.6.2. Giải bài toán vỏ trụ chịu tải trọng cục bộ hướng kính bằng phép biến đổi Laplace

Để xác định nghiệm của hệ phương trình vi phân (2.39) và (2.41) ta sử dụng phép biến đổi Laplace. Ký hiệu hàm ảnh tương ứng với các hàm chuyển vị và tải trọng như sau:

$$\begin{aligned} U_{im}(\xi) &\Leftrightarrow \tilde{U}_{im}(p), \quad V_{im}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{V}_{im}(p), \\ W_{jm}(\xi) &\Leftrightarrow \tilde{W}_{jm}(p), \quad Q_m^\pm(\xi) \Leftrightarrow \tilde{Q}_m^\pm(p), T_m(\xi) \Leftrightarrow \tilde{T}_m(p). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Theo quy tắc lấy vi phân hàm nguồn, có được:

$$\frac{d}{d\xi} U_{im}(\xi) \Leftrightarrow p \tilde{U}_{im}(p) - C_{im}^{10}, \quad \frac{d^2}{d\xi^2} U_{im}(\xi) \Leftrightarrow p^2 \tilde{U}_{im}(p) - p C_{im}^{10} - C_{01}^{11},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}V_{im}(\xi) &\Leftrightarrow p\tilde{V}_{im}(p) - C_{im}^{20}, \quad \frac{d^2}{d\xi^2}V_{im}(\xi) \Leftrightarrow p^2\tilde{V}_{im}(p) - pC_{im}^{20} - C_{im}^{21}, \\
\frac{d}{d\xi}W_{jm}(\xi) &\Leftrightarrow p\tilde{W}_{jm}(p) - C_{jm}^{30}, \quad \frac{d^2}{d\xi^2}W_{jm}(\xi) \Leftrightarrow p^2\tilde{W}_{jm}(p) - pC_{jm}^{30} - C_{jm}^{31}, \\
i &= 0 \div 3, j = 0 \div 2
\end{aligned} \tag{2.44}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
C_{im}^{10} &= U_{im}(0), \quad C_{im}^{20} = V_{im}(0), \quad C_{jm}^{30} = W_{jm}(0), \\
C_{im}^{11} &= \left. \frac{d}{d\xi}U_{im}(\xi) \right|_{\xi=0}, \quad C_{im}^{21} = \left. \frac{d}{d\xi}V_{im}(\xi) \right|_{\xi=0}, \quad C_{jm}^{31} = \left. \frac{d}{d\xi}W_{jm}(\xi) \right|_{\xi=0}.
\end{aligned}$$

Hệ phương trình (2.39) ÷ (2.41) là một trường hợp riêng của (2.42) với $m=0$, do đó ở đây sẽ trình bày cách giải (2.42). Áp dụng phép biến đổi Laplace cho hệ phương trình (2.42) ta xác định được hệ phương trình đại số đối với $U_{im}(p)$, $V_{im}(p)$ và $W_{jm}(p)$ như sau:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^3 (H_{1i}^l + H_{1i,11}^l p^2 - \varphi_m^2 H_{1i,22}^l) U_{im}(p) + \varphi_m \sum_{i=0}^3 H_{2i,12}^l p V_{im}(p) + \\
&+ \sum_{j=0}^2 H_{3j,1}^l p W_{jm}(p) = \sum_{i=0}^3 H_{1i,11}^l (p C_{im}^{10} + C_{im}^{11}) + \varphi_m \sum_{i=0}^3 H_{2i,12}^l C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^2 H_{3j,1}^l C_{jm}^{30}, \\
&l = 1 \div 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_m \sum_{i=0}^3 H_{1i,12}^k p U_{im}(p) - \sum_{i=0}^3 (H_{in}^k + H_{2i,11}^k p^2 - \varphi_m^2 H_{2i,22}^k) V_{im}(p) + \\
&+ \varphi_m \sum_{j=0}^2 H_{3j,2}^k W_{jm}(p) = \varphi_m \sum_{i=0}^3 H_{1i,12}^k C_{im}^{10} - \sum_{i=0}^3 H_{2i,11}^k (p C_{im}^{20} + C_{im}^{21}), \quad (2.45)
\end{aligned}$$

$$k = 5 \div 8.$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^3 H_{1i,1}^t p U_{im}(p) + \sum_{j=0}^2 (H_{3j}^t + H_{3j,11}^t p^2 - \varphi_m^2 H_{3j,22}^t) W_{jm}(p) + \varphi_m \sum_{i=0}^3 H_{2i,2}^t V_{im}(p) = \\
& = H_{q^+}^t Q_m^+(p) + H_{q^-}^t Q_m^-(p) + H_T^t \tilde{T}_m(p) + \sum_{i=0}^3 H_{1i,1}^t C_{im}^{10} + \sum_{j=0}^2 H_{3i,11}^t (p C_{jm}^{30} + C_{jm}^{31}), \\
& t = 9 \div 11,
\end{aligned}$$

ở đây, các hằng số C_{im}^{10} , C_{im}^{20} , C_{jm}^{30} , C_{im}^{11} , C_{im}^{21} , C_{jm}^{31} , $i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2$ là các hằng số tích phân và được xác định thông qua các điều kiện biên tại các biên.

Điều kiện biên tại $\xi = 0$, L/R :

- Biên ngàm:

$$u_i = 0, v_i = 0, w_j = 0, (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2). \quad (2.46)$$

-Biên tựa:

$$N_\xi = M_\xi = N_\xi^* = M_\xi^* = 0, v_i = 0, w_j = 0, (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2), \quad (2.47)$$

- Biên tự do:

$$N_\xi = N_{\xi\theta} = Q_\xi = M_\xi = M_{\xi\theta} = S_\xi = 0,$$

$$N_\xi^* = N_{\xi\theta}^* = Q_\xi^* = M_\xi^* = M_{\xi\theta}^* = 0. \quad (2.48)$$

Từ điều kiện biên của hàm nguồn, ta phân tích được điều kiện biên tương ứng của hàm ảnh tại $\xi = 0$ thông qua các hằng số tích phân C_{im}^{10} , C_{im}^{20} , C_{jm}^{30} , C_{im}^{11} , C_{im}^{21} , C_{jm}^{31} , $i = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2$ như sau:

- Đối với biên ngàm:

$$C_{im}^{10} = 0, C_{im}^{20} = 0, C_{jm}^{30} = 0, i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2. \quad (2.49)$$

- Đối với biên tựa có thể xác định thông qua các hệ số C_{i0}^{11} , C_{j0}^{30} như sau :

$$C_{im}^{20} = 0, C_{jm}^{30} = 0, i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2,$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^1 C_{im}^{11} - N_{\xi}^T = 0, \sum_{i=0}^K G_{1i}^2 C_{im}^{11} - M_{\xi}^T = 0, \quad (2.50)$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^3 C_{im}^{11} - N_{\xi}^{T*} = 0, \sum_{i=0}^K G_{1i}^4 C_{im}^{11} - M_{\xi}^{T*} = 0.$$

- Đối với biên tự do có thể viết lại hệ phương trình đại số với các hằng số tích phân $C_{im}^{10}, C_{im}^{20}, C_{jm}^{30}, C_{im}^{11}, C_{im}^{21}, C_{jm}^{31}, i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2$ như sau:

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^1 C_{im}^{11} + \varphi_m \sum_{i=0}^K G_{2i}^1 C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^{K-1} G_{3j}^1 C_{jm}^{30} - N_{\xi}^T = 0,$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^2 C_{im}^{11} + \varphi_m \sum_{i=0}^K G_{2i}^2 C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^{K-1} G_{3j}^2 C_{jm}^{30} - M_{\xi}^T = 0,$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^3 C_{im}^{11} + \varphi_m \sum_{i=0}^K G_{2i}^3 C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^{K-1} G_{3j}^3 C_{jm}^{30} - N_{\xi}^{T*} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^4 C_{im}^{11} + \varphi_m \sum_{i=0}^K G_{2i}^4 C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^{K-1} G_{3j}^4 C_{jm}^{30} - M_{\xi}^{T*} = 0,$$

$$-\varphi_m \sum_{i=0}^K G_{1i}^5 C_{im}^{10} + \sum_{i=0}^K G_{2i}^5 C_{im}^{21} = 0,$$

$$-\varphi_m \sum_{i=0}^K G_{1i}^6 C_{im}^{10} + \sum_{i=0}^K G_{2i}^6 C_{im}^{21} = 0,$$

(2.51)

$$-\varphi_m \sum_{i=0}^K G_{1i}^7 C_{im}^{10} + \sum_{i=0}^K G_{2i}^7 C_{im}^{21} = 0,$$

$$-\varphi_m \sum_{i=0}^K G_{1i}^8 C_{im}^{10} + \sum_{i=0}^K G_{2i}^8 C_{im}^{21} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^9 C_{im}^{11} + \varphi_m \sum_{i=0}^K G_{2i}^9 C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^{K-1} G_{3j}^9 C_{jm}^{30} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^{10} C_{im}^{11} + \varphi_m \sum_{i=0}^K G_{2i}^{10} C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^{K-1} G_{3j}^{10} C_{jm}^{30} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^K G_{1i}^{11} C_{im}^{11} + \varphi_m \sum_{i=0}^K G_{2i}^{11} C_{im}^{20} + \sum_{j=0}^{K-1} G_{3j}^{11} C_{jm}^{30} = 0.$$

Các hệ số G_{ij}^k nhận được trực tiếp từ các biểu thức xác định các thành phần nội lực suy rộng tương ứng. Ta coi các giá trị C_{im}^{10} , C_{im}^{20} , C_{jm}^{30} được cho trước, khi đó hệ phương trình (2.51) trở thành hệ phương trình đại số tuyến tính với các biến C_{im}^{11} , C_{im}^{21} , C_{jm}^{31} . Giải hệ phương trình đại số (2.51), thu được các biểu thức để xác định C_{im}^{11} , C_{im}^{21} , C_{jm}^{31} thông qua C_{im}^{10} , C_{im}^{20} , C_{jm}^{30} .

Do đó, thông qua các phương trình (2.49), (2.50), (2.51), điều kiện biên tại một cạnh của vỏ sẽ tự động được thỏa mãn, với C_{im}^{10} , C_{im}^{20} , C_{jm}^{30} , C_{im}^{11} , C_{im}^{21} , C_{jm}^{31} nhận các giá trị cho trước hoặc biểu diễn thông qua các biểu thức cho trước. Khi đó, một nửa các hằng số tích phân còn lại sẽ được xác định thông qua các điều kiện biên còn lại.

Giải hệ phương trình đại số (2.45) đồng thời xem xét điều kiện biên tại $\xi = 0$ đối với hàm ảnh $U_{im}(p)$, $V_{im}(p)$, $W_{jm}(p)$ ta xác định được biểu thức hàm ảnh dưới dạng một phân thức đại số với tử số và mẫu số là đa thức của p . Áp dụng phép biến đổi Laplace ngược đối với biểu thức này ta xác định được biểu thức $U_{im}(\xi)$, $V_{im}(\xi)$, $W_{jm}(\xi)$. Một nửa các hằng số tích phân còn lại được xác định từ điều kiện biên còn lại tại $\xi = L/R$.

Việc áp dụng phép biến đổi Laplace trong giải bài toán biên theo hướng tiếp cận giải tích cho thấy, phương pháp nghiên cứu rất hiệu quả đối với trường hợp vỏ chịu tải trọng phân bố cục bộ trên một đoạn vỏ. Trong trường hợp này,

nếu sử dụng cách tiếp cận thông thường, ta phải sử dụng chuỗi xấp xỉ với số lượng phần tử lớn mới đạt được độ chính xác cho phép.

Cách tiếp cận đã trình bày ở trên đây có thể mở rộng cho trường hợp vỏ chịu tác dụng của tải trọng có các dạng hàm phân bố khác nhau, với điều kiện có thể xác định được biểu thức tường minh của biểu thức nghiệm trong phép biến đổi Laplace ngược. Đồng thời, việc sử dụng công thức nghiệm để xác định các thành phần chuyển vị có thể áp dụng cho các điều kiện biên khác nhau.

Dựa trên mô hình tính toán và phương pháp đã trình bày trên, luận án đã tiến hành xây dựng chương trình tính toán bằng phần mềm Mapple trong hai trường hợp: Vỏ chịu tải trọng cơ và vỏ chịu tải trọng cơ nhiệt.

Kết luận chương 2

Trong chương 2, luận án đã thực hiện giải quyết được các nội dung sau:

- Xây dựng được mô hình tính toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt có xét đến gradient nhiệt, tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ và trường chuyển vị theo mô hình lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu Quasi-3D. Trường nhiệt độ được giả thiết là nhiệt dừng và biến đổi theo chiều dày vỏ. Áp dụng nguyên lý công ảo luận án đã thiết lập được hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ nhiệt.

- Xây dựng được trình tự giải bài toán đối với vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ nhiệt, trong đó các thành phần ứng suất cắt được xác định thông qua phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi 3D cho phép đảm bảo điều kiện cân bằng nội tại kết cấu, đồng thời thỏa mãn điều kiện biên ở bề mặt.

- Xây dựng phương pháp giải tích cho bài toán vỏ trụ FG-CNTRC có điều kiện biên khác nhau chịu tải trọng hướng kính, cục bộ theo chiều dài, tuần hoàn theo hướng vòng bằng cách sử dụng chuỗi lượng giác đơn và phép biến đổi Laplace. Chuỗi lượng giác đơn cho phép chuyển hệ phương trình cân bằng dạng vi phân đạo hàm riêng thành hệ phương trình vi phân thường. Phép biến đổi Laplace cho phép xác định nghiệm riêng bằng cách phân tích biểu thức đặc trưng theo các trường hợp tải trọng khác nhau. Từ mô hình và phương pháp tính toán đã thực hiện xây dựng chương trình tính toán.

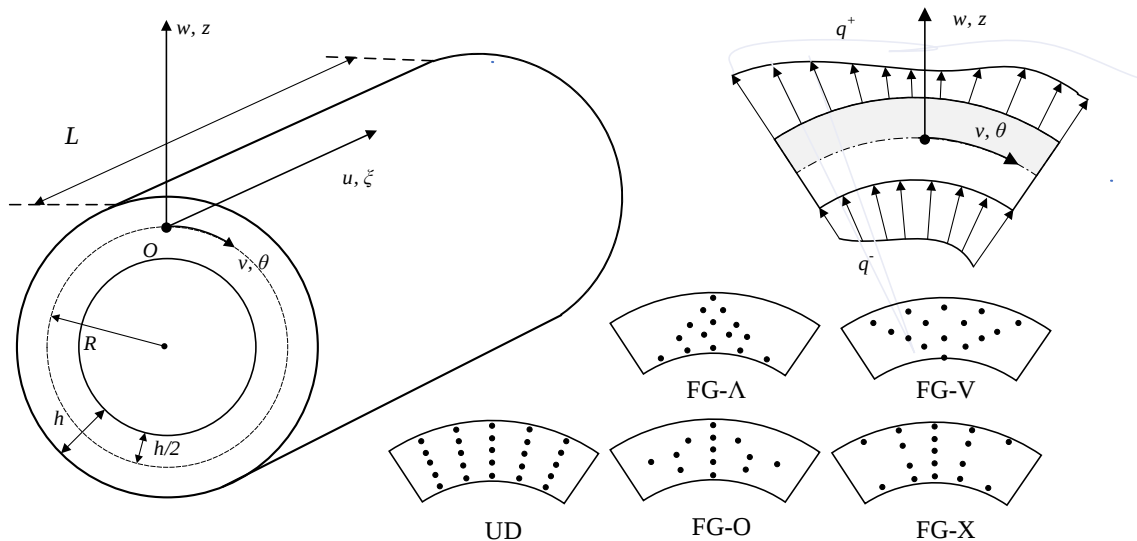
Hai điểm nổi bật của phương pháp này so với phương pháp giải tích thông thường đó là: cho phép giải quyết hiệu quả đối với điều kiện biên khác nhau và cho phép giải quyết hiệu quả đối với cả trường hợp tải trọng tác dụng lên vỏ là tải trọng cục bộ, tải trọng biến đổi đột ngột dạng bậc thang.

Chương 3. NGHIÊN CỨU KHẢO SÁT VỎ TRỤ FG-CNTRC CHỊU TẢI TRỌNG CƠ

Trong thực tế, vỏ trụ chịu tải trọng cơ là bài toán kỹ thuật thường gặp như khoang trụ của tên lửa, đường ống dẫn khí, đường ống nhiên liệu, bình khí nén, bình nhiên liệu... Trong chương này thực hiện nghiên cứu khảo sát vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang. Dựa vào khả năng, ưu điểm của lý thuyết và phương pháp được sử dụng, chương này tập trung giải quyết các bài toán:

- Khảo sát vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ với các điều kiện biên khác nhau, có xét đến ảnh hưởng của yếu tố hình học.
- Khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng biên và các yếu tố ảnh hưởng đến sự phân bố của ứng suất tại khu vực biên.
- Khảo sát ảnh hưởng của đặc điểm tải trọng (mức độ tập trung tải trọng cục bộ, vị trí tải trọng cục bộ, dạng tải trọng).

3.1. Mô hình bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ



Hình 3.1 Mô hình vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ

Xét vỏ trụ kín FG-CNTRC có chiều dài L , bán kính trung bình R , độ dày h . Vỏ chịu tải trọng hướng kính $q^+(\xi, \theta)$ - trên bề mặt ngoài, $q^-(\xi, \theta)$ - trên bề mặt trong. Giả thiết vỏ chỉ chịu tải trọng cơ, nhiệt độ trong toàn bộ kết cấu của vỏ bằng nhiệt độ tham chiếu $T=300K$.

Vỏ trụ FG-CNTRC được chế tạo từ vật liệu nền đồng chất đẳng hướng PMMA, vật liệu gia cường là (10, 10) SWCNT. Các thông số vật liệu của PMMA và (10,10) SWCNT được xác định như sau [41, 122]: $E_{11}^{CNT} = 5.6466TPa$, $E_{22}^{CNT} = 7.0800TPa$, $G_{12}^{CNT} = 1.9445TPa$, $\mu_{12}^{CNT} = 0.175$, $\rho_{CNT} = 1400kg/m^3$, $E_m = 2.1GPa$, $\rho_m = 1500kg/m^3$, $\mu_m = 0.34$.

Hệ số hiệu dụng của CNT $\eta_i (i=1,2,3)$ được xác định bằng cách đồng nhất thông số cơ học hiệu dụng của vật liệu FG-CNTRC xác định từ mô phỏng động lực học phân tử và thông số xác định từ Quy luật hỗn hợp mở rộng. Giá trị của chúng phụ thuộc vào tỷ lệ thể tích CNT như sau [41, 122]:

$$\begin{aligned} V_{CNT}^* &= 0.12; \eta_1 = 0.137; \eta_2 = 1.022; \eta_3 = 0.7\eta_2; \\ V_{CNT}^* &= 0.17; \eta_1 = 0.142; \eta_2 = 1.626; \eta_3 = 0.7\eta_2; \\ V_{CNT}^* &= 0.28; \eta_1 = 0.141; \eta_2 = 1.585; \eta_3 = 0.7\eta_2; \end{aligned}$$

3.2. Các ví dụ kiểm chứng

Dựa trên mô hình tính toán, phương pháp giải được trình bày ở chương 2, với giả thiết nhiệt độ trong toàn bộ kết cấu vỏ bằng nhiệt độ tham chiếu $T=300K$, thực hiện xây dựng chương trình tính toán cho vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ bằng phần mềm Mapple. Để xác định độ tin cậy của mô hình tính toán, phương pháp giải và chương trình tính toán thực hiện so sánh kết quả thu được với các kết quả đã được công bố.

3.2.1. Ví dụ 1

Trong ví dụ kiểm chứng này sẽ kiểm tra độ tin cậy của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D bằng cách so sánh với kết quả dựa trên lý thuyết đàn hồi 3D đã được công bố của Brischetto [127]. Để đánh giá tính hiệu quả của lý thuyết: thực hiện so sánh đồng thời kết quả dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang (mô hình K3-2 theo phương trình (2.6.a)) và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khi bỏ qua ứng suất pháp tuyến ngang (mô hình K3-0 theo phương trình (2.6.b)) với kết quả chính xác theo lý thuyết đàn hồi 3D của Brischetto [127].

Xét vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng pháp tuyến điều hoà $q = Q(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta)$ ở bề mặt ngoài trong đó $\bar{\alpha} = \frac{m\pi}{a}$, $\bar{\beta} = \frac{n\pi}{b}$, đối với vỏ trụ thì $a = 2\pi R, b = L$. Tải trọng pháp tuyến trong trường hợp đang xét có: $Q(z) = 1Pa, m = 2, n = 1$. Chuyển sang hệ toạ độ $O\xi\theta z$ theo công thức $\alpha = \theta R, \beta = \xi R$ ta thu được biểu thức tải trọng $q = \sin(\pi\xi R/L) \sin(\theta)$.

Các thông số khác được cho như sau:

- Thông số hình học: bán kính $R=10m$, chiều dài $L=20m$; tỷ lệ bán kính đối với chiều dày vỏ $R/h = 4, 10, 100$.

- Mô-đun đàn hồi Young, hệ số Poisson và tỷ lệ thể tích của pha ceramic được xác định như sau [127]:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^\eta; \\ \nu(z) &= \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^\eta; \end{aligned} \quad (3.1)$$

với $E_m = 70GPa$, $E_c = 380GPa$, $\mu_m = \mu_c = 0.3$, $\eta = 0.5$

Bảng 3.1 So sánh kết quả chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM tại điểm giữa

		$\bar{v}$	$\bar{u}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\tau}_{\theta\xi}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{\tau}_{\theta z}$	$\bar{\tau}_{\xi z}$
(ξ, θ)		$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
$R/h = 4$										
3D [127]	$z = -h/2$	201.99	66.732	334.97	6.2079	-3.0504	7.0941	0.0000	0.0000	0.0000
	$z = 0$	184.09	4.0633	330.64	26.308	7.6328	17.904	0.4019	2.1460	7.5923
	$z = h/2$	166.94	-57.655	322.91	40.593	32.897	16.885	1.0000	0.0000	0.0000
K3-2	$z = -h/2$	201.999	66.713	334.97	6.1713	-3.0645	7.0701	0.0000	0.0000	0.0001
	$z = 0$	184.10	4.0435	330.64	26.346	7.6526	17.926	0.4020	2.1443	7.5897
	$z = h/2$	166.96	-57.658	322.90	40.678	32.971	16.882	1.0000	0.0000	0.0000
K3-0	$z = -h/2$	192.024	70.7045	305.58	5.1723	-3.4908	6.8702	0.0000	0.0000	0.0001
	$z = 0$	176.834	13.5520	305.58	25.596	7.2514	17.8098	0.3756	2.6515	7.9530
	$z = h/2$	161.667	-43.801	305.58	44.136	34.6560	17.202	1.0000	0.0000	0.0000
$R/h = 10$										
3D [127]	$z = -h/2$	30.816	3.3195	53.786	2.9118	0.2626	2.3389	0.0000	0.0000	0.0000
	$z = 0$	29.627	-0.8588	53.333	10.684	3.8592	6.9727	0.3950	0.3640	1.2763
	$z = h/2$	28.463	-4.9995	52.786	15.018	8.8905	7.9926	1.0000	0.0000	0.0000
K3-2	$z = -h/2$	30.815	3.3189	53.783	2.9032	0.2612	2.3323	0.0000	0.0000	0.0000
	$z = 0$	29.626	-0.8592	53.330	10.698	3.8644	6.9810	0.3950	0.3640	1.2764
	$z = h/2$	28.461	-4.9995	52.783	15.028	8.8964	7.9981	1.0000	0.0000	0.0000
K3-0	$z = -h/2$	29.358	4.8658	48.856	2.7127	0.1807	2.3027	0.0000	0.0000	0.0000
	$z = 0$	28.343	1.0589	48.856	10.592	3.8130	6.9662	0.3826	0.4615	1.3443
	$z = h/2$	27.327	-2.7494	48.856	15.666	9.1841	8.0705	1.0000	0.0000	0.0000
$R/h = 100$										
3D [127]	$z = -h/2$	0.2906	-0.0127	0.5218	0.3069	0.1154	0.1999	0.0000	0.0000	0.0000
	$z = 0$	0.2894	-0.0168	0.5213	1.0473	0.4200	0.6683	0.3924	0.0036	0.0126
	$z = h/2$	0.2882	-0.0209	0.5207	1.3827	0.5884	0.8643	1.0000	0.0000	0.0000
K3-2	$z = -h/2$	0.2906	-0.0127	0.5218	0.3061	0.1151	0.1994	0.0000	0.0000	0.0000
	$z = 0$	0.2894	-0.0168	0.5212	1.0486	0.4205	0.6691	0.3924	0.0036	0.0126
	$z = h/2$	0.2882	-0.0209	0.5207	1.3837	0.5888	0.8649	1.0000	0.0000	0.0000
K3-0	$z = -h/2$	0.2769	0.0079	0.4747	0.3041	0.1143	0.1991	0.0000	0.0000	0.0000
	$z = 0$	0.2760	0.0042	0.4747	1.0477	0.4206	0.6690	0.3911	0.0046	0.0132
	$z = h/2$	0.2750	0.0005	0.4747	1.3902	0.5914	0.8658	1.0000	0.0000	0.0000

Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên được tính như sau:

$$\begin{aligned}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= \frac{10^4 E_m}{h Q_0 (R/h)^4} (u, v, w), \\(\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\tau}_{\xi\theta}) &= \frac{10^2}{Q_0 (R/h)^2} (\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \tau_{\xi\theta}), \\(\bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\tau}_{\theta z}) &= \frac{10^2}{Q_0 (R/h)} (\tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}), \quad \bar{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_z}{Q_0}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Kết quả so sánh giữa mô hình tính toán của luận án và kết quả chính xác dựa trên lý thuyết đàn hồi 3 chiều của Brischetto [127] được cho ở Bảng 3.1. Phân tích kết quả ở Bảng 3.1 ta có thể rút ra một số nhận xét về sai số tính toán sử dụng mô hình $K3-2$ và $K3-0$ khi so sánh với kết quả sử dụng lý thuyết đàn hồi 3D như sau:

- Sai số của kết quả dựa trên mô hình $K3-2$ khi so sánh với kết quả dựa trên lý thuyết đàn hồi 3D nhỏ hơn 0.59% cho cả trường hợp vỏ mỏng ($R/h = 100$) và vỏ dày ($R/h = 4; 10$).

- Sai số của kết quả ứng suất dựa trên mô hình $K3-0$ khi so sánh với kết quả dựa trên lý thuyết đàn hồi 3D là tương đối lớn trong trường hợp vỏ dày và sai số nhỏ trong trường hợp vỏ mỏng. Ví dụ, đối với trường hợp $R/h=4$ – sai số lớn nhất của ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ là 16.68%, $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ là 14.44%; đối với trường hợp $R/h=10$ sai số lớn nhất của ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ là 6.84%, $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ là 31.19%; đối với trường hợp $R/h=100$ (vỏ mỏng) – sai số lớn nhất của ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ là 0.91%, $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ là 0.95%. Tuy nhiên sai số lớn nhất của chuyển vị trong tất cả trường hợp (vỏ mỏng và vỏ dày) đều tương đối lớn.

Kết quả so sánh trên đây đã cho thấy hiệu quả và sự cần thiết của việc sử dụng mô hình chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng

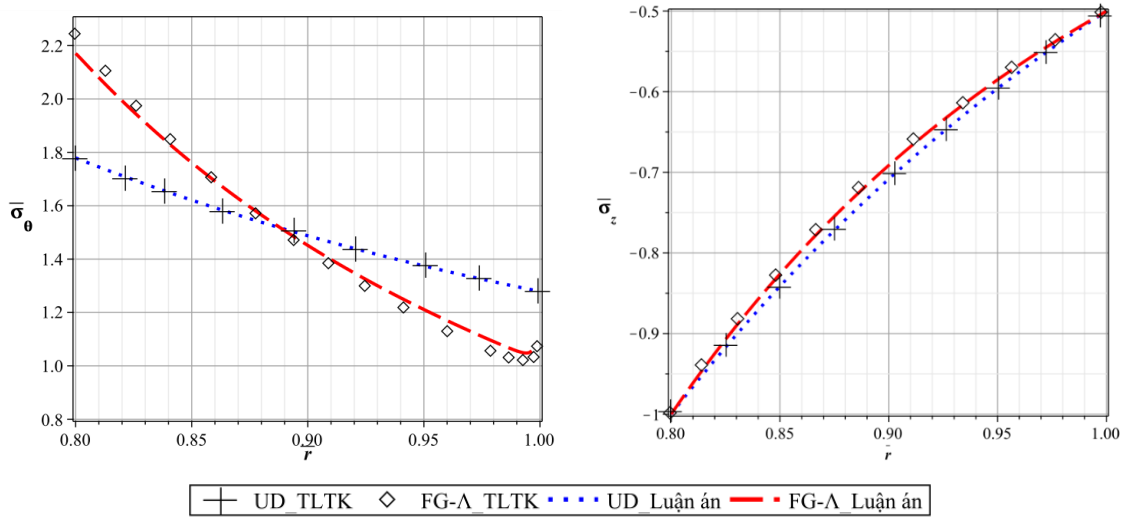
suất pháp tuyến ngang (K3-2) khi khảo sát cho vỏ dày. Do vậy, trong các tính toán sau luận án thực hiện sử dụng mô hình K3-2 để thực hiện các khảo sát đối với vỏ trụ FG-CNTRC.

3.2.2. Ví dụ 2

Trong ví dụ này, thực hiện khảo sát đối với vỏ trụ FG-CNTRC và so sánh với kết quả của Moradi-Dastjerdi và cộng sự [128] sử dụng hàm dạng bình phương tối thiểu động (Moving least squares-MLS shape functions) để xấp xỉ cho trường chuyển vị. Xét vỏ trụ FG-CNTRC chịu áp suất ở mặt trong P_{in} và áp suất ở mặt ngoài $P_{out} = 0.5P_{in}$ có các thông số đầu vào như sau [128]:

- Tỷ lệ bán kính trong và bán kính ngoài của vỏ trụ $r_{in}/r_{out} = 0.8$.
- Thông số vật liệu cốt (10,10) SWCNT và vật liệu nền:
 $E_{11}^{CNT} = 5.6466TPa$, $E_{22}^{CNT} = 7.0800TPa$, $G_{12}^{CNT} = 1.9445TPa$, $\nu_{12}^{CNT} = 0.175$
 $\rho_{CNT} = 1400kg/m^3$, $E_m = 2.5GPa$, $\rho_m = 1150kg/m^3$, $\nu_m = 0.34$. Hệ số hiệu dụng của CNT phụ thuộc vào tỷ lệ thể tích CNT như sau: $V_{CNT}^* = 0.17$;
 $\eta_1 = 0.142$; $\eta_2 = 1.626$; $\eta_3 = \eta_2$.

So sánh kết quả ứng suất vòng và ứng suất pháp tuyến không thứ nguyên của luận án với kết quả của Moradi-Dastjerdi và cộng sự [128] được thể hiện ở Hình 3.2. Dựa trên đồ thị ta thấy, kết quả tính toán luận án trùng hợp với kết quả đã được công bố [128]. Sai số tương đối của ứng suất vòng trong luận án so với của Moradi-Dastjerdi và cộng sự [128] là rất nhỏ, giá trị sai số lớn nhất là 3%.



Hình 3.2 So sánh kết quả ứng suất vòng và ứng suất pháp tuyến không thứ nguyên, $(\bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z) = (\sigma_\theta, \sigma_z)/P_{in}$

Dựa trên những ví dụ kiểm chứng trên có thể thấy rằng:

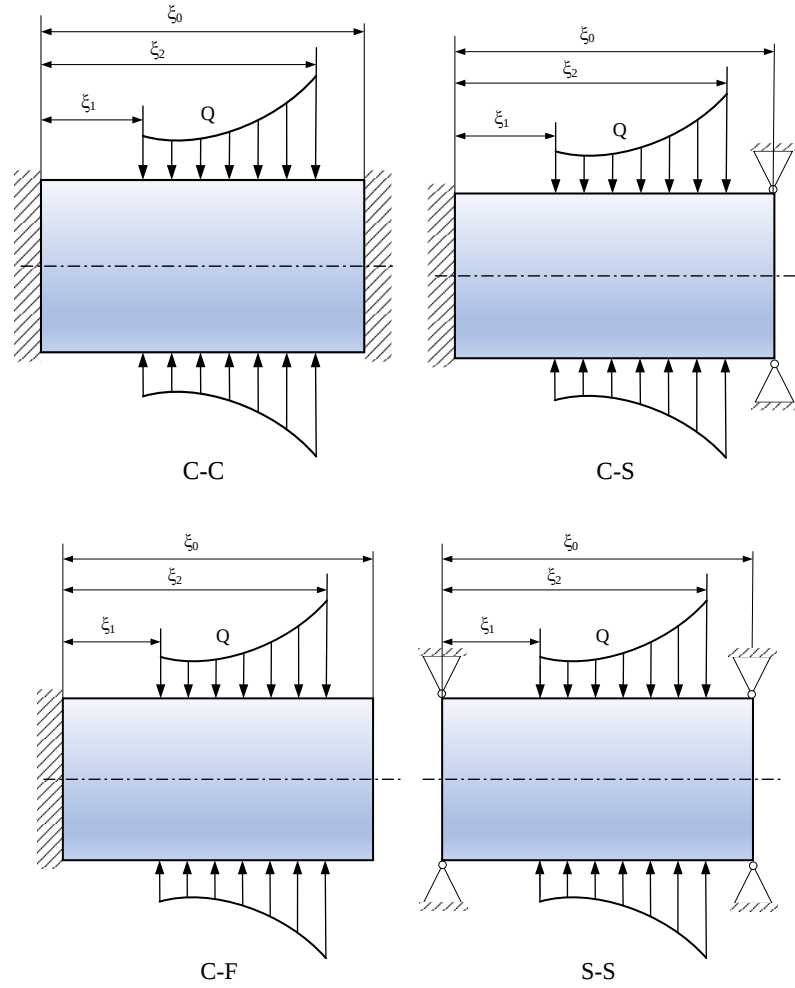
- Mô hình tính toán, phương pháp giải và chương trình tính toán đảm bảo độ tin cậy. Kết quả tính toán trùng hợp với các kết quả đã được công bố.
- Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D cho kết quả đảm bảo độ chính xác so với lý thuyết đàn hồi 3D. Khi vỏ dày cần phải kể đến ảnh hưởng của ứng suất pháp tuyến ngang.

3.3. Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên

Xét vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng áp suất phân bố đều $Q_0 = 1 \text{ MPa}$ tác dụng lên toàn bộ bề mặt ngoài của vỏ. Thông số hình học của vỏ ở các trường hợp khác nhau có các giá trị như sau: bán kính $R = 0.5 \text{ m}$; tỷ lệ chiều dài với bán kính (sau đây gọi là chiều dài tương đối) $L/R = 1, 4$; tỷ lệ bán kính với độ dày $R/h = 10, 50$. Khảo sát các điều kiện biên của vỏ trụ kín là: S-S, C-S, C-F, C-C.

Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên được xác định như sau:

$$\bar{w} = w/h; (\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi\theta}, \bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\tau}_{\theta z}) = (\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{\theta z})/Q_0 \quad (3.3)$$



Hình 3.3 Mô hình vỏ trụ FG-CNTRC với các điều kiện biên khác nhau

Ảnh hưởng của điều kiện biên đến chuyển vị pháp tuyến không thứ nguyên và ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi z}$ được thể hiện ở Bảng 3.2 cho vỏ trụ FG-V. Trong bảng này, kết quả tính toán được lựa chọn tại vị trí biên $\xi = L/R$ và vị trí giữa $\xi = L/2R$.

Để cụ thể hơn về ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng suất, thực hiện khảo sát các vỏ trụ với các giá trị chiều dài và độ dày tương đối khác nhau. Đồ thị biểu diễn sự thay đổi của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày cho vỏ dày FG- Λ với chiều dài tương đối trung bình ($L/R=4$) và tỷ lệ độ dày $R/h=10$, của vỏ dày FG-V với chiều dài tương đối ngắn ($L/R=1$) và tỷ lệ độ dày $R/h=10$, được biểu diễn tương ứng ở Hình 3.4 và Hình 3.5

Bảng 3.2 Ảnh hưởng của điều kiện biên đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ

FG-V có $V_{CNT}^* = 0.17$

	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\tau}_{\xi z}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\tau}_{\xi z}$	$\bar{\sigma}_{zz}$
Vị trí	Vị trí giữa vỏ $(\xi, \theta) = \left(\frac{L}{2R}, 0\right)$					Vị trí biên phải vỏ $(\xi, \theta) = \left(\frac{L}{R}, 0\right)$			
z	0	$\pm h/2$	$\pm h/2$	$\pm 3h/8$	$\pm h/4$	$\pm h/2$	$\pm h/2$	$\pm 3h/8$	$\pm h/4$
$L/R = 4, R/h = 10$									
C-C	0.02133	3.2484	12.5413	0.0000	0.7389	-147.7460	-0.8740	-7.6132	-1.8132
		9.4578	16.0972	0.0000	0.2542	9.9263	7.8428	-3.6286	2.2118
C-S	0.02134	-3.3554	12.5135	-0.0249	0.7390	0.0000	0.0000	-3.5286	-0.4828
		9.4167	16.0752	-0.0047	0.2539	0.0000	0.0000	-0.6619	0.3287
C-F	0.02114	-2.7806	12.4024	-0.0408	0.7391	3.7664	11.7857	0.0722	0.7298
		9.3065	15.9102	-0.0057	0.2519	8.4444	15.0166	-0.0646	1.0834
S-S	0.02129	-4.4752	12.4783	0.0000	0.7392	0.0000	0.0000	-3.5292	-0.4828
		9.4286	16.0611	0.0000	0.2538	0.0000	0.0000	-0.6620	0.3287
$L/R = 1, R/h = 50$									
C-C	0.49514	204.2561	61.4482	0.0000	0.7107	-846.1796	-4.9785	-21.4702	-8.2256
		25.7113	67.1183	0.0000	0.2150	46.7019	36.9679	-12.7221	11.5044
C-S	0.53596	145.7058	66.0822	0.18847	0.7098	0.0000	0.0000	-7.2274	-0.4682
		40.0789	73.6363	0.0088	0.2306	0.0000	0.0000	-1.2184	0.3160
C-F	0.50348	84.3725	61.7779	-0.7143	0.7139	18.1998	59.3894	0.3890	0.5040
		39.1679	70.2019	-0.1450	0.2228	39.3071	70.0516	-0.3240	4.3797
S-S	0.57493	105.9344	70.5975	0.0000	0.7090	0.0000	0.0000	-7.0614	-0.4682
		44.5438	80.0578	0.0000	0.2460	0.0000	0.0000	-1.1927	0.3160
$L/R = 1, R/h = 10$									
C-C	0.00972	38.8810	5.9535	0.0000	0.7403	-118.6178	-0.7028	-7.4804	-1.5398
		2.6938	6.1421	0.0000	0.1331	8.4092	6.6381	-3.4053	1.7409
C-S	0.01175	53.8905	7.2301	0.6668	0.7369	0.0000	0.0000	-4.0113	-0.4828
		3.0876	7.3356	0.1045	0.1466	0.0000	0.0000	-0.7698	0.3287
C-F	0.01480	4.4126	8.7308	0.4319	0.7413	4.3937	13.6342	0.1012	0.5884
		6.0734	10.7915	0.0148	0.1900	9.8507	17.4677	-0.0906	1.3315
S-S	0.01426	75.0431	8.8147	0.0000	0.7328	0.0000	0.0000	-4.3108	-0.4828
		3.6116	8.8310	0.0000	0.1636	0.0000	0.0000	-0.8065	0.3287

Từ Bảng 3.2 và Hình 3.4, Hình 3.5 có thể nhận xét như sau:

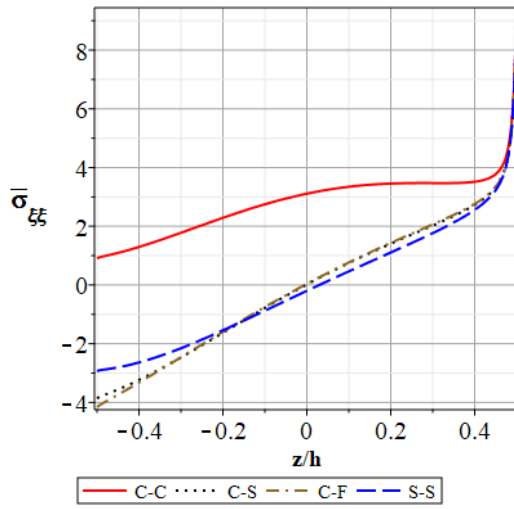
- Điều kiện biên có ảnh hưởng lớn đến trạng thái chuyển vị và ứng suất trong vỏ trụ FG-CNTRC, đặc biệt trong trường hợp vỏ dày và ngắn thì giá trị chuyển vị và ứng suất của các điều kiện biên khác nhau chênh lệch càng nhiều.

Trong các ví dụ đang xét ở Bảng 3.2 độ võng tại điểm giữa ($\xi = L/2R$) với các điều kiện biên C-C, C-S, C-F so với trường hợp S-S lần lượt là: 100.19%, 100.23%, 100.70% (khi vỏ dài trung bình $L/R=4$ và dày $R/h=10$); 86.12%, 93.22%, 87.57% (khi vỏ ngắn $L/R=1$ và mỏng $R/h=50$); 68,16%, 82.40%, 103.79% (khi vỏ ngắn $L/R=1$ và dày $R/h=10$). Ta thấy độ võng điểm giữa của trường hợp biên C-C khác biệt so với các trường hợp còn lại khi vỏ ngắn, sự khác biệt này càng tăng lên nếu vỏ vừa ngắn vừa dày.

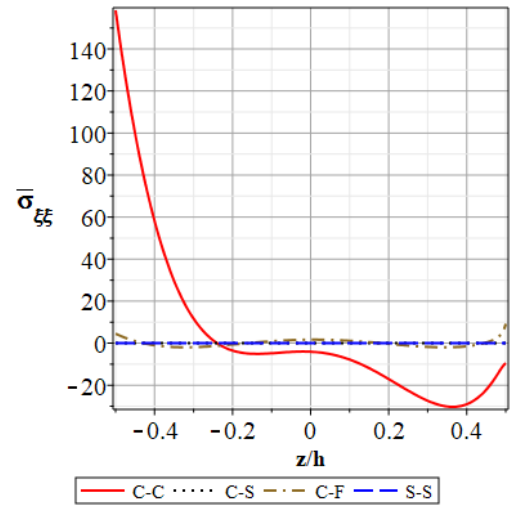
Cũng từ Bảng 3.2 ta thấy sự ảnh hưởng của điều kiện biên đến giá trị ứng suất tại điểm giữa tăng dần thứ tự theo các trường hợp sau: vỏ dài trung bình $L/R=4$ và dày $R/h=10$; vỏ ngắn $L/R=1$ và mỏng $R/h=50$; vỏ ngắn $L/R=1$ và dày $R/h=10$. Ví dụ từ giá trị ứng suất dọc trục $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ở vị trí $(\xi, \theta) = (L/2R, 0)$ có thể nhận thấy được mức độ ảnh hưởng của điều kiện biên trong các trường hợp vỏ có thông số hình học khác nhau. Điều này có thể thấy rõ hơn thông qua các đồ thị ứng suất điểm giữa của vỏ dài trung bình $L/R=4$ và dày $R/h=10$ (đồ thị a, c, e, g Hình 3.4) thì ảnh hưởng của điều kiện biên nhỏ hơn nhiều khi so với vỏ ngắn $L/R=1$ và dày $R/h=10$ (đồ thị a, c, e, g Hình 3.5)

- Tại vị trí biên ($\xi = L/R$), do ảnh hưởng của hiệu ứng biên, giá trị ứng suất tăng đột ngột khi so sánh với giá trị ứng suất ở vị trí giữa. Ví dụ ở Hình 3.4 đối với vỏ C-C FG- Λ có $L/R=4$ và $R/h=10$, giá trị lớn nhất của $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại vị trí biên $\xi = L/R$ là 157.8 so với giá trị lớn nhất tại điểm giữa là $\xi = L/2R$ là 9.3. Tương tự với $\bar{\tau}_{\xi z}$ là 7.4 so với 0; với $\bar{\sigma}_{zz}$ là 3.1 so với 1.

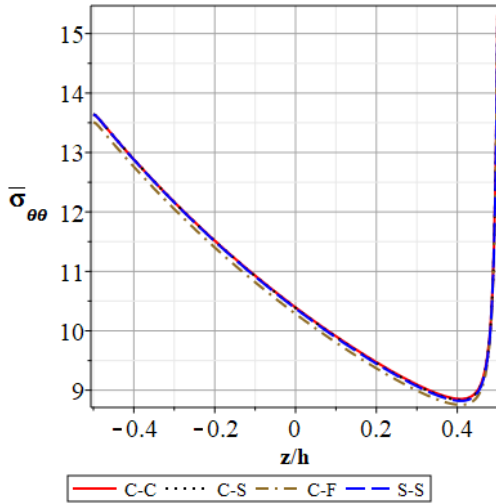
- Giá trị ứng suất ở vị trí biên ($\xi = L/R$) phụ thuộc vào điều kiện biên. Trong các trường hợp khảo sát, ứng suất tại vị trí biên ngầm là lớn nhất. Ví dụ ở Hình 3.5 đối với vỏ FG-V có $L/R=1$ và $R/h=10$ thì giá trị lớn nhất của $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại vị trí biên $\xi = L/R$ của vỏ có biên C-C, C-S, C-F, S-S lần lượt là -118.7, 3.6, -0.4, -0.4. Tương tự với $\bar{\tau}_{\xi z}$ lần lượt là -7.50, -4.60, -0.20, -5.12, với $\bar{\sigma}_{zz}$ lần lượt là 1.98, 1.00, 1.68, 1.00.



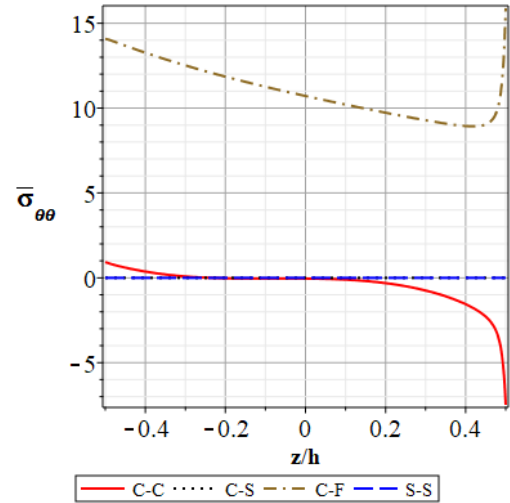
3.4.a) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$



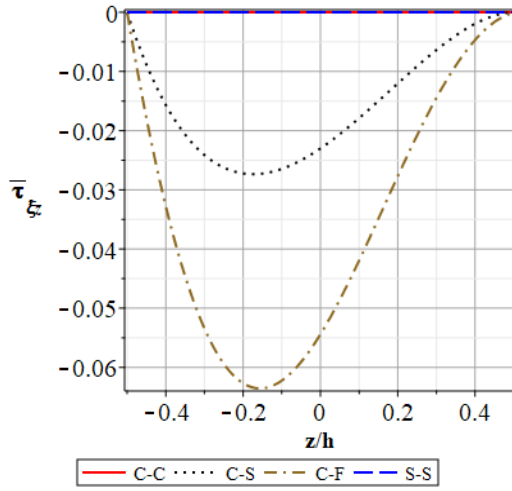
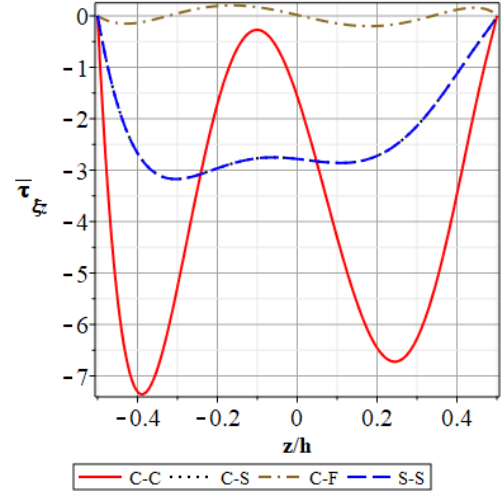
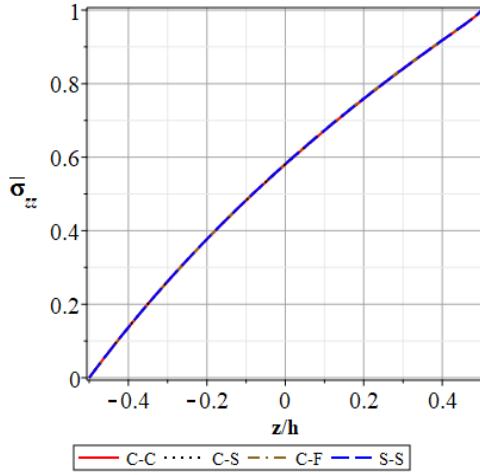
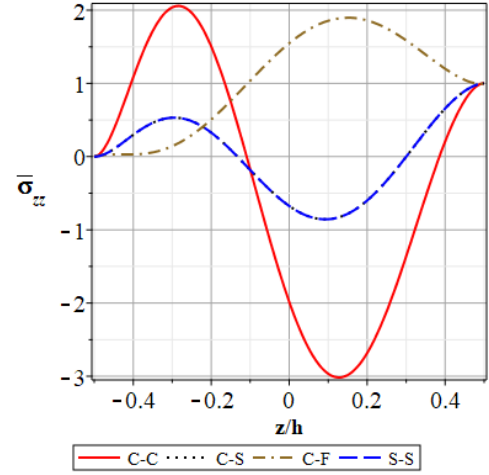
3.4.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/R$



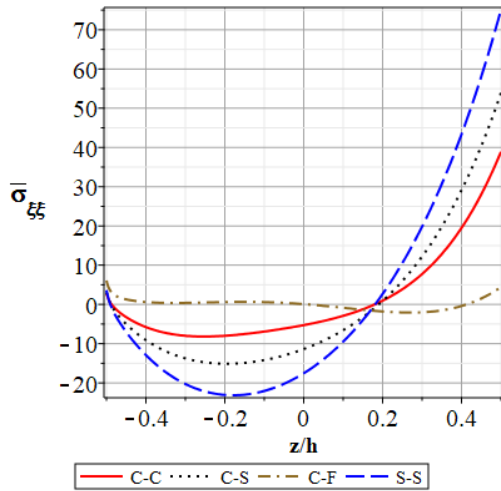
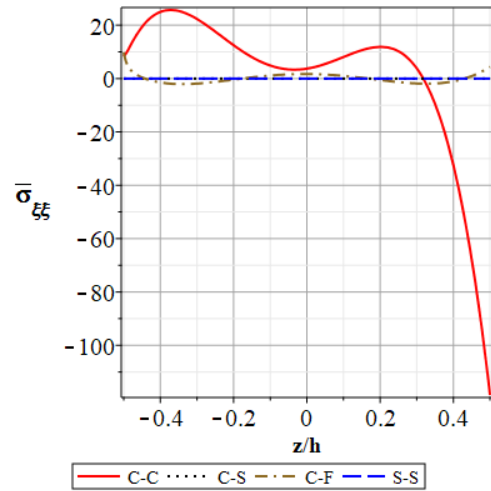
3.4.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$

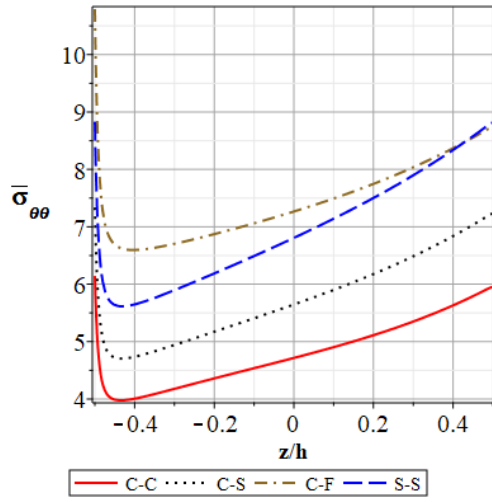
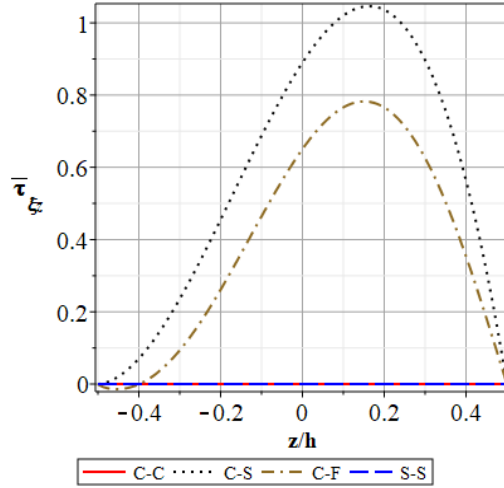
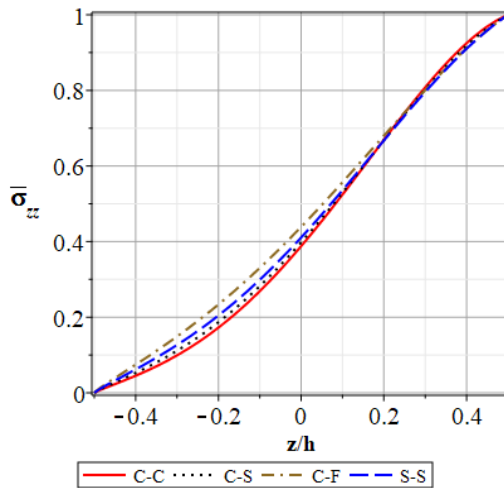
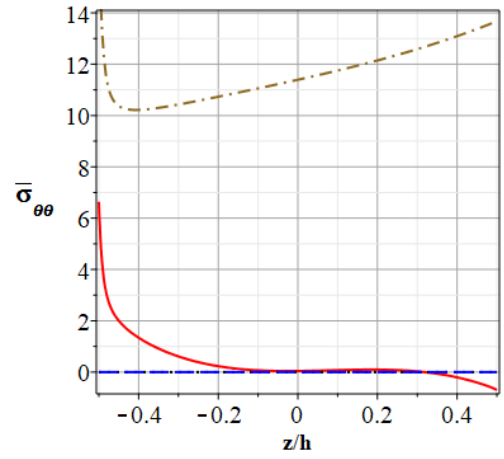
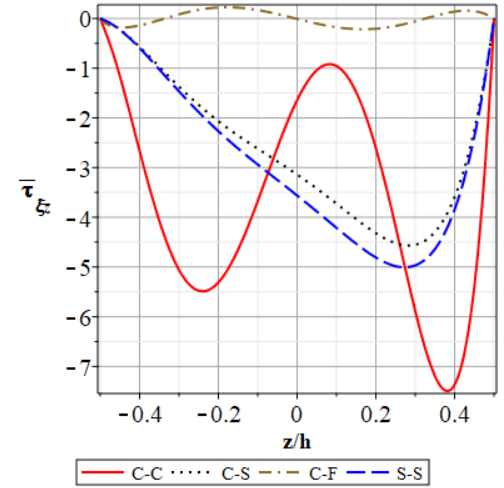
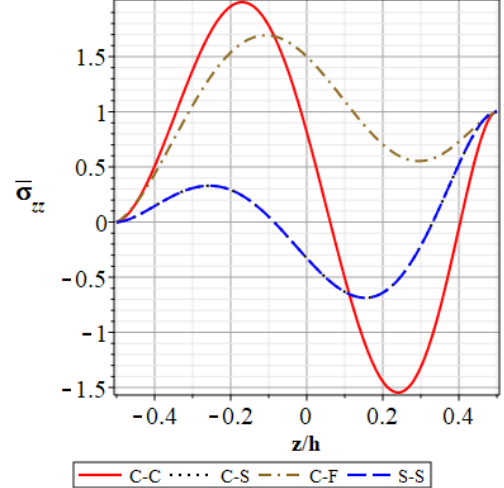


3.4.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/R$

3.4.e) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$ 3.4.f) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/R$ 3.4.g) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$ 3.4.h) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/R$

Hình 3.4 Ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng suất của vỏ trụ FG- Λ có $V_{CNT}^* = 0.17$, $L/R = 4$, $R/h = 10$

3.5.a) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$ 3.5.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/R$

3.5.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$ 3.5.e) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$ 3.5.g) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$ 3.5.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/R$ 3.5.f) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/R$ 3.5.h) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/R$

Hình 3.5 Ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng suất của vỏ trụ FG-V có

$$V_{CNT}^* = 0.17, L/R = 1, R/h = 10$$

3.4. Khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng biên

Kết quả ở phần khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên đã chỉ ra sự xuất hiện của hiện tượng gia tăng đột ngột giá trị ứng suất ở vị trí biên ngàm do ảnh hưởng của hiệu ứng biên. Do đó trong phần này, luận án sẽ khảo sát cụ thể hơn ảnh hưởng của hiệu ứng biên tại vị trí biên ngàm.

Thực hiện khảo sát vỏ trụ FG-CNTRC có các điều kiện biên khác nhau chịu tác dụng của tải trọng áp suất phân bố đều $Q_0=1MPa$ tác dụng lên toàn bộ mặt ngoài vỏ. Vỏ có các thông số hình học khác nhau như sau: bán kính $R=0.5m$; chiều dài tương đối $L/R=0.5$; tỷ lệ độ dày $R/h=10, 20, 50$. Ba kiểu điều kiện biên khác nhau được khảo sát bao gồm: C-C, C-S và C-F.

Ảnh hưởng của hiệu ứng biên đến ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi z}$ tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG- Λ được thể hiện tương ứng ở trong Bảng 3.3. Trong các bảng này, các thành phần ứng suất được khảo sát tại vị trí cách cạnh biên ngàm một khoảng $x=0, x=h/2$ và $x=h$.

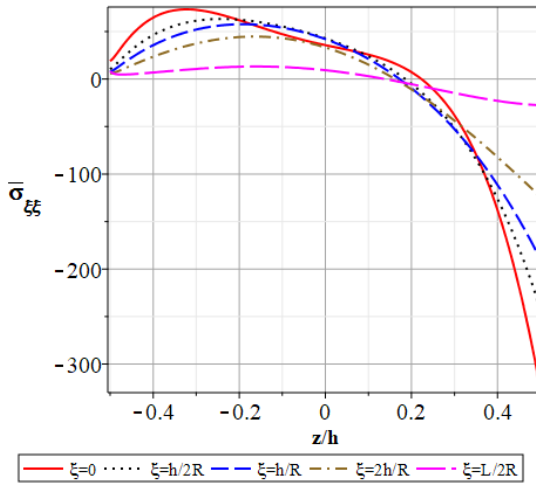
Để thêm chi tiết về ảnh hưởng của hiệu ứng biên, Hình 3.6 biểu diễn các ứng suất của vỏ trụ độ dày trung bình FG-V với chiều dài tương đối ngắn $L/R=0.5$, tỷ lệ độ dày $R/h=20$, điều kiện biên C-F. Các ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi z}$ theo độ dày được khảo sát tại các vị trí cách cạnh biên ngàm lần lượt một khoảng $x=0, x=h/2, x=h, x=2h$ và $x=L/2$.

Từ kết quả thể hiện trên các Bảng và đồ thị có thể nhận xét như sau:

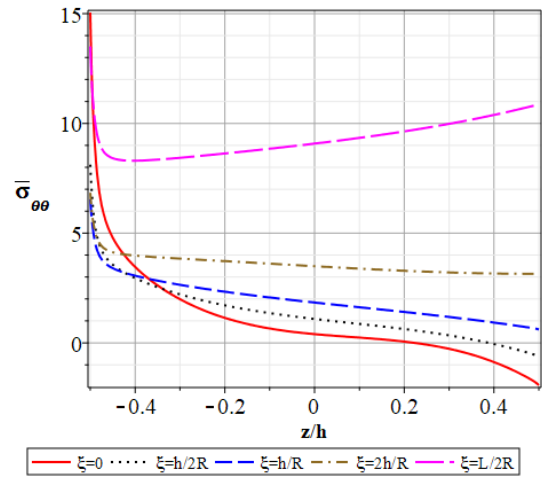
- Đối với vỏ trụ ngắn (trường hợp đang xét là $L/R=0.5$), điều kiện biên tại đầu biên này có ảnh hưởng lớn đến ứng suất ở đầu biên còn lại. Ứng suất ở khu vực biên trái ($\xi=0$) của vỏ trụ với biên C-C và C-S có giá trị tương đương nhau. Trong khi đó, giá trị của ứng suất ở khu vực biên trái ($\xi=0$) của vỏ có điều kiện biên C-F là lớn nhất. Trong trường hợp $R/h=10, 20$ thì giá trị lớn nhất

của ứng suất tại biên trái ($\xi = 0$) của vỏ trụ với biên C-F lớn hơn 200% so với các giá trị ứng suất của vỏ trụ với biên C-C và C-S. Và trong trường hợp $R/h=50$, ứng suất này xấp xỉ 120% ứng suất của trường hợp biên C-C và C-S.

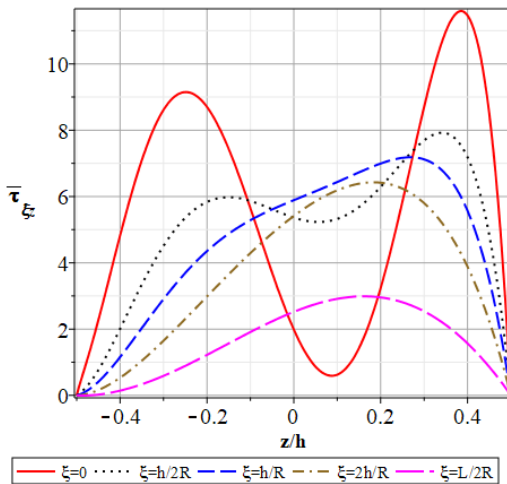
- Do ảnh hưởng của các hiệu ứng biên, tại khu vực biên ngàm xảy ra hiện tượng gia tăng đột ngột giá trị của các thành phần ứng suất. Như được thể hiện ở Hình 3.6 kích thước khu vực tác dụng của hiệu ứng biên là nhỏ và xấp xỉ khoảng 2 lần độ dày của vỏ. Hiện tượng này giảm nhanh chóng khi cách xa cạnh biên khoảng $2h$.



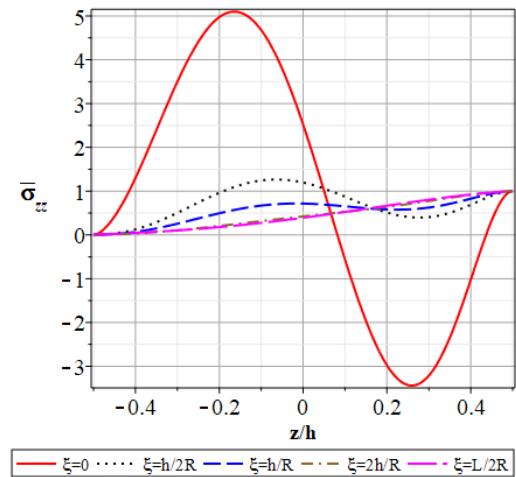
3.6.a) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$



3.6.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$



3.6.c) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$



3.6.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$

Hình 3.6 Ứng suất không thứ nguyên tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG-V với

$$V_{CNT}^* = 0.17, L/R = 0.5, R/h = 20 \text{ và điều kiện biên C-F}$$

Bảng 3.3 Ứng suất tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG- Λ có $V_{CNT}^* = 0.17$

	(ξ, θ)	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\tau}_{z\xi}$	$\bar{\tau}_{z\xi}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{\sigma}_{zz}$
z		$-h/2$	$h/2$	$-h/2$	$h/2$	$-3h/8$	$3h/8$	$-h/4$	$h/4$
$L/R = 0.5, R/h = 10$									
C-C	$(0, 0)$	53.8087	-4.0932	0.3196	-3.2270	4.4149	2.7354	1.0118	-0.9190
	$(h/2R, 0)$	19.0348	0.3008	0.6701	0.9055	2.9315	1.1124	0.4084	0.6661
	$(h/R, 0)$	-0.6700	1.9591	1.0556	2.4841	2.7354	0.5844	0.3492	0.8265
C-S	$(0, 0)$	53.8162	-4.4344	0.3205	-3.4943	4.9041	2.9448	1.0190	-0.9167
	$(h/2R, 0)$	14.9977	0.2540	0.7164	0.8875	3.3287	1.2460	0.4245	0.6349
	$(h/R, 0)$	-7.4763	2.1163	1.1528	2.6609	2.3220	0.6726	0.3554	0.8198
C-F	$(0, 0)$	140.1323	-8.7968	0.8273	-6.9480	6.6913	4.0776	1.8193	-2.0095
	$(h/2R, 0)$	88.0275	-2.1242	1.4307	-0.6123	4.5816	1.6809	0.4880	0.5404
	$(h/R, 0)$	57.0220	0.5049	2.2442	1.9963	3.4319	0.9521	0.3971	0.7712
$L/R = 0.5, R/h = 20$									
C-C	$(0, 0)$	158.0281	-10.6176	0.9348	-8.3798	8.6731	4.9553	1.9511	-2.1287
	$(h/2R, 0)$	89.6703	-2.9536	1.1088	-1.5070	6.1845	2.2248	0.5403	0.4148
	$(h/R, 0)$	47.3570	0.2159	1.4898	1.3265	4.8404	1.3093	0.4134	0.7188
C-S	$(0, 0)$	184.0132	-12.5120	1.0889	-9.8751	10.0278	5.6475	2.1982	-2.4539
	$(h/2R, 0)$	104.8776	-3.8041	1.2970	-2.0892	7.2265	2.5813	0.5861	0.3346
	$(h/R, 0)$	55.3621	-0.1175	1.7527	1.2123	5.7622	1.5412	0.4369	0.6830
C-F	$(0, 0)$	330.8638	-18.9319	1.9484	-14.9698	11.1375	6.7919	3.5440	-4.4233
	$(h/2R, 0)$	244.9120	-7.9766	2.2152	-4.8672	7.8190	2.8015	0.6112	0.2876
	$(h/R, 0)$	191.3295	-3.8762	2.8787	-1.1027	6.2788	1.6814	0.4641	0.6751
$L/R = 0.5, R/h = 50$									
C-C	$(0, 0)$	651.5296	-36.7059	3.8353	-29.0262	20.3312	11.9985	6.4268	-8.3027
	$(h/2R, 0)$	494.6304	-17.8744	3.4518	-12.2139	14.6498	5.1342	0.8770	-0.2602
	$(h/R, 0)$	393.5441	-10.8912	3.6123	-6.3485	12.3309	3.1893	0.6005	0.4425
C-S	$(0, 0)$	778.2040	-43.4151	4.5799	-34.3418	22.5892	13.5776	7.6090	-10.0666
	$(h/2R, 0)$	604.5930	-21.8964	4.1605	-14.9973	16.2279	5.6828	0.9370	-0.3889
	$(h/R, 0)$	492.5536	-14.1436	4.3717	-8.4649	13.7280	3.5423	0.6383	0.3930
C-F	$(0, 0)$	812.7130	-43.3501	4.7777	-34.3104	20.0258	12.6938	7.9233	-10.6746
	$(h/2R, 0)$	660.8034	-22.7482	4.4152	-15.4691	14.0851	4.9611	0.8375	-0.2300
	$(h/R, 0)$	563.587	-15.9382	4.6645	-9.6886	11.8365	3.0713	0.5959	0.4693

3.5. Khảo sát ảnh hưởng của thông số vật liệu đến hiệu ứng biên

3.5.1. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT

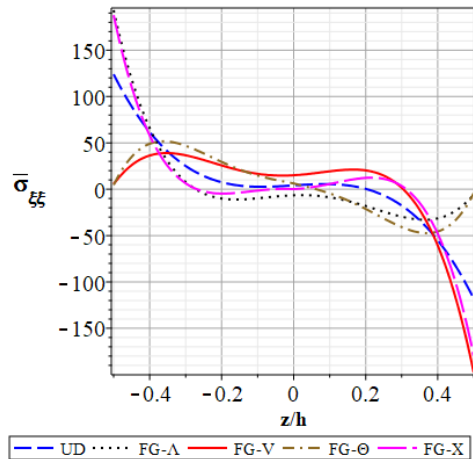
Trong phần này, thực hiện khảo sát ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đến ứng suất không thứ nguyên tại vùng biên ngàm. Xét vỏ trụ FG-CNTRC có biên ngàm hai đầu chịu tải trọng áp suất phân bố đều $Q_0=1MPa$ tác dụng lên toàn bộ mặt ngoài của vỏ. Các thông số hình học của vỏ như sau: bán kính $R=0.5m$; chiều dài tương đối $L/R=4$; tỷ lệ độ dày $R/h=10$, tỷ lệ thể tích $V_{CNT}^* = 0.28$.

Bảng 3.4 trình bày kết quả ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi z}$ tại cạnh biên ngàm của vỏ trụ C-C với các kiểu phân bố CNT khác nhau. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đến ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi z}$ dọc theo chiều dày tại vị trí biên trái $\xi = 0$ của vỏ trụ C-C với các kiểu phân bố CNT khác nhau được biểu diễn ở Hình 3.7.

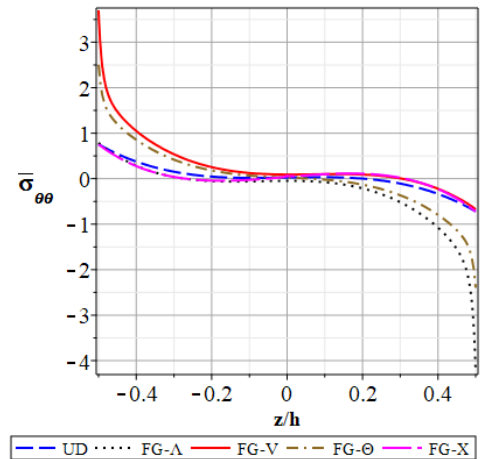
Từ các Bảng và đồ thị này có thể thấy rằng kiểu phân bố CNT ảnh hưởng lớn đến độ lớn và vị trí của giá trị ứng suất lớn nhất và giá trị ứng suất nhỏ nhất. Các ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tăng lên nhanh chóng ở mặt trong $z = -h/2$ và/hoặc ở mặt ngoài $z = h/2$. Ứng suất dọc trục $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ đạt giá trị lớn nhất ở bề mặt trong đối với trường hợp phân bố FG- Λ , và ở bề mặt ngoài đối với trường hợp phân bố FG-V. Ngược lại, ứng suất vòng $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ đạt giá trị lớn nhất ở bề mặt ngoài đối với trường hợp phân bố FG- Λ , và ở bề mặt trong đối với trường hợp phân bố FG-V. Trong Hình 3.7, ứng suất cắt $\bar{\tau}_{\xi z}$ trong trường hợp phân bố FG-V đạt giá trị lớn nhất tại vị trí $z/h \approx 0.38$. Ứng suất pháp tuyến ngang $\bar{\sigma}_{zz}$ trong trường hợp phân bố FG- Λ đạt giá trị lớn nhất tại vị trí $z/h \approx 0.1$

Bảng 3.4 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đối với ứng suất tại vùng biên ngàm của vỏ trụ biên C-C có $V_{CNT}^* = 0.28$, $L/R = 4$, $R/h = 10$

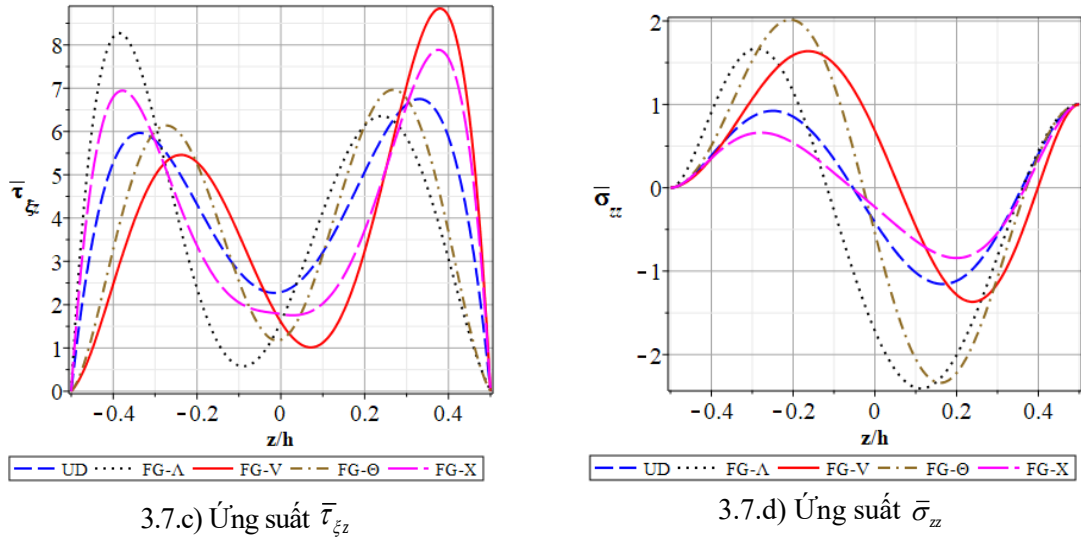
(ξ, θ)		$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\tau}_{\xi z}$	$\bar{\tau}_{\xi z}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{\sigma}_{zz}$
z		$-h/2$	$h/2$	$-h/2$	$h/2$	$-3h/8$	$3h/8$	$-h/4$	$h/4$
UD	(0,0)	123.9993	-118.1202	0.7549	-0.7191	5.7305	6.4101	0.9227	-0.9171
	($h/2R, 0$)	87.8891	-81.1747	1.3906	0.3326	4.3533	4.3570	0.4668	0.5260
	($h/R, 0$)	62.0312	-55.5655	2.0979	1.2724	3.3536	3.3337	0.3028	0.6468
FG- Λ	(0,0)	193.0039	-6.3261	0.7878	-4.2544	8.2295	3.9147	1.5657	-1.4735
	($h/2R, 0$)	126.8659	-1.7473	1.7928	0.3725	5.9819	1.8353	0.6099	0.5676
	($h/R, 0$)	84.4763	0.2638	2.9876	1.4806	4.5462	1.1180	0.4954	0.7646
FG-V	(0,0)	5.8219	-197.6633	3.7006	-0.6769	3.2322	8.8326	1.3846	-1.3609
	($h/2R, 0$)	3.5964	-130.1778	2.7569	0.7660	1.8287	6.0947	0.4444	0.4065
	($h/R, 0$)	2.6960	-86.0986	2.7440	2.1421	1.1272	4.6887	0.2844	0.5439
FG-O	(0,0)	4.6006	-4.3992	2.5055	-2.3952	4.2195	4.7225	1.9003	-1.7646
	($h/2R, 0$)	2.6977	-1.3612	1.9341	-0.1548	2.3516	2.3939	0.4905	0.5423
	($h/R, 0$)	2.0505	0.0000	2.1284	1.0683	1.5097	1.5600	0.3144	0.7316
FG-X	(0,0)	200.3043	-192.5759	0.6754	-0.6497	7.0579	8.0149	0.5938	-0.7326
	($h/2R, 0$)	139.5763	-129.4142	1.8074	0.8420	5.5276	5.5473	0.5638	0.3890
	($h/R, 0$)	96.4199	-86.3248	3.0311	2.2292	4.2407	4.1890	0.4648	0.5497



3.7.a) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$



3.7.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$



Hình 3.7 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đối với ứng suất tại vị trí biên trái $\xi = 0$ của vỏ trụ biên C-C có $V_{CNT}^* = 0.28$, $L/R = 4$, $R/h = 10$

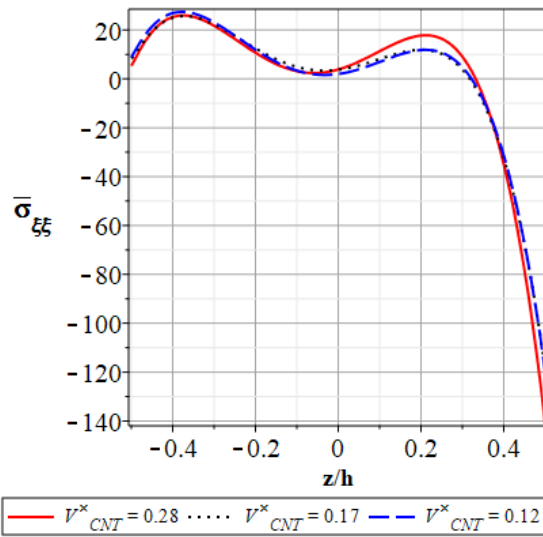
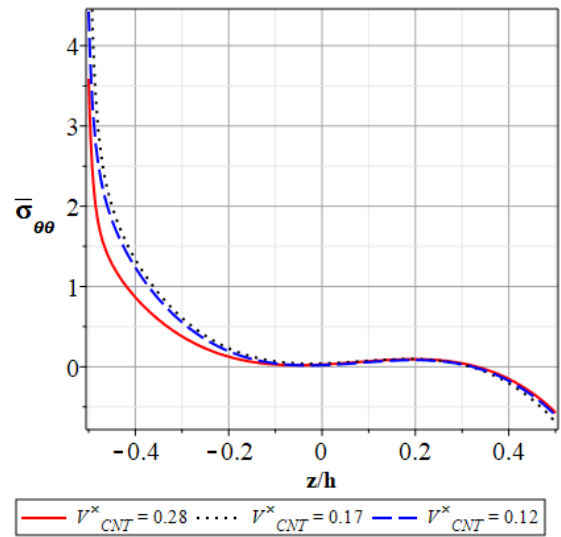
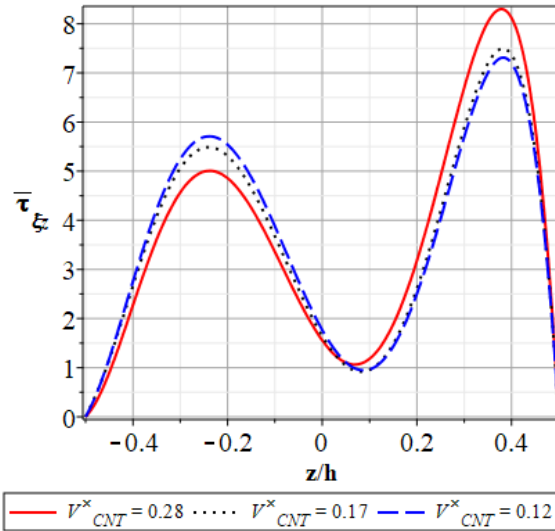
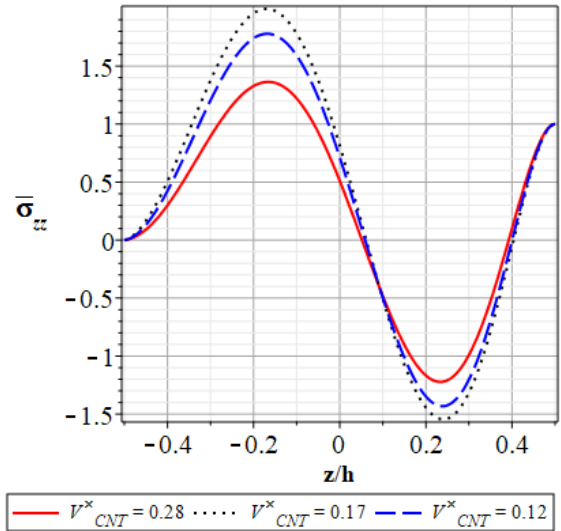
3.5.2. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT

Trong phần này, thực hiện khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT đến ứng suất không thứ nguyên tại vùng biên ngàm. Xét vỏ trụ FG-V chịu tải trọng áp suất phân bố đều $Q_0 = 1 \text{ MPa}$ tác dụng lên toàn bộ mặt ngoài của vỏ. Các thông số hình học của vỏ được cho như sau: bán kính $R = 0.5 \text{ m}$; chiều dài tương đối $L/R = 1$; tỷ lệ độ dày $R/h = 10$ và tỷ lệ thể tích CNT có các giá trị khác nhau $V_{CNT}^* = 0.28; 0.17; 0.12$.

Bảng 3.5 trình bày kết quả ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi z}$ tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG-V với các giá trị tỷ lệ thể tích khác nhau $V_{CNT}^* = 0.28; 0.17; 0.12$ và điều kiện biên khác nhau.

Sự biến thiên của ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi z}$ theo độ dày tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG-V với điều kiện biên C-C được biểu diễn ở Hình 3.8.

Có thể thấy rằng tỷ lệ thể tích CNT ảnh hưởng đến các thành phần ứng suất tại vị trí cạnh biên ngàm. Tại khu vực biên ngàm, khi tỷ lệ thể tích V_{CNT}^* tăng lên, giá trị lớn nhất của các ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$, $\bar{\tau}_{\xi z}$ cũng tăng lên, còn các ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$, $\bar{\sigma}_{zz}$ giảm xuống.

3.8.a) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ 3.8.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ 3.8.c) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ 3.8.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$

Hình 3.8 Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT đối với ứng suất tại vị trí biên trái $\xi = 0$ của vỏ trụ FG-V với $L/R = 1$, $R/h = 10$ và điều kiện biên C-C

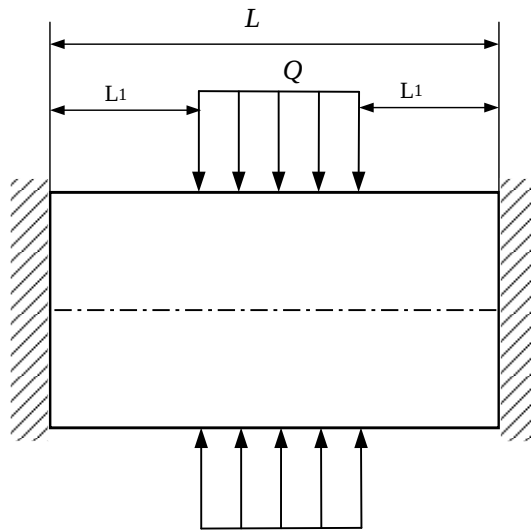
Bảng 3.5 Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT đối với ứng suất tại vùng biên ngàm của vỏ trụ FG-V có $L/R=1$, $R/h=10$

	(ξ, θ)	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\xi\xi}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\tau}_{\xi z}$	$\bar{\tau}_{\xi z}$	$\bar{\sigma}_{zz}$	$\bar{\sigma}_{zz}$
z		$-h/2$	$h/2$	$-h/2$	$h/2$	$-3h/8$	$3h/8$	$-h/4$	$h/4$
C-C									
$V_{CNT}^* = 0.28$	$(0,0)$	5.3379	-140.8557	3.5877	-0.5764	2.9689	8.2947	1.1615	-1.2087
	$(h/2R, 0)$	2.9641	-78.6095	2.4482	0.8010	1.6680	5.6076	0.4224	0.4124
	$(h/R, 0)$	1.9424	-38.9927	2.2647	2.0478	1.0033	4.2413	0.2589	0.5570
$V_{CNT}^* = 0.17$	$(0,0)$	8.4092	-118.6178	6.6381	-0.7028	3.4053	7.4804	1.7409	-1.5398
	$(h/2R, 0)$	4.1600	-64.3094	3.7669	0.5368	1.6919	4.8169	0.5005	0.5102
	$(h/R, 0)$	2.6169	-31.7520	3.2046	1.6233	0.9509	3.6640	0.2794	0.6373
$V_{CNT}^* = 0.12$	$(0,0)$	8.9153	-119.5817	4.4257	-0.6085	3.5242	7.2940	1.5393	-1.4246
	$(h/2R, 0)$	4.5009	-65.5290	2.8452	0.5192	1.8715	4.7579	0.5188	0.5400
	$(h/R, 0)$	2.5289	-32.5045	2.6201	1.5075	1.0781	3.6519	0.3025	0.6537
C-S									
$V_{CNT}^* = 0.28$	$(0,0)$	5.8659	-156.6587	3.9419	-0.6409	3.2547	9.0703	1.2211	-1.2782
	$(h/2R, 0)$	3.2776	-88.1158	2.7132	0.8787	1.8438	6.2263	0.4598	0.3786
	$(h/R, 0)$	2.1546	-44.0969	2.5224	2.2740	1.1205	4.7817	0.2795	0.5367
$V_{CNT}^* = 0.17$	$(0,0)$	9.3190	-134.4398	7.3557	-0.7960	3.7356	8.1640	1.8816	-1.6710
	$(h/2R, 0)$	4.6669	-74.7785	4.2234	0.5695	1.8647	5.3398	0.5451	0.4874
	$(h/R, 0)$	2.9787	-38.6386	3.6272	1.7869	1.0597	4.1320	0.3020	0.6257
$V_{CNT}^* = 0.12$	$(0,0)$	9.8486	-134.2512	4.8886	-0.6830	3.8676	7.9705	1.6446	-1.5309
	$(h/2R, 0)$	5.0108	-74.7460	3.1740	0.5607	2.0669	5.2876	0.5658	0.5192
	$(h/R, 0)$	2.8391	-38.0057	2.9424	1.6681	1.2031	4.1295	0.3274	0.6432
C-F									
$V_{CNT}^* = 0.28$	$(0,0)$	6.5393	-190.3067	4.4001	-0.7774	3.1627	8.4790	1.5454	-1.4926
	$(h/2R, 0)$	3.8964	-127.0501	3.0521	0.6573	1.6915	5.6960	0.4400	0.4138
	$(h/R, 0)$	2.9048	-86.8829	2.9434	2.0266	1.0125	4.3215	0.2721	0.5564
$V_{CNT}^* = 0.17$	$(0,0)$	9.7696	-154.3735	7.7193	-0.9116	3.5556	7.4911	2.2013	-1.8537
	$(h/2R, 0)$	5.1881	-100.5710	4.4927	0.3470	1.6681	4.7556	0.5093	0.5218
	$(h/R, 0)$	3.7302	-68.4763	4.0476	1.5044	0.9289	3.6181	0.2890	0.6440
$V_{CNT}^* = 0.12$	$(0,0)$	10.5675	-161.1854	5.2490	-0.8190	3.7081	7.3961	1.9935	-1.7474
	$(h/2R, 0)$	5.8859	-106.9284	3.4557	0.3389	1.8699	4.7642	0.5332	0.5484
	$(h/R, 0)$	3.9627	-73.9071	3.3238	1.4054	1.0697	3.6664	0.3149	0.6591

3.6. Khảo sát ảnh hưởng của tải trọng

3.6.1. Ảnh hưởng của mức độ tập trung tải trọng

Trong phần này thực hiện khảo sát ảnh hưởng của mức độ tập trung tải trọng đến chuyển vị và ứng suất của vỏ. Xét vỏ trụ FG-CNTRC biên ngàm hai đầu chịu tải trọng áp suất không đổi ở mặt ngoài trên các đoạn lần lượt L , $L/2$, $L/3$, $L/4$ với giá trị độ lớn lần lượt là Q_0 , $2Q_0$, $3Q_0$, $4Q_0$, trong đó $Q_0=1MPa$.

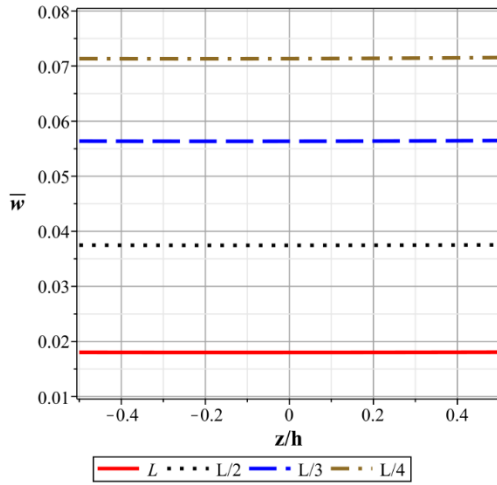


Hình 3.9 Sơ đồ khảo sát ảnh hưởng của mức độ phân bố tải trọng

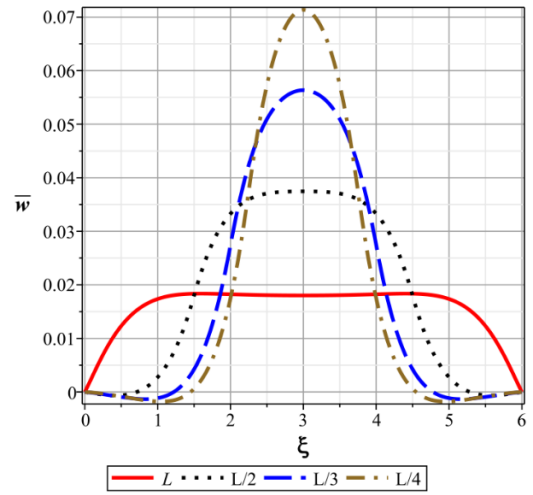
Hình 3.10 biểu diễn ảnh hưởng của mức độ tập trung tải trọng đối với chuyển vị, ứng suất của vỏ trụ C-C FG-V với các thông số $R=1m$; $L/R=6$; $R/h=10$, $V_{CNT}^*=0.28$. Dựa vào kết quả khảo sát ta có thể rút ra các nhận xét:

- Khi mức độ tập trung tải trọng càng tăng, độ võng của vỏ càng tăng. Độ võng của vỏ đạt giá trị nhỏ nhất trong trường hợp tải phân bố trên toàn bộ vỏ.

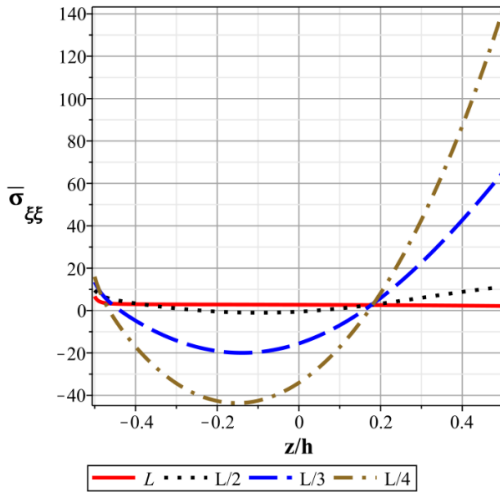
- Đối với các thành phần ứng suất, khi mức độ tập trung tải trọng tăng lên thì giá trị của ứng suất tại điểm giữa tăng lên, giá trị ứng suất tại các vị trí biên giảm xuống. Hay nói cách khác khi đó phần vật liệu ở các vị trí tập trung tải trọng (ở trường hợp đang xét là vị trí giữa) sẽ phải chịu lực nhiều hơn.



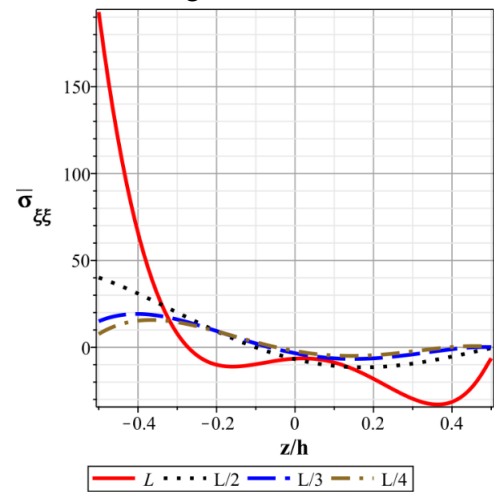
3.10.a) Độ võng $\bar{w}$ theo chiều dày tại vị trí giữa $\xi = L/2R$



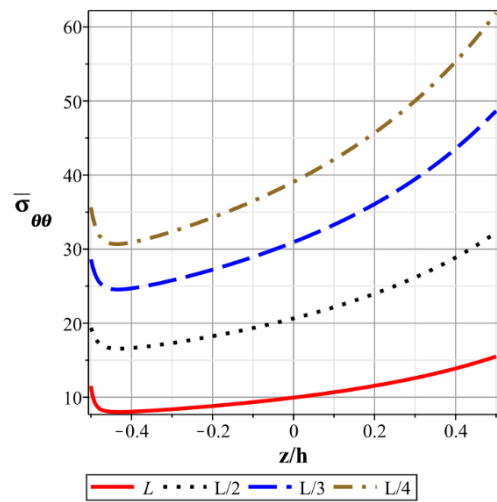
3.10.b) Độ võng $\bar{w}$ theo chiều dọc tại lớp giữa $z = 0$



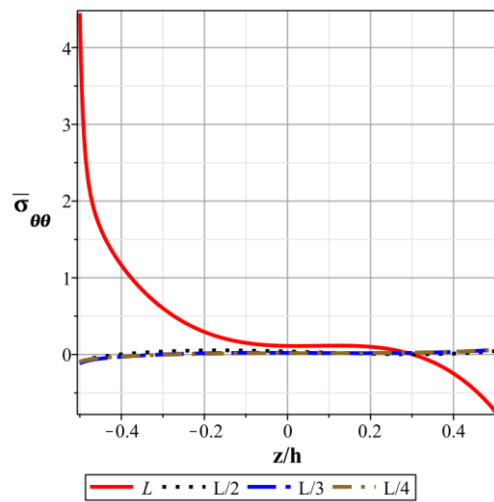
3.10.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại vị trí giữa $\xi = L/2R$



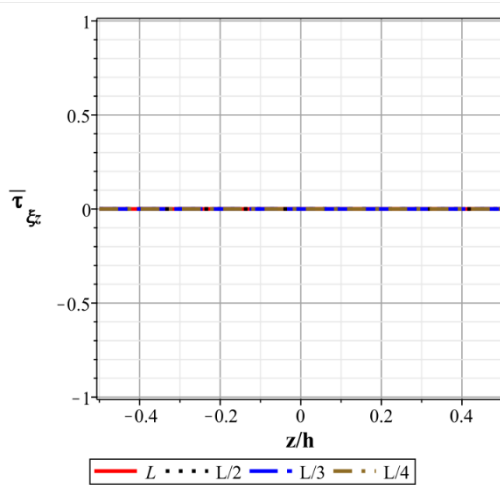
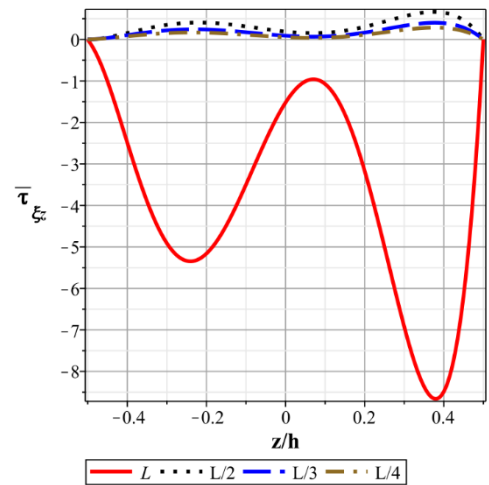
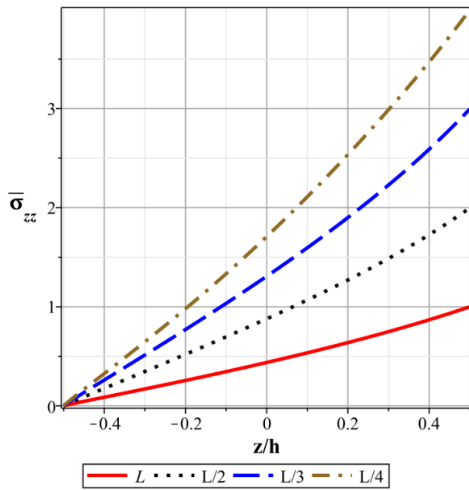
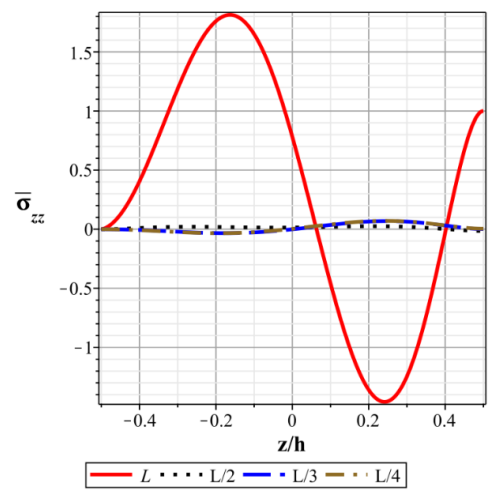
3.10.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/R$



3.10.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$



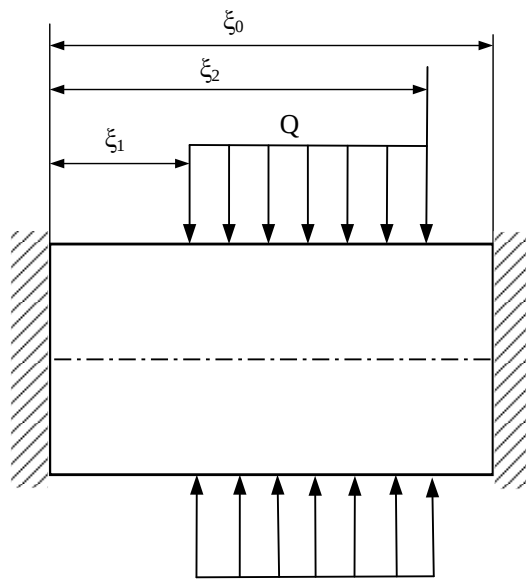
3.10.f) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/R$

3.10.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$ 3.10.h) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/R$ 3.10.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$ 3.10.k) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/R$

Hình 3.10 Ảnh hưởng của mức độ tập trung tải trọng đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ C-C FG-V, với $L/R=6$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$

3.6.2. Ảnh hưởng của vị trí tải trọng

Trong phần này thực hiện khảo sát ảnh hưởng của vị trí tải trọng đến chuyển vị và ứng suất của vỏ. Xét vỏ trụ FG-V có biên C-C với các thông số như sau: $R=1m$; $L/R=4$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$. Tải trọng áp suất không đổi phân bố ở mặt ngoài vỏ trụ trên đoạn $(\xi_2 - \xi_1) = \xi_0/4$ với giá trị $Q_0=1MPa$, vị trí đặt tải trọng lần lượt từ vị trí chính giữa đến vị trí sát biên phải vỏ $\xi_1 = 3/8$; $4/8$; $5/8$; $6/8$;



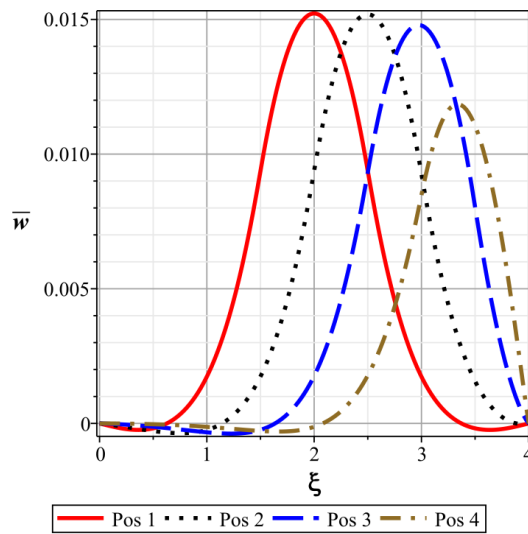
Hình 3.11 Sơ đồ khảo sát ảnh hưởng vị trí tải trọng

Kết quả khảo sát ảnh hưởng của vị trí tải trọng đến chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FG-V đang xét được biểu diễn ở Hình 3.12. Trong đó các ký hiệu Pos 1, Pos 2, Pos 3, Pos 4 tương ứng với các trường hợp vị trí đặt tải $\xi_1 = 3/8; 4/8; 5/8; 6/8$; Các đại lượng chuyển vị và ứng suất được biểu diễn dọc theo chiều dài của vỏ. Dựa vào kết quả khảo sát ta có thể rút ra các nhận xét:

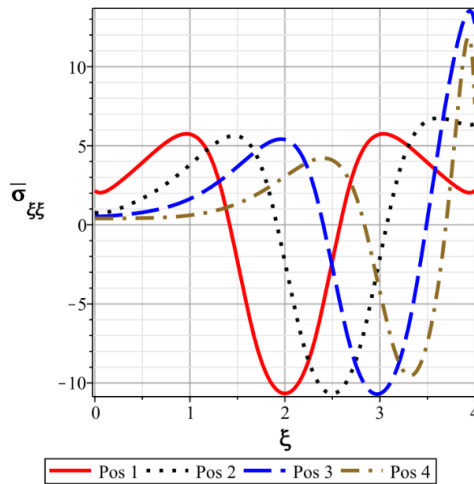
- Khi vị trí đặt tải trọng càng gần với vị trí biên thì độ võng càng giảm. Độ võng của vỏ đạt giá trị nhỏ nhất trong trường hợp tải đặt lệch về một đầu biên của vỏ.

- Đối với các thành phần ứng suất, ta thấy khi vị trí đặt tải nằm chính giữa 2 cạnh biên (Pos 1) thì đồ thị các ứng suất có dạng đối xứng, khi đó vật liệu ở hai biên ngàm đều làm việc với mức độ như nhau. Ngược lại khi vị trí đặt tải trọng càng lệch về phía biên ngàm bên phải thì đồ thị ứng suất có dạng bất đối xứng. Giá trị ứng suất ở cạnh biên gần với tải trọng hơn sẽ có giá trị lớn hơn. Sự bất đối xứng càng tăng lên khi vị trí đặt tải càng lệch về phía biên ngàm bên phải theo thứ tự Pos 1, Pos 2, Pos 3, Pos 4. Đáng lưu ý khi vị trí tải đặt lệch hẳn về một đầu của vỏ (Pos4) thì ứng suất tại vị trí biên đặt tải trọng tăng đột ngột.

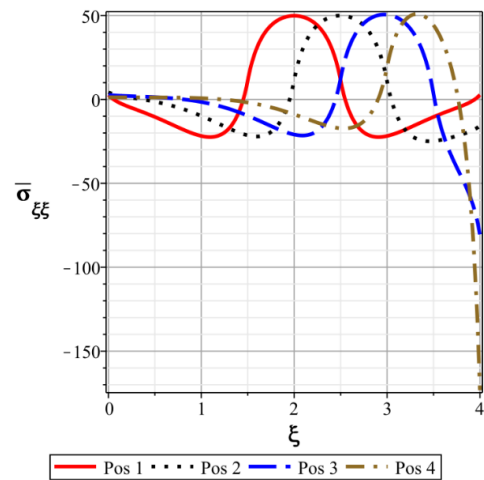
Dựa trên kết quả khảo sát ta thấy rằng tuy khi tải trọng đặt lệch về một đầu của vỏ sẽ cho chuyển vị nhỏ hơn nhưng hiệu quả làm việc của kết cấu là không đều giữa hai liên kết biên, để phát huy hiệu quả làm việc của kết cấu thì tải trọng nên đặt ở vị trí chính giữa của hai cạnh biên. Trong trường hợp ưu tiên chuyển vị của vỏ là nhỏ thì nên đặt vị trí tải lệch về một cạnh biên.



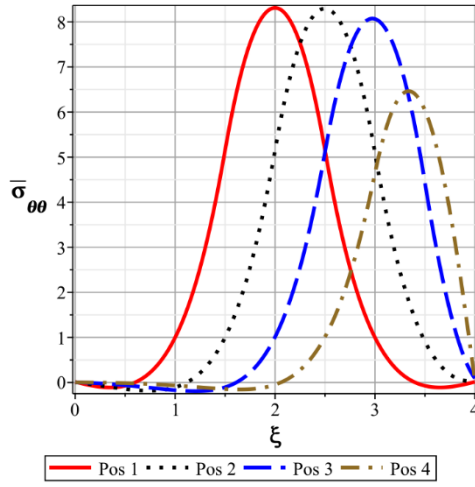
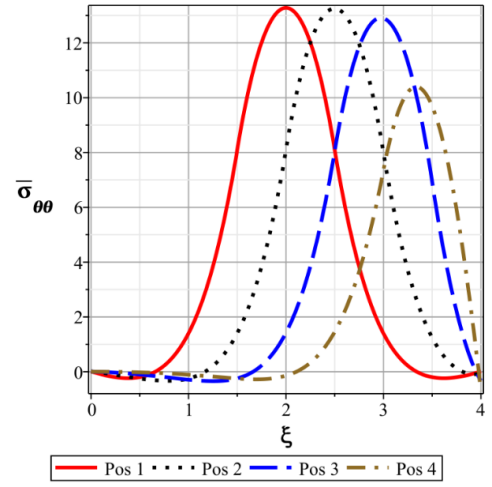
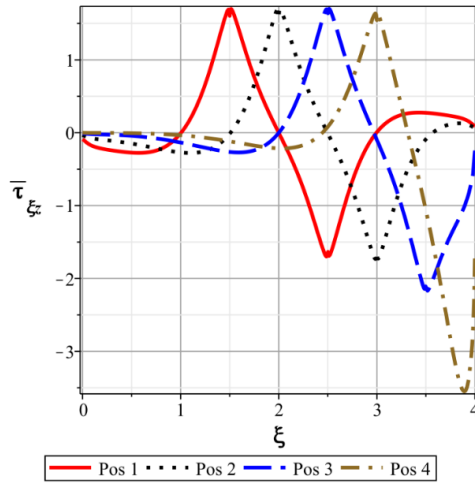
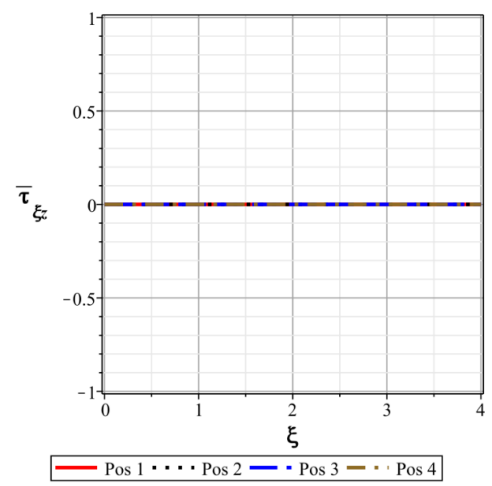
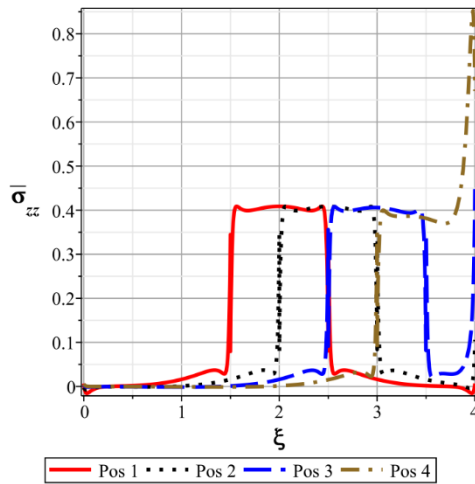
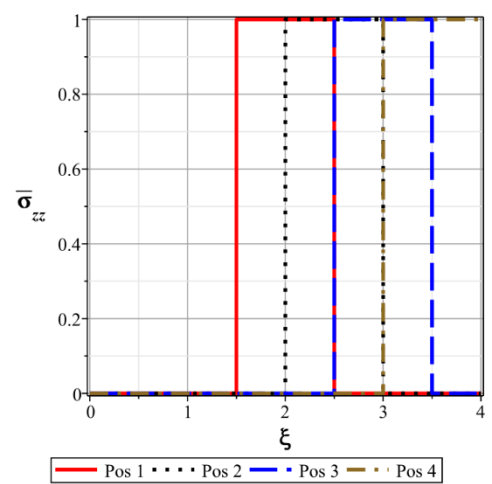
3.12.a) Độ võng $\bar{w}$ theo chiều dài tại mặt giữa $\bar{z} = 0$



3.12.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại mặt giữa $\bar{z} = 0$



3.12.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại mặt ngoài $\bar{z} = 0.5$

3.12.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại mặt giữa $\bar{z}=0$ 3.12.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại mặt ngoài $\bar{z}=0.5$ 3.12.f) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại mặt giữa $\bar{z}=0$ 3.12.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại mặt ngoài $\bar{z}=0.5$ 3.12.h) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại mặt giữa $\bar{z}=0$ 3.12.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại mặt ngoài $\bar{z}=0.5$

Hình 3.12 Ảnh hưởng của vị trí tải trọng đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ C-C FG-V, với $L/R=4$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$

3.6.3. Ảnh hưởng của dạng hàm tải trọng

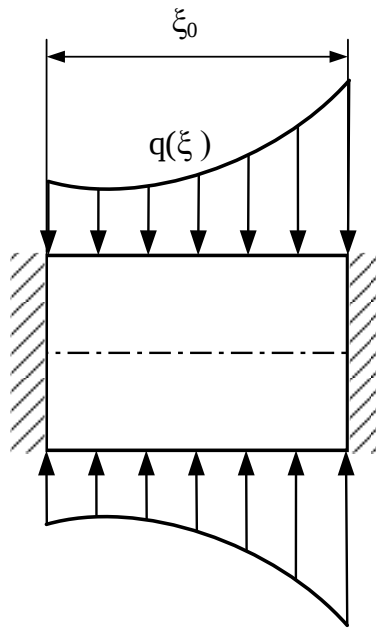
Trong phần này sẽ thực hiện khảo sát ảnh hưởng các dạng hàm tải trọng đến chuyển vị và ứng suất của vỏ. Xét tải trọng phân bố trên toàn bộ mặt ngoài của vỏ theo các quy luật sau: tải trọng phân bố đều $q_1(\xi) = Q_0$, tải trọng dạng tuyến tính $q_2(\xi) = Q_1\xi$, tải trọng dạng parabol $q_3(\xi) = Q_2\xi^2$, tải trọng điều hoà $q_4(\xi) = Q_3 \sin \xi$. Giả sử tổng hợp lực của các tải trọng đều là $Q = Q_0 L$, từ đó ta xác định được biểu thức các hàm tải trọng như sau:

$$q_1(\xi) = Q_0 \quad (3.4.a)$$

$$q_2(\xi) = \frac{2Q_0}{\xi_0} \xi \quad (3.4.b)$$

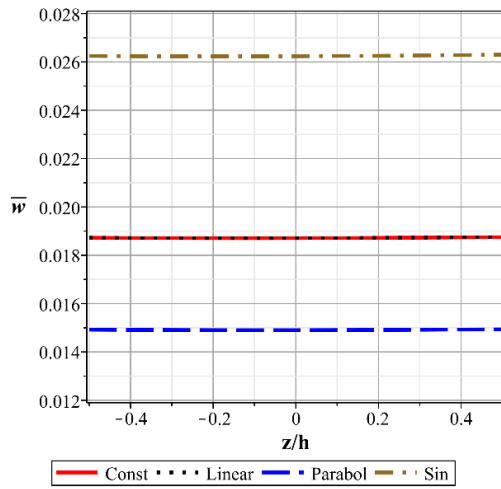
$$q_3(\xi) = \frac{3Q_0}{\xi_0^2} \xi^2 \quad (3.4.c)$$

$$q_4(\xi) = \frac{Q_0 \xi_0}{1 - \cos \xi_0} \sin \xi \quad (3.4.d)$$

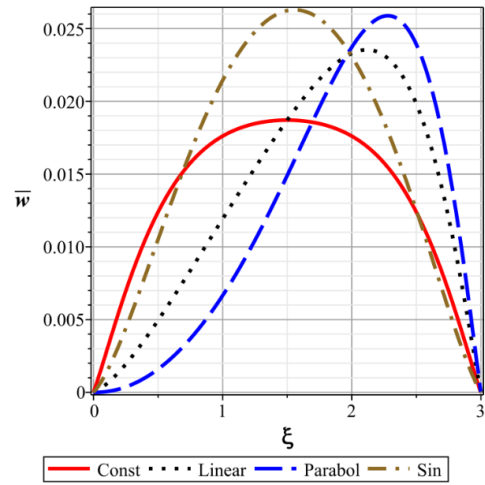


Hình 3.13 Sơ đồ khảo sát ảnh hưởng của dạng hàm tải trọng

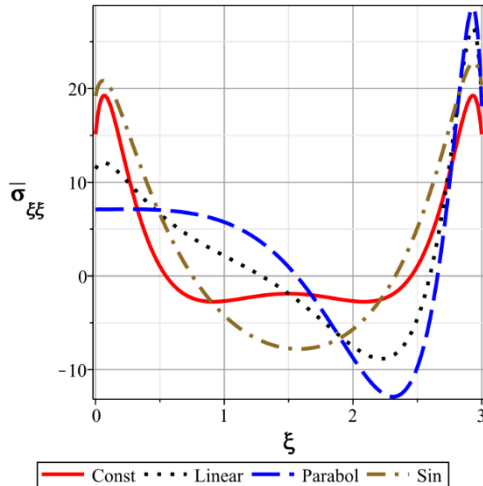
Kết quả khảo sát ảnh hưởng của dạng hàm tải trọng đến chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FG-V có liên kết C-C với các thông số $R=1m$; $L/R=3$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$ được biểu diễn Hình 3.14. Trong đó các thành phần ứng suất được biểu diễn dọc theo chiều dài của vỏ đối với mặt trung bình $\bar{z} = 0$ và mặt ngoài $\bar{z} = 0.5$ đối với vỏ trụ FG-V.



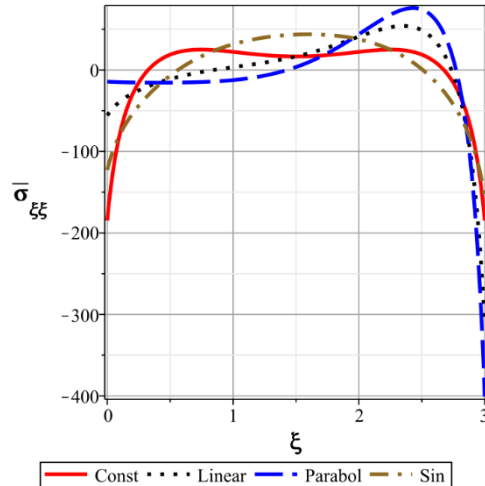
3.14.a) Độ võng $\bar{w}$ theo chiều dày tại vị trí giữa $\xi = l/2R$



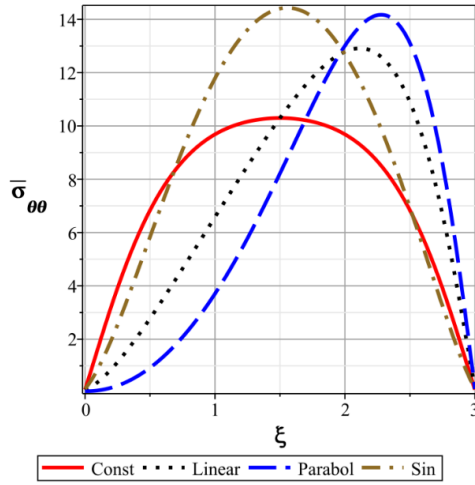
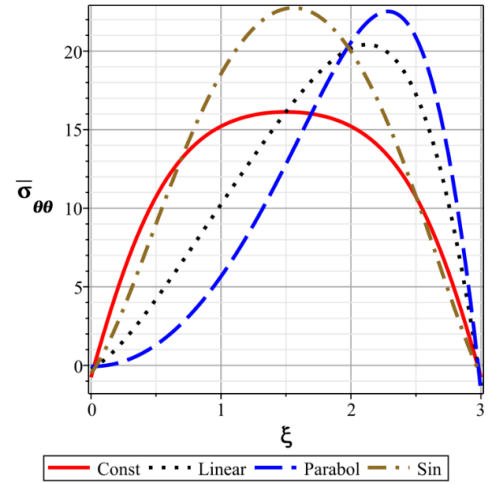
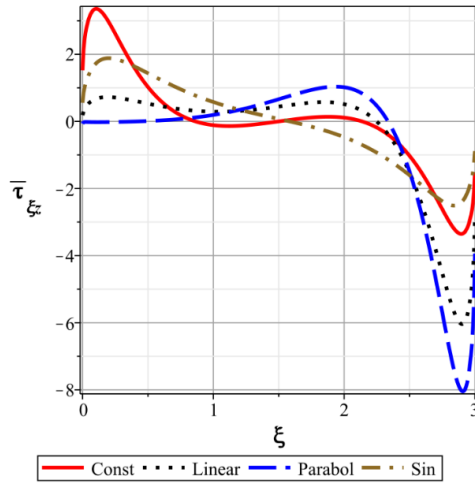
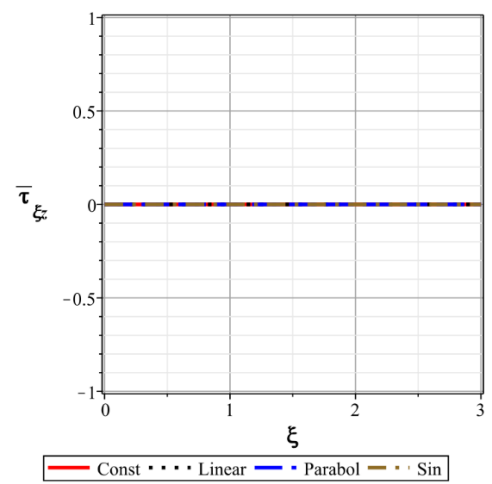
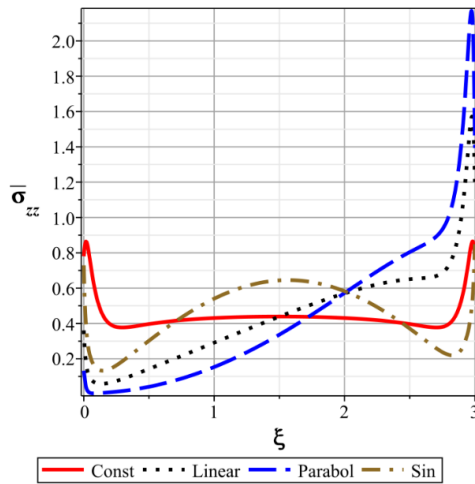
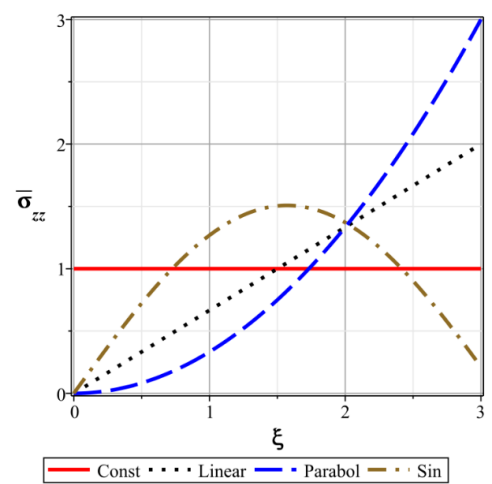
3.14.b) Độ võng $\bar{w}$ theo chiều dài tại lớp giữa $\bar{z} = 0$



3.14.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại mặt giữa $\bar{z} = 0$



3.14.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại mặt ngoài $\bar{z} = 0.5$

3.14.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại mặt giữa $\bar{z}=0$ 3.14.f) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại mặt ngoài $\bar{z}=0.5$ 3.14.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại mặt giữa $\bar{z}=0$ 3.14.h) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại mặt ngoài $\bar{z}=0.5$ 3.14.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại mặt giữa $\bar{z}=0$ 3.14.k) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại mặt ngoài $\bar{z}=0.5$

Hình 3.14 Ảnh hưởng của dạng hàm tải trọng đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ C-C FG-V, với $L/R=3$; $R/h=10$, $V_{CNT}^* = 0.28$

Dựa vào kết quả khảo sát ta có thể rút ra các nhận xét:

- Dạng hàm tải trọng ảnh hưởng lớn đến độ võng của vỏ. Độ võng của trường hợp tải không đối có dạng đối xứng, còn các dạng tải khác có dạng lệch theo dạng hàm tải trọng. Giá trị độ võng trong trường hợp tải phân bố không đối là nhỏ nhất.

- Dạng hàm tải trọng ảnh hưởng lớn đến các thành phần ứng suất của vỏ. Trong đó đồ thị ứng suất đối với tải trọng dạng hằng số, dạng hàm sin biến thiên ít hơn do với ứng suất của dạng tải trọng bậc nhất, bậc hai. Các giá trị ứng suất trong trường hợp tải trọng bậc nhất và bậc hai biến thiên đột ngột theo dạng hàm tải trọng.

Kết luận chương 3

Trong chương 3, luận án đã thực hiện các nội dung sau:

- Giải bài toán vô trụ FG-CNTRC có điều kiện biên khác nhau chịu tải trọng cơ học tác dụng theo phương hướng kính, phân bố cục bộ theo chiều dài, tuần hoàn theo hướng vòng bằng cách tiếp cận giải tích sử dụng chuỗi lượng giác đơn và phép biến đổi Laplace. Độ tin cậy của mô hình tính toán, phương pháp giải và chương trình tính toán được kiểm chứng.

- Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên, khảo sát trạng thái ứng suất tại khu vực biên, ảnh hưởng của tải trọng (mức độ tập trung, vị trí đặt tải, dạng hàm tải trọng) đến chuyển vị, ứng suất của vô trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ. Các kết quả khảo sát cho thấy:

- + Cần thiết phải kể đến ứng suất pháp tuyến ngang khi khảo sát bài toán vô trụ FG-CNTRC đặc biệt là trong trường hợp vỏ dày. Điều kiện biên ảnh hưởng lớn đến chuyển vị và ứng suất của vỏ. Giá trị ứng suất tại vị trí biên lớn hơn nhiều so với ứng suất tại vùng giữa của vỏ, giá trị ứng suất của biên ngàm lớn hơn nhiều so với các kiểu liên kết khác.

- + Ở khu vực biên ngàm, xảy ra hiện tượng gia tăng đột ngột giá trị của ứng suất, phạm vi của hiện tượng này là nhỏ (khoảng hai lần độ dày vỏ). Với vỏ ngắn, điều kiện biên tại đầu bên này ảnh hưởng mạnh đến ứng suất tại đầu biên còn lại, trong đó trường hợp biên C-F có ứng suất tại khu vực biên ngàm lớn nhất khi so với các trường hợp còn lại.

- + Tải trọng ảnh hưởng lớn đến chuyển vị và ứng suất trong vỏ. Để giảm ứng suất và tăng hiệu quả làm việc của vật liệu cần giảm mức độ tập trung, tăng phạm vi phân bố của tải trọng. Vị trí tải trọng đặt giữa hai liên kết biên sẽ phát huy đồng đều hiệu quả làm việc của cả hai đầu liên kết, ngược lại khi tải trọng đặt lệch một đầu thì chuyển vị nhỏ nhất nhưng ứng suất ở biên sẽ tăng đột ngột.

Chương 4. NGHIÊN CỨU KHẢO SÁT VỎ TRỤ FG-CNTRC CHỊU TẢI TRỌNG CƠ NHIỆT

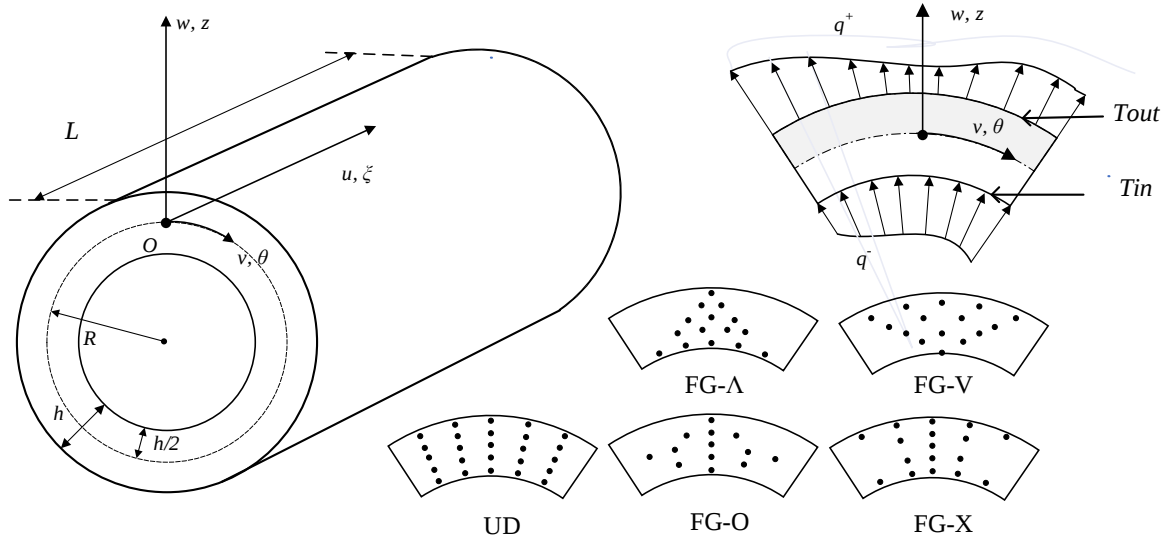
Trong chương trước của luận án đã tiến hành khảo sát các yếu tố ảnh hưởng đến chuyển vị - ứng suất của bài toán vỏ trụ chịu tải cơ. Xuất phát từ thực tế, nhiều trường hợp kết cấu vỏ trụ khi làm việc phải chịu đồng thời tải trọng cơ học và nhiệt độ như: vỏ động cơ tên lửa, ống dẫn nhiên liệu, ống dẫn khí nóng, ống dẫn chất làm mát,... Khi có sự xuất hiện của tải trọng nhiệt tác động lên vỏ sẽ làm thay đổi cơ tính của vật liệu. Sự xuất hiện gradient nhiệt độ trong vỏ sẽ làm cho cơ tính vật liệu thay đổi theo toạ độ. Do đó bài toán vỏ chịu tải trọng cơ nhiệt có những điểm khác biệt so với vỏ chỉ chịu tải trọng cơ.

Trong chương này của luận án thực hiện nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ nhiệt. Mô hình tính toán được xây dựng dựa vào hai giả thiết cơ bản là trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang và tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ. Nội dung của chương tập trung khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố điều kiện biên, thông số vật liệu, tải trọng nhiệt đến chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FG-CNTRC chịu đồng thời tải trọng cơ nhiệt. Phân bố nhiệt độ trong vỏ được xác định dựa trên phương trình truyền nhiệt và điều kiện biên nhiệt của vỏ.

4.1. Mô hình bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt

Xét vỏ trụ FG-CNTRC có chiều dài L , bán kính trung bình R , độ dày h . Vỏ chịu tải trọng hướng kính $q^+(\xi, \theta)$ - trên bề mặt ngoài, $q^-(\xi, \theta)$ - trên bề mặt trong. Vật liệu FG-CNTRC được chế tạo từ hai thành phần gia cường bằng (10,10) SWCNT, và vật liệu nền đồng chất đẳng hướng PMMA.

Giả thiết nhiệt độ phân bố trong vỏ theo chiều dày với nhiệt độ ở bề mặt trong là T_{in} , nhiệt độ ở bề mặt ngoài của vỏ là T_{out} . Vỏ trụ FG-CNTRC có các thông số của vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ.



Hình 4.1 Mô hình bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng tải trọng cơ nhiệt

Mô-đun đàn hồi và hệ số giãn nở nhiệt của PMMA phụ thuộc vào nhiệt độ được tính như sau [42]:

$$E_m = (3.52 - 34.10^{-4}T) \text{ GPa}, \alpha_m = 45.10^{-6} (1 + 0.0005(T - T_{ref})) K^{-1} \quad (4.1)$$

trong đó nhiệt độ tham chiếu $T_{ref} = 300K$.

Hệ số Poisson $\nu_m = 0.34$ và hệ số dẫn nhiệt $k_m = 5W/mK$.

Tính chất vật liệu của (10,10) SWCNT tại một số giá trị nhiệt độ được cho ở Bảng 4.1 [20, 42].

Bảng 4.1 Tính chất vật liệu của (10,10) SWCNT

T	E_{11}^{CNT}	E_{22}^{CNT}	G_{12}^{CNT}	α_{11}^{CNT}	α_{22}^{CNT}	k_{11}^{CNT}	k_{22}^{CNT}
K	GPa	GPa	GPa	$10^{-6}/K$	$10^{-6}/K$	W/mK	W/mK
300	5646.6	7080	1944.5	3.4584	5.1682	3000	100
400	5667.9	6981.4	1970.3	4.1496	5.0905	3000	100
500	5530.8	6934.8	1964.3	4.5361	5.0189	3000	100
700	5474.4	6864.4	1964.4	4.6677	4.8943	3000	100

Theo tài liệu [20], các tính chất vật liệu của CNT được giả thiết là một hàm đa thức bậc ba của nhiệt độ:

$$P = P_0 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3 \quad (4.2)$$

trong đó P là tính chất vật liệu của CNT phụ thuộc vào nhiệt độ. Các hằng số P_i được xác định dựa vào Bảng 4.1 và được liệt kê ở Bảng 4.2.

Bảng 4.2 Các hằng số của tính chất vật liệu CNT phụ thuộc vào nhiệt độ

P	P_0	P_1	P_2	P_3
E_{11}^{CNT}	6.3998e12	-4.3384e9	7.4300e6	-4.4583e3
E_{22}^{CNT}	8.0216e12	-5.4204e9	9.2750e6	-5.5625e3
G_{12}^{CNT}	1.4076e12	3.4762e9	-6.9650e6	4.4792e3
α_{11}^{CNT}	-1.1252e-6	2.2917e-8	-2.8870e-11	1.1363e-14
α_{22}^{CNT}	5.43715e-6	-9.84625e-10	2.900e-13	1.2500e-17

Các hệ số hiệu dụng CNT η_i ($i = 1, 2, 3$) được xác định theo Quy luật hỗn hợp mở rộng bằng cách đồng nhất kết quả thông số cơ tính của FG-CNTRC được xác định bằng Quy luật hỗn hợp với kết quả được xác định bằng mô phỏng động lực học phân tử. Giá trị của các hệ số hiệu dụng phụ thuộc vào giá trị tỷ lệ thể tích CNT như sau [41, 122]:

$$V_{CNT}^* = 0.12; \eta_1 = 0.137; \eta_2 = 1.022; \eta_3 = 0.7\eta_2;$$

$$V_{CNT}^* = 0.17; \eta_1 = 0.142; \eta_2 = 1.626; \eta_3 = 0.7\eta_2;$$

$$V_{CNT}^* = 0.28; \eta_1 = 0.141; \eta_2 = 1.585; \eta_3 = 0.7\eta_2;$$

Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên được xác định theo công thức:

$$\bar{w} = w/h; (\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\tau}_{\xi\theta}, \bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\tau}_{z\theta}) = (\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{z\theta}) / Q_0 \quad (4.3)$$

4.2. Xác định phân bố nhiệt độ theo chiều dày vỏ trụ FG-CNTRC

Như đã nêu ở phần tổng quan, thông thường hàm phân bố nhiệt độ được giả thiết là một hàm cho trước dạng hằng số, hàm sin hoặc tuyến tính. Các dạng hàm cho trước này sẽ cho phép đơn giản hoá hơn khi tính toán. Tuy nhiên trong thực tế thì hàm phân bố nhiệt độ trong vỏ chịu ảnh hưởng bởi môi trường, dạng kết cấu, tính chất vật liệu. Do đó, để sát hơn với thực tế, trong luận án sử dụng hàm phân bố nhiệt độ được xác định từ phương trình truyền nhiệt. Trong mục này sẽ trình bày cách xác định hàm phân bố nhiệt độ trong trường hợp biến thiên theo chiều dày vỏ trụ FG-CNTRC.

Phương trình truyền nhiệt ba chiều với nguồn nhiệt dừng của vỏ trụ có dạng như sau [19, 129]:

$$\frac{\partial q_z^T}{\partial z} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial q_\theta^T}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial q_\xi^T}{\partial \xi} + \frac{q_z^T}{R+z} = 0 \quad (4.4)$$

trong đó q_z^T , q_θ^T , q_ξ^T là các thành phần của véc tơ thông lượng nhiệt. Định luật Fourier của phương trình dẫn nhiệt, được biểu thị dưới dạng tọa độ cục bộ như sau [19, 129]:

$$\begin{Bmatrix} q_\xi^T \\ q_\theta^T \\ q_z^T \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \frac{1}{R+z} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

trong đó k_{ii} là hệ số truyền nhiệt của vỏ trụ theo các phương.

Đối với vỏ trụ FG-CNTRC có phân bố CNT biến thiên theo phương bán kính, phương trình truyền nhiệt ba chiều trong trường hợp nhiệt dừng được xác định theo phương trình sau [81, 129]:

$$\frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{33} r \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{k_{22}}{(R+z)^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{k_{11}}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.6)$$

Khi nhiệt độ chỉ thay đổi theo chiều dày của vỏ trụ và không có các nguồn nhiệt nội tại trong kết cấu vỏ, các thành phần biến thiên nhiệt độ theo chiều dọc trục $\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0$ và hướng vòng $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$. Khi đó phân bố nhiệt độ theo chiều dày vỏ được xác định như sau [19, 129]:

$$\frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{33} r \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Điều kiện biên nhiệt độ ở mặt trong và mặt ngoài của vỏ trụ:

$$T = T_{in} \text{ tại } z = -h/2 \quad (4.8.a)$$

$$T = T_{out} \text{ tại } z = h/2 \quad (4.8.b)$$

Ta thay $k_{33} = k_{33}(z)$ vào (4.7) chú ý rằng $r = R + z$ ta thu được phương trình sau:

$$\frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial z} \left((R+z) k_{33}(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.9)$$

- Đối với trường hợp phân bố kiểu UD, thay (2.3.a) vào (2.1.i) và (2.5) ta thu được:

$$k_{33} = k_{33U}(z) = \frac{1}{\frac{V_{CNT}^*}{k_{33}^{CNT}} + \frac{V_m}{k_m}}, \quad (4.10)$$

rõ ràng trong trường hợp kiểu phân bố đều UD thì k_{33} là một hằng số. Thay vào (4.9) xác định được hàm phân bố nhiệt độ theo chiều dày có dạng như sau:

$$T(z) = \frac{A_1}{k_{33U}} \ln(R+z) + A_2 \quad (4.11)$$

trong đó A_1, A_2 là các hằng số được xác định từ điều kiện biên nhiệt (4.8):

$$A_1 = \frac{k_{33U} (T_{in} - T_{out})}{\ln\left(\frac{R-h/2}{R+h/2}\right)}, \quad A_2 = \frac{T_{out} \ln(R-h/2) - T_{in} \ln(R+h/2)}{\ln\left(\frac{R-h/2}{R+h/2}\right)}$$

- Đối với trường hợp kiểu phân bố FG- Λ , thay (2.3.b) vào (2.1.i) và (2.5) ta thu được:

$$k_{33} = k_{33\Lambda}(z) = \frac{k_{33}^{CNT} k_m}{(1-2z/h)V_{CNT}^* k_m + \left[1 - (1-2z/h)V_{CNT}^*\right] k_{33}^{CNT}}, \quad (4.12)$$

trong trường hợp FG- Λ thì $k_{33\Lambda}(z)$ là một hàm số của z . Thay vào phương trình (4.9) ta xác định được hàm phân bố nhiệt độ có dạng như sau:

$$T(z) = A_3 G_{1\Lambda} \ln(R+z) + A_3 G_{2\Lambda} z + A_4 \quad (4.13)$$

trong đó: các hằng số $G_{1\Lambda}, G_{2\Lambda}$ được ký hiệu như sau:

$$G_{1\Lambda} = (1+2R/h) \cdot k_m \cdot V_{CNT}^* + \left[1 - (1+2R/h) \cdot V_{CNT}^*\right] \cdot k_{33}^{CNT},$$

$$G_{2\Lambda} = \frac{2}{h} \cdot V_{CNT}^* \cdot (k_{33}^{CNT} - k_m)$$

A_3, A_4 là các hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên nhiệt (4.8):

$$A_3 = \frac{T_{in} - T_{out}}{G_{1\Lambda} \ln\left(\frac{R-h/2}{R+h/2}\right) - G_{2\Lambda} \cdot h}$$

$$A_4 = \frac{[G_{1\Lambda} \cdot \ln(R - h/2) - G_{2\Lambda} \cdot h/2] \cdot T_{out} - [G_{1\Lambda} \cdot \ln(R + h/2) + G_{2\Lambda} \cdot h/2] \cdot T_{in}}{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2\Lambda} \cdot h}$$

- Đối với trường hợp kiểu phân bố FG-V, thay (2.3.c) vào (2.1.i) và (2.5) ta thu được:

$$k_{33} = k_{33V}(z) = \frac{k_{33}^{CNT} k_m}{(1 + 2z/h)V_{CNT}^* k_m + [1 - (1 + 2z/h)V_{CNT}^*] k_{33}^{CNT}}, \quad (4.14)$$

trong trường hợp FG-V thì $k_{33V}(z)$ là một hàm số của z . Thay vào phương trình (4.9) ta xác định được hàm phân bố nhiệt độ có dạng như sau:

$$T(z) = A_5 \cdot G_{1V} \cdot \ln(R + z) + A_5 \cdot G_{2V} \cdot z + A_6 \quad (4.15)$$

trong đó, các hằng số $G_{1\Lambda}, G_{2\Lambda}$ được ký hiệu như sau:

$$G_{1V} = (1 - 2R/h) \cdot k_m \cdot V_{CNT}^* + [1 - (1 - 2R/h) \cdot V_{CNT}^*] \cdot k_{33}^{CNT},$$

$$G_{2V} = \frac{2}{h} \cdot V_{CNT}^* \cdot (k_m - k_{33}^{CNT})$$

A_5, A_6 là các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên nhiệt (4.8):

$$A_5 = \frac{T_{in} - T_{out}}{G_{1V} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2V} \cdot h},$$

$$A_6 = \frac{[G_{1V} \cdot \ln(R - h/2) - G_{2V} \cdot h/2] \cdot T_{out} - [G_{1V} \cdot \ln(R + h/2) + G_{2V} \cdot h/2] \cdot T_{in}}{G_{1V} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2V} \cdot h}$$

- Đối với trường hợp kiểu phân bố FG-O, thay (2.3.d) vào (2.1.i) và (2.5) ta thu được:

$$k_{33} = k_{33O}(z) = \frac{k_{33}^{CNT} k_m}{(1 - 2|z|/h)V_{CNT}^* k_m + [1 - (1 - 2|z|/h)V_{CNT}^*] k_{33}^{CNT}}, \quad (4.16)$$

trong trường hợp FG-O thì $k_{33O}(z)$ là một hàm số của z . Thay vào phương trình (4.9) ta xác định được hàm phân bố nhiệt độ có dạng như sau:

$$T(z) = \begin{cases} A_7 \cdot G_{10} \cdot \ln(R + z) + A_7 \cdot G_{20} \cdot z + A_8 & (-h/2 \leq z < 0) \\ A_7 \cdot G_{30} \cdot \ln(R + z) + A_7 \cdot G_{40} \cdot z + A_9 & (0 \leq z \leq h/2) \end{cases} \quad (4.17)$$

trong đó, các hằng số $G_{10}, G_{20}, G_{30}, G_{40}$ được ký hiệu như sau:

$$G_{10} = (2 - 4R/h) \cdot k_m \cdot V_{CNT}^* + [1 - (2 - 4R/h) \cdot V_{CNT}^*] \cdot k_{33}^{CNT},$$

$$G_{20} = \frac{4}{h} \cdot V_{CNT}^* \cdot (k_m - k_{33}^{CNT}),$$

$$G_{30} = (2 + 4R/h) \cdot k_m \cdot V_{CNT}^* + [1 - (2 + 4R/h) \cdot V_{CNT}^*] \cdot k_{33}^{CNT},$$

$$G_{40} = \frac{4}{h} \cdot V_{CNT}^* \cdot (k_{33}^{CNT} - k_m)$$

A_7, A_8, A_9 là các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên nhiệt độ ở mặt trong và mặt ngoài (4.8) và tính liên tục của nhiệt độ tại $z=0$:

$$A_7 = \frac{T_{out} - T_{in}}{\Delta},$$

$$A_8 = \frac{1}{\Delta_O} \cdot \left[\begin{aligned} & [-G_{10} \cdot \ln(R - h/2) + G_{20} \cdot h/2] \cdot T_{out} + \\ & + [G_{10} \cdot \ln R - G_{30} \cdot \ln R + G_{30} \cdot \ln(R + h/2) + G_{40} \cdot h/2] \cdot T_{in} \end{aligned} \right]$$

$$A_9 = \frac{1}{\Delta_O} \cdot \left[\begin{aligned} & [G_{10} \cdot \ln R - G_{30} \cdot \ln R - G_{10} \cdot \ln(R - h/2) + G_{20} \cdot h/2] \cdot T_{out} + \\ & + [G_{30} \cdot \ln(R + h/2) + G_{40} \cdot h/2] \cdot T_{in} \end{aligned} \right]$$

$$\Delta_O = -G_{10} \cdot \ln(R - h/2) + G_{20} \cdot h/2 - G_{30} \cdot \ln(R + h/2) - G_{40} \cdot h/2 + G_{10} \cdot \ln R - G_{30} \cdot \ln R$$

- Đối với trường hợp kiểu phân bố FG-X, thay (2.3.e) vào (2.1.i) và (2.5) ta thu được:

$$k_{33} = k_{33X}(z) = \frac{k_{33}^{CNT} k_m}{(4|z|/h)V_{CNT}^* k_m + (1 - 4|z|/h)V_{CNT}^* k_{33}^{CNT}}, \quad (4.18)$$

trong trường hợp FG-X thì $k_{33X}(z)$ là một hàm số của z . Thay vào phương trình (4.9) ta xác định được hàm phân bố nhiệt độ có dạng như sau:

$$T(z) = \begin{cases} A_{10} \cdot G_{1X} \cdot \ln(R + z) + A_{10} \cdot G_{2X} \cdot z + A_{11} & (-h/2 \leq z < 0) \\ A_{10} \cdot G_{3X} \cdot \ln(R + z) + A_{10} \cdot G_{4X} \cdot z + A_{12} & (0 \leq z \leq h/2) \end{cases} \quad (4.19)$$

trong đó, các hằng số $G_{1X}, G_{2X}, G_{3X}, G_{4X}$ được ký hiệu như sau:

$$G_{1X} = (4R/h) \cdot k_m \cdot V_{CNT}^* + [1 - (4R/h) \cdot V_{CNT}^*] \cdot k_{33}^{CNT},$$

$$G_{2X} = \frac{4}{h} \cdot V_{CNT}^* \cdot (k_{33}^{CNT} - k_m),$$

$$G_{3X} = [1 - (4R/h) \cdot V_{CNT}^*] \cdot k_{33}^{CNT} - (4R/h) \cdot k_m \cdot V_{CNT}^*,$$

$$G_{4X} = \frac{4}{h} \cdot V_{CNT}^* \cdot (k_m - k_{33}^{CNT})$$

A_{10}, A_{11}, A_{12} là các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên nhiệt độ ở mặt trong, mặt ngoài (4.8) và tính liên tục của nhiệt độ tại $z=0$:

$$A_{10} = \frac{T_{out} - T_{in}}{\Delta_X},$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta_X} \left[\left[-G_{1X} \cdot \ln(R - h/2) + G_{2X} \cdot h/2 \right] \cdot T_{out} + \left[G_{1X} \cdot \ln R - G_{3X} \cdot \ln R + G_{3X} \cdot \ln(R + h/2) + G_{4X} \cdot h/2 \right] \cdot T_{in} \right]$$

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta_X} \cdot \left[\left[G_{1X} \cdot \ln R - G_{3X} \cdot \ln R - G_{1X} \cdot \ln(R - h/2) + G_{2X} \cdot h/2 \right] \cdot T_{out} + \left[G_{3X} \cdot \ln(R + h/2) + G_{4X} \cdot h/2 \right] \cdot T_{in} \right]$$

$$\Delta_X = -G_{1X} \cdot \ln(R - h/2) + G_{2X} \cdot h/2 - G_{3X} \cdot \ln(R + h/2) - G_{4X} \cdot h/2 + G_{1X} \cdot \ln R - G_{3X} \cdot \ln R$$

Sau khi xác định được hàm phân bố nhiệt độ theo các trường hợp phân bố CNT, thay vào các biểu thức (4.1), (4.2) ta sẽ xác định được các biểu thức thông số vật liệu cốt CNT E_{ii}^{CNT} , G_{12}^{CNT} , α_{ii}^{CNT} và vật liệu nền E_m , G_m theo tọa độ vỏ. Tiếp tục thay thế biểu thức các thông số này vào các biểu thức (2.1.a), (2.1.b), (2.1.c), (2.1.f), (2.1.g) và (2.5) ta xác định được các thông số E_{ij} , G_{ij} , α_{ij} của vật liệu FG-CNTRC theo tọa độ vỏ. Thay các biểu thức này vào (2.10), (2.11) ta thu được biểu thức của các thông số độ cứng C_{ij} và mô-đun ứng suất nhiệt $\beta_\alpha, \beta_\theta, \beta_z$.

4.3. Các ví dụ kiểm chứng cho bài toán vỏ chịu tải trọng cơ nhiệt

4.3.1. Ví dụ 1

Khảo sát vỏ trụ FGM có biên ngàm hai đầu trong môi trường nhiệt và so sánh kết quả được tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn của Gharooni và cộng sự [130]. Các thông số tính toán được cho như sau: chiều dài $L = 0.8$ m, bán kính trong của vỏ $r_{in} = 0.04$ m, chiều dày vỏ $h = 0.02$ m; thông số vật liệu ở mặt trong của vỏ $\nu_{in} = 0.3$, $E_{in} = 200$ GPa, $\alpha_{in} = 12 \times 10^{-6} / ^\circ C$, $K_{in} = 20$ W / m.K; nhiệt độ ở bề mặt ngoài và bề mặt trong của vỏ lần lượt là $T_{in} = 125^\circ C$, $T_{out} = 25^\circ C$; nhiệt độ tham chiếu $T_{ref} = 25^\circ C$; vỏ chịu tải trọng

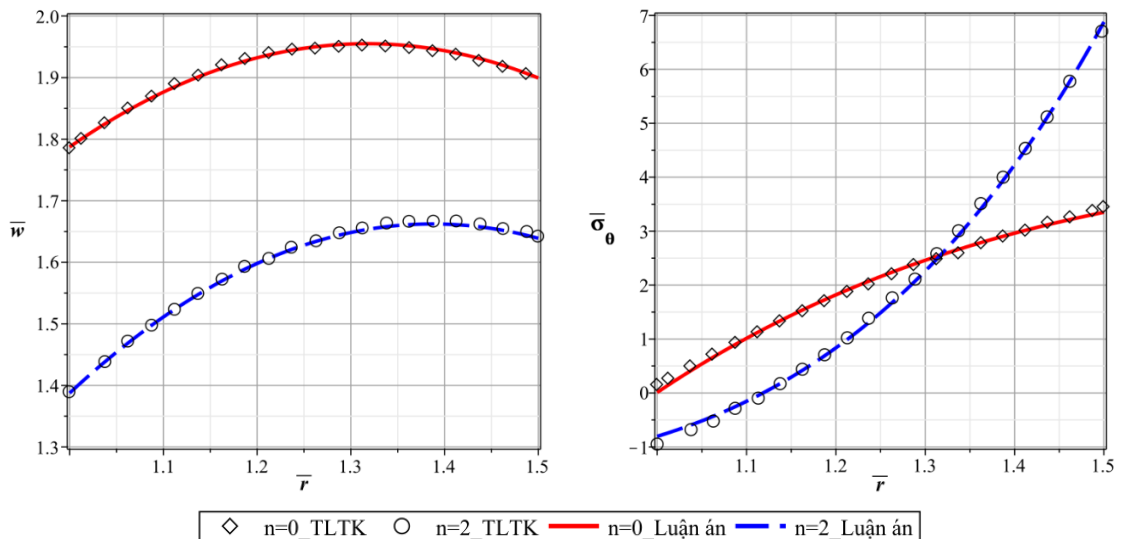
áp suất bên trong $P_{in} = 80 \text{ MPa}$. Mô-đun đàn hồi E , hệ số giãn nở nhiệt α và hệ số truyền nhiệt K được xác định như sau:

$$E(z) = E_{in} \left(\frac{R+z}{r_{in}} \right)^n; \alpha(z) = \alpha_{in} \left(\frac{R+z}{r_{in}} \right)^n; K(z) = K_{in} \left(\frac{R+z}{r_{in}} \right)^n \quad (4.20)$$

Bảng 4.3 thể hiện so sánh kết quả ứng suất σ_z khi vỏ trụ FGM chỉ chịu tác dụng của tải trọng nhiệt với kết quả của Gharooni và cộng sự [130].

Bảng 4.3 So sánh kết quả ứng suất pháp tuyến của vỏ trụ FGM ngàm hai đầu trong môi trường nhiệt

σ_z (MPa)	$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$	
	Ref [130]	Luận án	Ref [130]	Luận án	Ref [130]	Luận án
$z = -h/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$z = -h/4$	-13.032	-14.192	-14.964	-15.588	-17.096	-17.622
$z = 0$	-13.109	-13.363	-16.742	-17.001	-21.228	-21.401
$z = h/4$	-7.630	-7.181	-10.720	-10.356	-14.973	-14.766
$z = h/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000



Hình 4.2 So sánh kết quả chuyển vị $\bar{w} = w / r_{in} \times 1000$ và ứng suất $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / P_{in}$ của vỏ FGM chịu đồng thời tải trọng cơ nhiệt

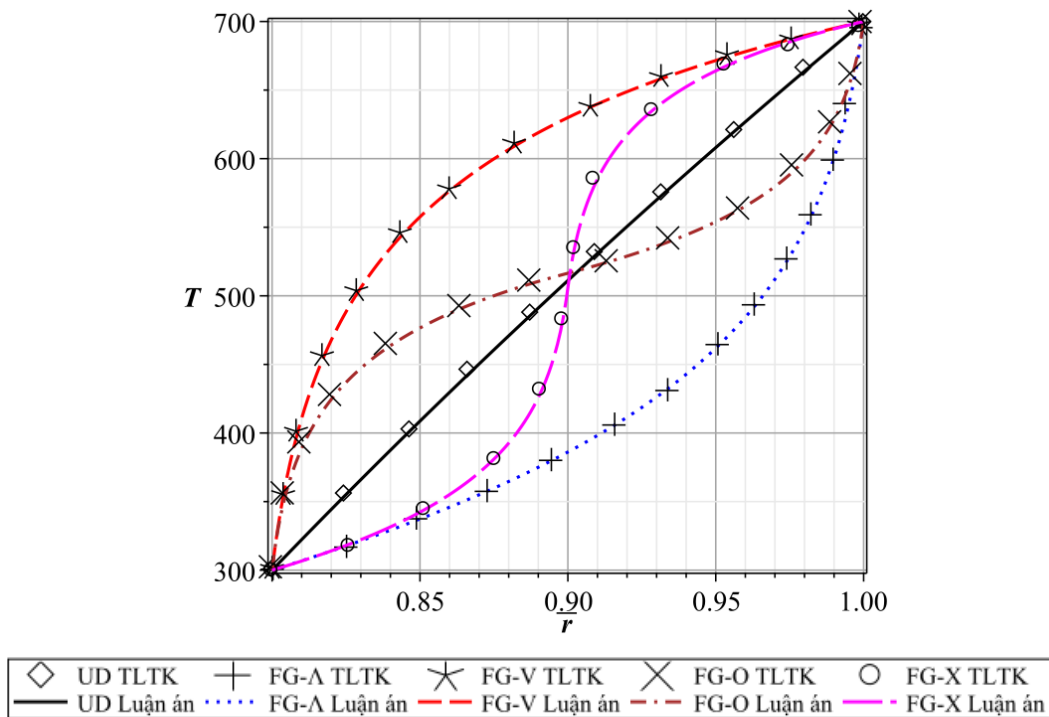
Hình 4.2 thể hiện kết quả so sánh của chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w} = w / r_{in} \times 1000$ và ứng suất vòng không thứ nguyên $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / P_{in}$ trong trường hợp vỏ FGM chịu đồng thời tải trọng áp suất ở bề mặt trong và tải trọng nhiệt độ với kết quả của Gharooni và cộng sự [130]. So sánh cho thấy kết quả của luận án và kết quả đã công bố của Gharooni và cộng sự là trùng hợp nhau.

4.3.2. Ví dụ 2

Để kiểm chứng cho việc tính toán phân bố nhiệt độ trong vỏ, thực hiện khảo sát vỏ trụ FG được gia cường bằng CNT lượn sóng (wavy CNT) và so sánh với kết quả của Moradi-Dastjerdi và cộng sự [81].

Thông số của vỏ: bán kính trong $r_{in} = 0.4m$, bán kính ngoài $r_{out} = 0.5m$, tỷ lệ thể tích CNT $V_{CNT}^* = 0.17$, nhiệt độ tại mặt trong và mặt ngoài là $T_{in} = 300K$ và $T_{out} = 700K$.

So sánh phân bố nhiệt độ trong vỏ FG-CNTRC ở Hình 4.3 cho thấy sự trùng hợp giữa kết quả của luận án và kết quả của Moradi-Dastjerdi và cộng sự.



Hình 4.3 So sánh kết quả phân bố nhiệt độ theo chiều dày của vỏ trụ FG-CNTRC gia cường bằng CNT lượn sóng

4.3.3. Ví dụ 3

Khảo sát vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng nhiệt và so sánh với kết quả đã được công bố của Pourasghar và cộng sự [20]. Vỏ trụ có các thông số hình học như sau: chiều dài $L = 1m$, bán kính trung bình $R = 0.2m$, tỷ lệ bán kính trên chiều dày $R/h = 10$. Thông số của vật liệu nền PMMA là $E_m = (3.52 - 0.0034T)GPa$, $\alpha_m = 45 \cdot 10^{-6} (1 + 0.0005\Delta T)/K$, $\nu_m = 0.34$, $k_m = 0.247W/mK$. Vật liệu cốt gia cường lựa chọn (3,3) SWCNT có mô-đun Young được xác định như sau:

$$E_{CNT}(T, \dot{\epsilon}) = (E_0 + AT + BT^2 + CT^3) (1 + \dot{\epsilon} \cdot 10^{-6})^D \quad (4.21)$$

trong đó: A, B, C, D là các hằng số không phụ thuộc vào tải trọng và nhiệt độ môi trường, $\dot{\epsilon}$ là tỷ lệ biến dạng. Đối với CNT dạng zigzag (3,3), các hằng số này được cho như sau: $E_0 = 1.15$, $A = -2.8 \cdot 10^{-4}$, $B = -3.98 \cdot 10^{-8}$, $C = 3.74 \cdot 10^{-11}$, $D = 0.27$, $\dot{\epsilon} = 100$.

Các thông số khác của vật liệu SWCNT (3,3): $\nu_{CNT} = 0.175$, $\alpha_{11}^{CNT} = 3.4584 \cdot 10^{-6}/K$, $\alpha_{22}^{CNT} = \alpha_{33}^{CNT} = 5.1682 \cdot 10^{-6}/K$, $k_{11}^{CNT} = 3000W/mK$, $k_{22}^{CNT} = k_{33}^{CNT} = 100W/mK$. Hệ số hiệu dụng của CNT theo giá trị tỷ lệ thể tích CNT: $V_{CNT}^* = 0.12$, $\eta_1 = 0.6696$, $\eta_2 = 1.0211$; $\eta_3 = \eta_2$. Nhiệt độ trên bề mặt trong và mặt ngoài vỏ lần lượt là T_{in} và T_{out} .

Phân bố nhiệt độ trong vỏ cho trường hợp UD được xác định bởi Pourasghar và cộng sự [20] có dạng như sau:

$$T(r) = T_{in} + \frac{T_{out} - T_{in}}{C} \left[\left(\frac{r - r_{in}}{h} \right) - \frac{K_{oi}}{(p+1)K_i} \left(\frac{r - r_{in}}{h} \right)^{p+1} + \frac{K_{oi}^2}{(2p+1)K_i^2} \left(\frac{r - r_{in}}{h} \right)^{2p+1} - \frac{K_{oi}^3}{(3p+1)K_i^3} \left(\frac{r - r_{in}}{h} \right)^{3p+1} + \frac{K_{oi}^4}{(4p+1)K_i^4} \left(\frac{r - r_{in}}{h} \right)^{4p+1} - \frac{K_{oi}^5}{(5p+1)K_i^5} \left(\frac{r - r_{in}}{h} \right)^{5p+1} \right] \quad (4.22)$$

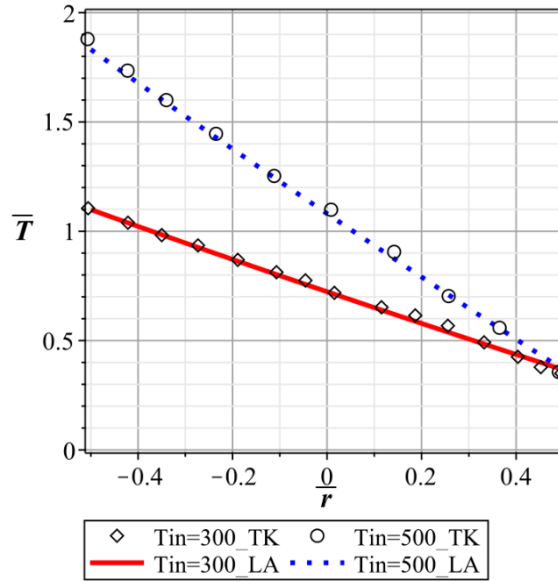
trong đó $K_{oi} = K_o - K_i$ và

$$C = 1 - \frac{K_{oi}}{(p+1)K_i} + \frac{K_{oi}^2}{(2p+1)K_i^2} - \frac{K_{oi}^3}{(3p+1)K_i^3} + \frac{K_{oi}^4}{(4p+1)K_i^4} - \frac{K_{oi}^5}{(5p+1)K_i^5}$$

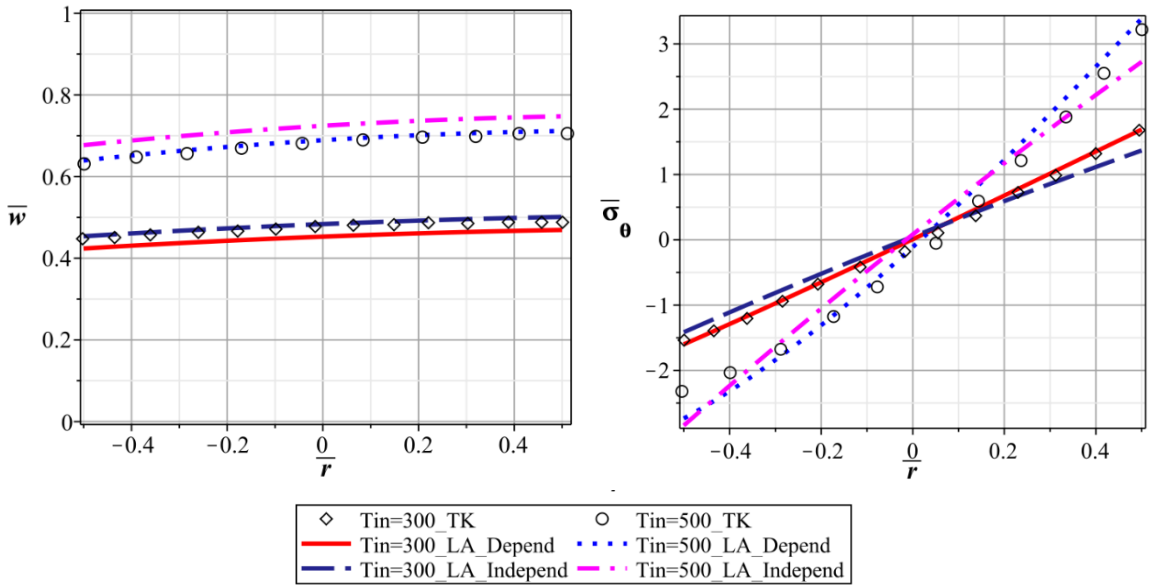
trong trường hợp phân bố CNT kiểu UD thì: $p=0, K_o = K_i$

Để đánh giá sự cần thiết của việc xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu. Thực hiện tính toán với hai mô hình: mô hình có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ tính chất vật liệu (LA_Depend) và mô hình bỏ qua ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu (LA_Independ).

Kết quả so sánh phân bố nhiệt độ và chuyển vị không thứ nguyên, ứng suất vòng không thứ nguyên của luận án với công bố của Pourasghar và cộng sự [20] được thể hiện trên Hình 4.4, Hình 4.5. Trong đó các ký hiệu $T_{in}=300_TK$, $T_{in}=300_LA_Depend$, $T_{in}=300_LA_Independ$ lần lượt là kết quả của Pourasghar và cộng sự [20], luận án với tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ, luận án với tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ khi $T_{in}=300K$. Tương tự các ký hiệu $T_{in}=500_TK$, $T_{in}=500_LA_Depend$, $T_{in}=500_LA_Independ$ cho trường hợp $T_{in}=500K$.



Hình 4.4. So sánh kết quả phân bố nhiệt độ không thứ nguyên $\bar{T} = T/273$ theo chiều dày của vỏ trụ FG-CNTRC với nhiệt độ ở mặt ngoài $T_{out} = 100K$



Hình 4.5 So sánh kết quả chuyển vị $\bar{w} = w / (\alpha_m T_{out})$ và ứng suất vòng $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / (\alpha_m E_m T_{out})$ theo chiều dày của vỏ trụ FG-CNTRC với nhiệt độ ở mặt ngoài $T_{out} = 100K$

Phân tích kết quả so sánh trình bày ở Hình 4.4 và Hình 4.5 ta thấy rằng kết quả tính toán khi bỏ qua ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu có sự khác biệt so với kết quả tính toán có xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính

chất vật liệu. Ngoài ra, các kết quả tính toán có xét tới ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu nhận được luận án và kết quả đã công bố của Pourasghar và cộng sự [20] là hoàn toàn phù hợp.

Dựa vào những kết quả so sánh và phân tích ở các ví dụ trên ta thấy rằng:

- Mô hình tính toán, phương pháp giải và chương trình tính toán đảm bảo độ tin cậy.
- Cần thiết phải xét đến tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ khi nghiên cứu bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng nhiệt.

4.4. Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên

Để khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên đến ứng xử đàn hồi nhiệt của vỏ trụ FG-CNTRC, thực hiện tính toán số cho vỏ trụ FG- Λ có thông số hình học: $R=0.5m$; $R/h=10$, tỷ lệ thể tích CNT $V_{CNT}^* = 0.17$. Vỏ chịu tải trọng nhiệt ở mặt trong $T_{in}=400$ K và $T_{out}=300$ K, tải trọng áp suất trong $Q_0=10^7$ Pa. Thực hiện khảo sát theo các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Vỏ có chiều dài tương đối trung bình $L/R=4$

Trường hợp 2: Vỏ có chiều dài tương đối ngắn $L/R=1$.

Hình 4.6, Hình 4.7 lần lượt biểu diễn kết quả của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày tại vị trí giữa ($\xi = L/2R$) và vị trí điểm biên ($\xi = L/R$) của vỏ trụ FG- Λ với chiều dài trung bình ($L/R=4$), chiều dài tương đối ngắn ($L/R=1$).

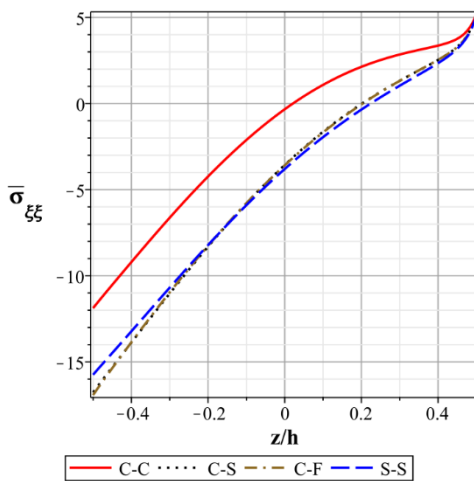
Từ các đồ thị ứng suất biểu diễn ở Hình 4.6, Hình 4.7 có thể thấy rằng:

- Điều kiện biên ảnh hưởng lớn đến ứng suất tại điểm giữa của vỏ trong trường hợp vỏ ngắn ($L/R=1$) nhưng có ảnh hưởng nhỏ đối với trường hợp vỏ có độ dài trung bình ($L/R=4$). Với vỏ có độ dài trung bình, giá trị ứng suất tại

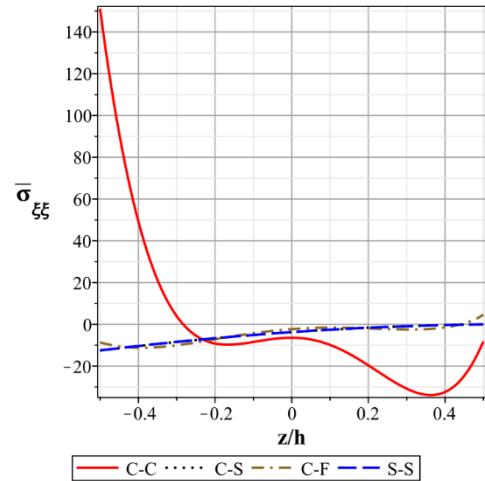
điểm giữa ($\xi = L/2R$) với các điều kiện biên khác nhau là xấp xỉ bằng nhau (đồ thị a, c, e, g của Hình 4.6), nhưng với vỏ trụ ngắn giá trị ứng suất chênh lệch nhau nhiều với các điều kiện biên khác nhau (đồ thị a, c của Hình 4.7).

- Điều kiện biên ảnh hưởng lớn đến ứng suất của vỏ tại điểm biên ($\xi = L/R$) trong cả hai trường hợp vỏ ngắn và vỏ trung bình đang xét. Trong đó, ứng suất trong trường hợp vỏ C-C thể hiện sự biến thiên mạnh nhất so với các điều kiện biên khác. Ví dụ khi $L/R=4$ thì giá trị lớn nhất của $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại vị trí biên $\xi = L/R$ của vỏ có biên C-C, C-S, C-F, S-S lần lượt là 150.5, -12.5, -11.3, -12.6 (Hình 4.6.b), tương tự với $\bar{\tau}_{\xi z}$ lần lượt là -7.3, -3.5, -0.17, -3.5 (Hình 4.6.f), với $\bar{\sigma}_{zz}$ lần lượt là -3.5, -2.5, -1, -2.5 (Hình 4.6.h).

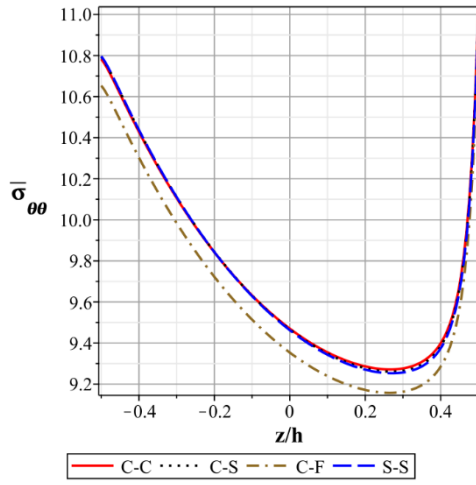
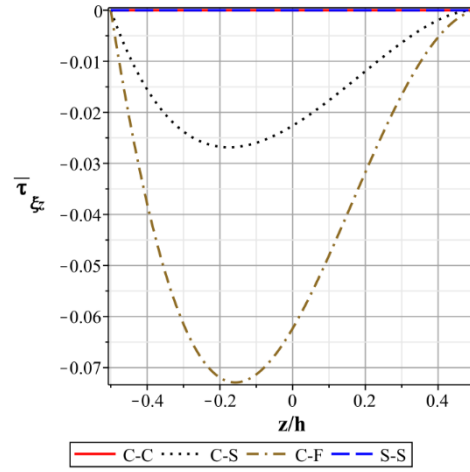
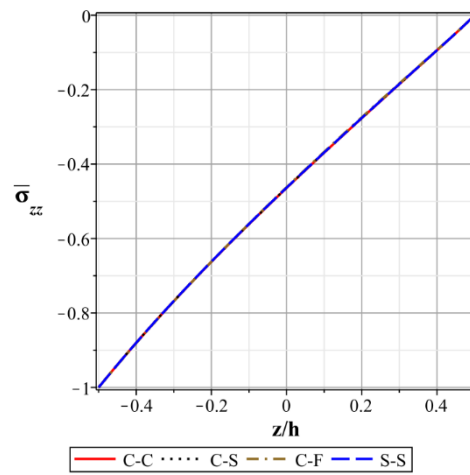
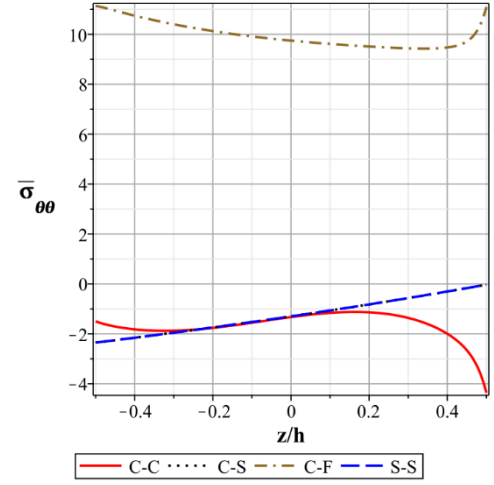
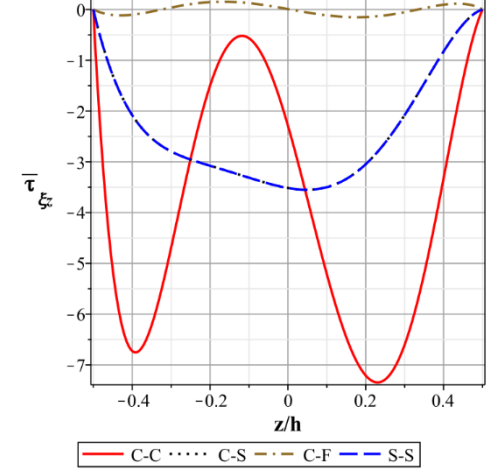
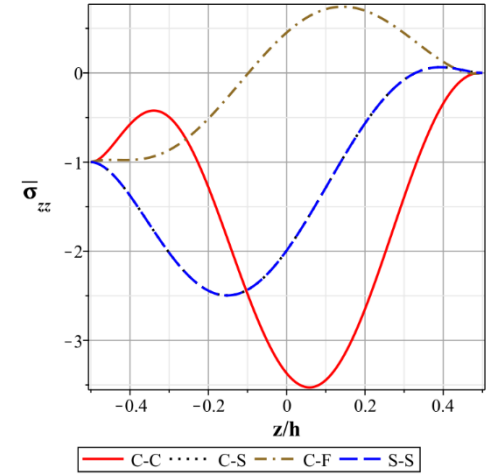
- Giá trị ứng suất tại biên ($\xi = L/R$) có sự biến thiên đột ngột so với giá trị ứng suất tại điểm giữa của vỏ ($\xi = L/2R$). Trong đó trường hợp biên ngàm thì sự biến thiên thể hiện rõ nét nhất. Ví dụ ở đối với vỏ C-C FG- Λ có $L/R=4$, giá trị lớn nhất của $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại vị trí biên $\xi = L/R$ là 150.5 so với giá trị lớn nhất tại điểm giữa là $\xi = L/2R$ là 5.0, tương tự với $\bar{\tau}_{\xi z}$ là -7.3 so với 0; với $\bar{\sigma}_{zz}$ là -3.5 so với -1.0.



4.6.a) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$

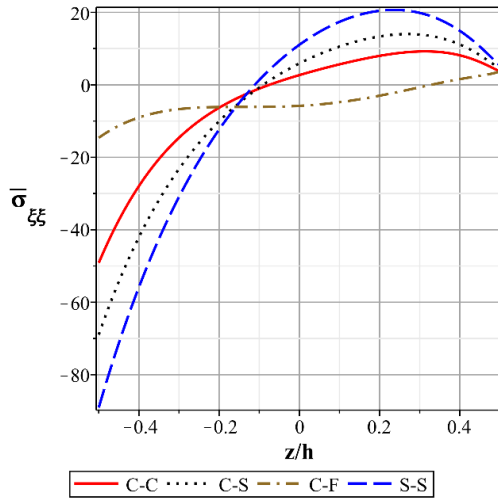
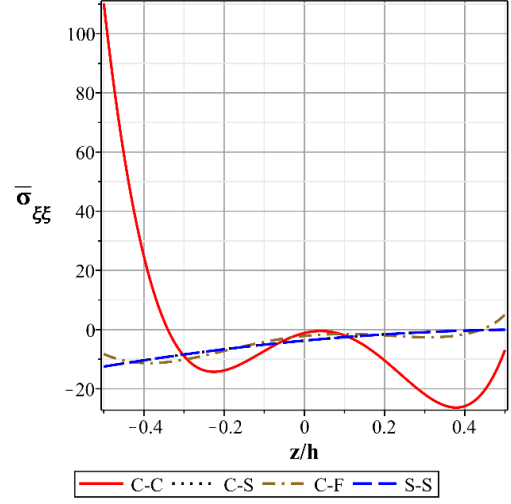
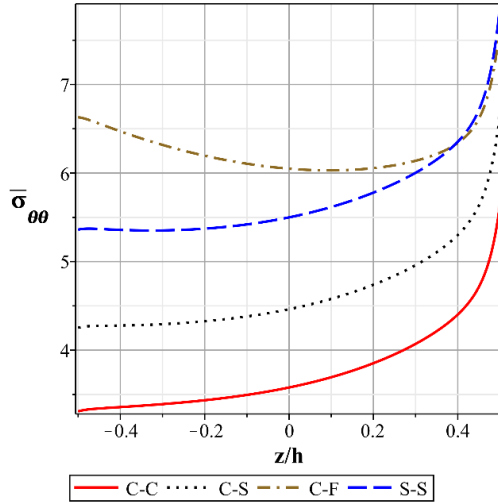
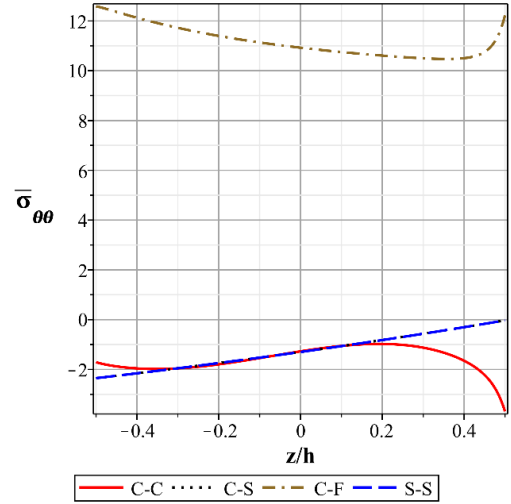
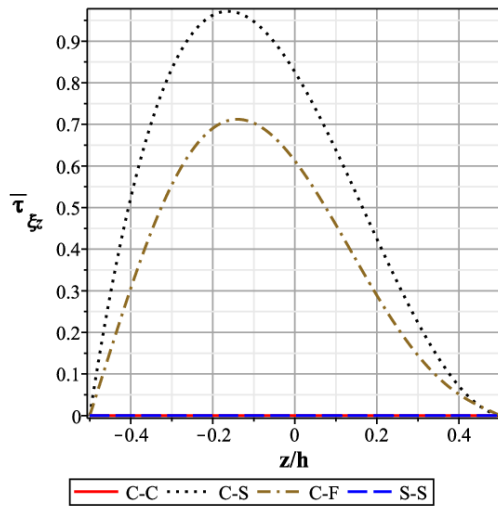
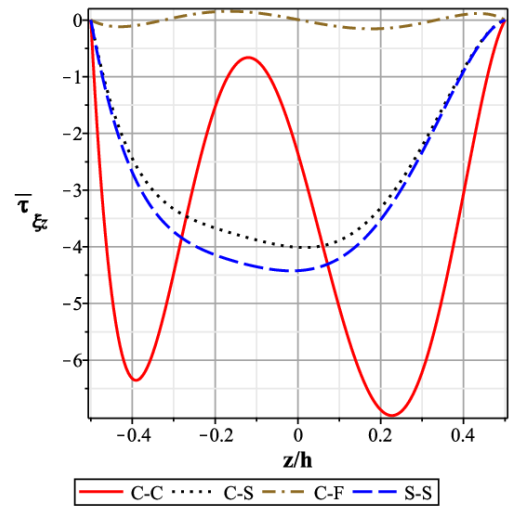


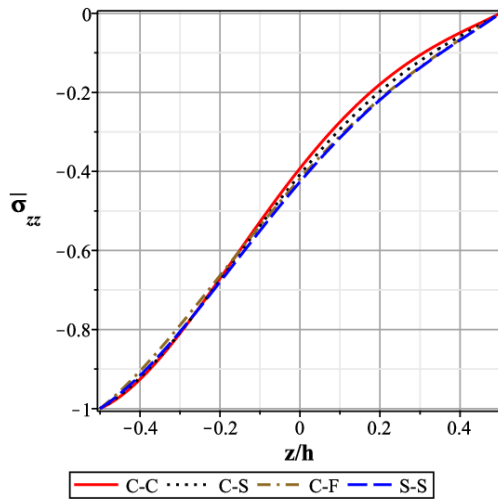
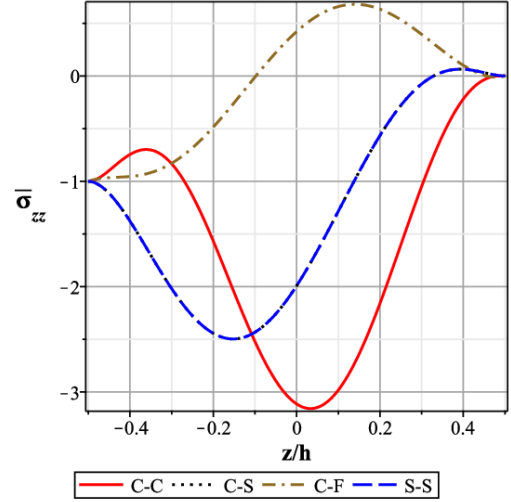
4.6.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/R$

4.6.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$ 4.6.e) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$ 4.6.g) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$ 4.6.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/R$ 4.6.f) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/R$ 4.6.h) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/R$

Hình 4.6 Ảnh hưởng của điều kiện biên đối với ứng suất của vỏ trụ FG- Λ có

$$V_{CNT}^* = 0.17, \quad L/R = 4, \quad R/h = 10, \quad T_{in} = 400K, \quad T_{out} = 300K$$

4.7.a) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$ 4.7.b) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/R$ 4.7.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$ 4.7.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/R$ 4.7.e) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$ 4.7.f) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/R$

4.7.g) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$ 4.7.h) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/R$ Hình 4.7 Ảnh hưởng của điều kiện biên đối với ứng suất của vỏ trụ FG- Λ có

$$V_{CNT}^* = 0.17, \quad L/R = 1, \quad R/h = 10, \quad T_{in} = 400K, \quad T_{out} = 300K$$

4.5. Khảo sát ảnh hưởng của các thông số vật liệu

Trong phần này thực hiện khảo sát ảnh hưởng của cấu hình phân bố CNT và tỷ lệ thể tích đối với ứng suất của vỏ. Tải trọng và các thông số vật liệu được cho như ở phần trước của luận án.

4.5.1. Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT

Để khảo sát ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT, thực hiện tính toán với 5 cấu hình phân bố CNT: FG- Λ , FG-V, UD, FG-O, FG-V.

Trường hợp 1: Vỏ chịu nhiệt độ bên trong và áp suất bên trong

Kết quả khảo sát ở mục 3.4, chương 3 đã cho thấy với vỏ trụ ngắn thì hiệu ứng biên tại cạnh biên $\xi = 0$ của vỏ có liên kết C-F thể hiện mạnh nhất. Do vậy, trong phần này lựa chọn khảo sát vỏ trụ ngắn với biên C-F có các thông số hình học như sau: $R=0.5m$; $L/R=2$; $R/h=20$. Vỏ chịu áp suất phân bố đều ở mặt trong $Q_0=10^7$ Pa. Nhiệt độ của vỏ ở bề mặt trong và bề mặt ngoài của vỏ lần lượt là $T_{in}=400$ K và $T_{out}=T_{ref}=300$ K. Giá trị tỷ lệ thể tích CNT $V_{CNT}^* = 0.28$

Kết quả tính toán phân bố nhiệt độ theo chiều dày, chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày tại vị trí giữa vỏ $\xi = L/2R$ và phân bố các thành phần ứng suất tại biên ngàm bên trái $\xi = 0$ được biểu diễn ở Hình 4.8.

Trường hợp 2: Vỏ chịu nhiệt độ bên ngoài và áp suất bên trong

Đối với vỏ trụ có độ dài tương đối trung bình, kết quả khảo sát ở mục 3.4, chương 3 cho thấy điều kiện biên tại bên này ($\xi = L/R$) không ảnh hưởng nhiều đến ứng suất ở cạnh biên còn lại ($\xi = 0$). Do đó, để thêm phần phong phú của kết quả, thực hiện khảo sát vỏ trụ có độ dài trung bình với biên C-C có thông số hình học: $R=0.5m$; $L/R=5$; $R/h=10$. Vỏ chịu áp suất phân bố đều ở mặt trong $Q_0=10^7$ Pa, nhiệt độ của vỏ ở mặt trong $T_{in} = T_{ref}=300$ K và mặt ngoài $T_{out}=400$ K. Tỷ lệ thể tích: $V_{CNT}^* = 0.28$. Kết quả tính toán phân bố nhiệt độ, chuyển vị, ứng suất của vỏ được thể hiện ở Hình 4.9.

Từ kết quả tính toán thể hiện ở trên Hình 4.8, Hình 4.9 có thể thấy rằng:

- Cấu hình phân bố CNT ảnh hưởng đến phân bố nhiệt độ trong vỏ. Đồ thị nhiệt độ FG-V và FG- Λ , FG-X và FG-O từng cặp một biến thiên ngược nhau, đồ thị phân bố nhiệt độ trường hợp UD nằm giữa các trường hợp khác và biến thiên tuyến tính (đồ thị mục a của Hình 4.8 và Hình 4.9). Đối với trường hợp đặt tải nhiệt ở mặt trong ($T_{in}=400$ K và $T_{out}= T_{ref}=300$ K) nhiệt độ của cấu hình FG-V có giá trị thấp nhất, FG- Λ có giá trị cao nhất (đồ thị Hình 4.8.a). Ngược lại, đối với trường hợp đặt tải nhiệt ở mặt ngoài ($T_{in}= T_{ref}=300$ K và $T_{out}=400$ K) nhiệt độ của cấu hình FG-V có giá trị cao nhất, FG- Λ có giá trị thấp nhất (đồ thị mục Hình 4.9.a). Điều này có thể giải thích do hệ số dẫn nhiệt của CNT rất lớn so với vật liệu nền. Trong trường hợp tải nhiệt bên trong, FG-V có phần lớn CNT tập trung ở mặt ngoài vỏ, nơi có nhiệt độ thấp hơn, ngược lại FG- Λ có phần lớn CNT tập trung ở mặt trong vỏ, nơi có nhiệt độ cao hơn.

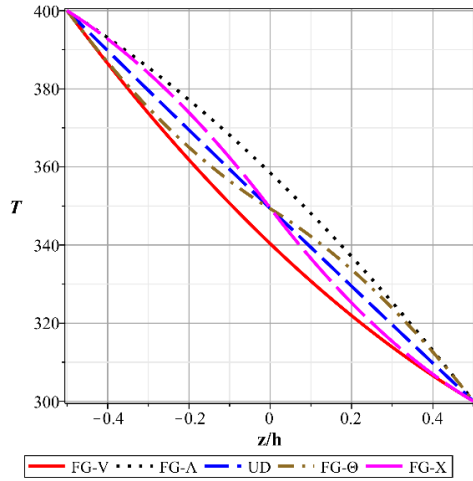
- Độ võng ở điểm giữa của vỏ phụ thuộc nhiều vào cấu hình phân bố CNT (đồ thị mục b của Hình 4.8 và Hình 4.9). Đối với vỏ chịu áp suất trong và nhiệt độ ở mặt trong thì độ võng trong trường hợp FG-X và FG-V có giá trị nhỏ nhất, tương ứng với giá trị tỷ lệ CNT ở mặt ngoài là lớn nhất (đồ thị Hình 4.8.b). Đối với vỏ chịu áp suất trong và nhiệt độ ngoài, độ võng trong trường hợp phân bố kiểu FG- Λ là nhỏ nhất (đồ thị Hình 4.9.b).

- Cấu hình phân bố CNT ảnh hưởng lớn đến ứng suất của vỏ tại điểm biên ($\xi = 0$) (đồ thị mục c, e, g, i của Hình 4.8 và Hình 4.9) và điểm giữa của vỏ ($\xi = L/2R$) (đồ thị mục d, f, h, k của Hình 4.8 và Hình 4.9). Các vị trí thể hiện sự ảnh hưởng lớn nhất của cấu hình phân bố CNT là tại các vị trí mặt trong ($z = -h/2$) hoặc mặt ngoài của vỏ ($z = h/2$) hoặc mặt trung bình của vỏ ($z = 0$). Điều này có thể giải thích là tại các vị trí này thì tỷ lệ thể tích CNT đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Về xu hướng biến thiên, các giá trị ứng suất FG-V và FG- Λ , FG-O và FG-X có xu hướng biến thiên ngược nhau xung quanh giá trị ứng suất của trường hợp UD.

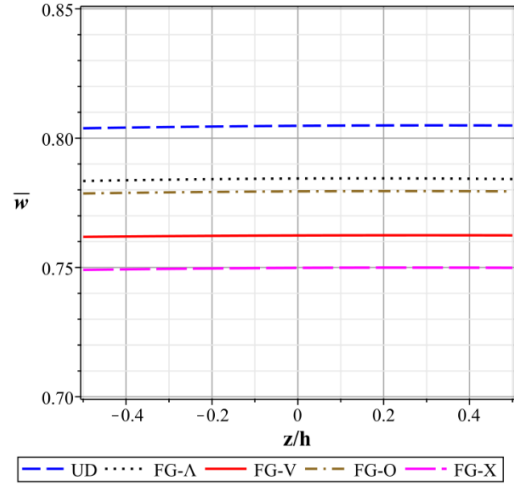
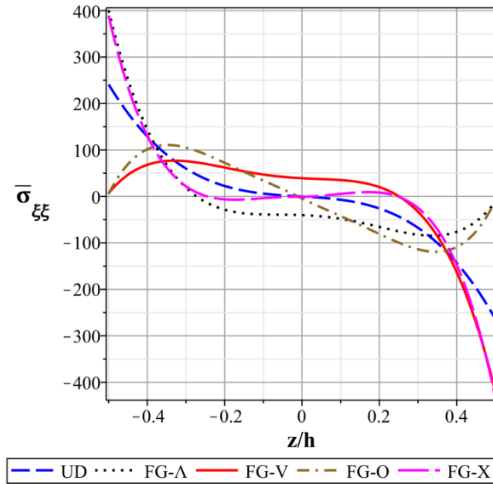
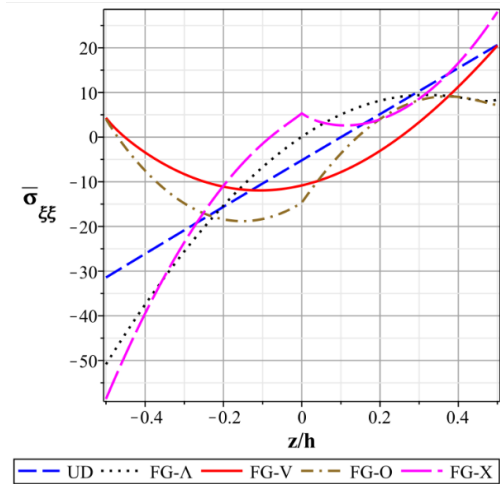
Đối với trường hợp 1 (áp suất trong và tải nhiệt ở mặt trong), giá trị lớn nhất của ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ trong trường hợp FG- Λ , FG-X là lớn nhất (đồ thị Hình 4.8.c), còn giá trị lớn nhất của $\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\tau}_{\xi z}$ trong trường hợp FG-V, FG-X là lớn nhất (đồ thị Hình 4.8.f, Hình 4.8.g).

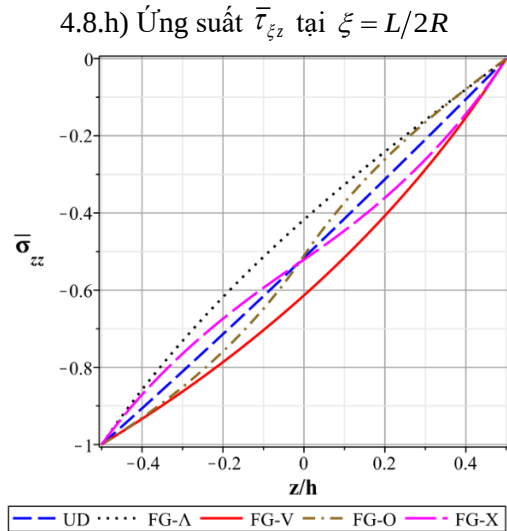
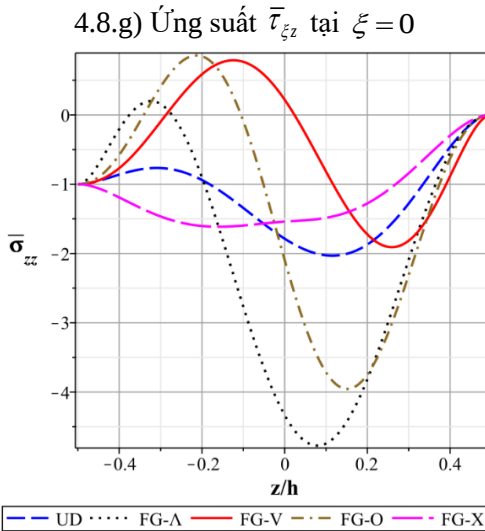
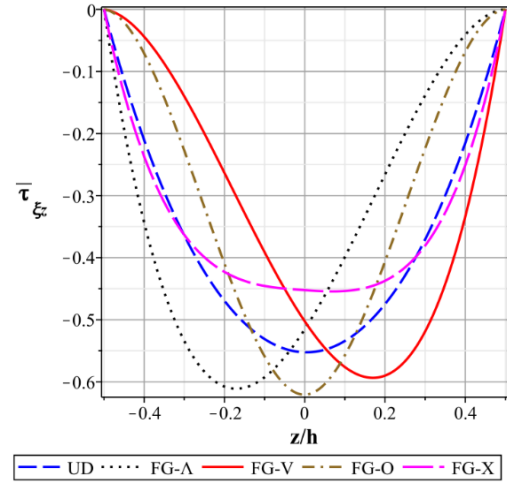
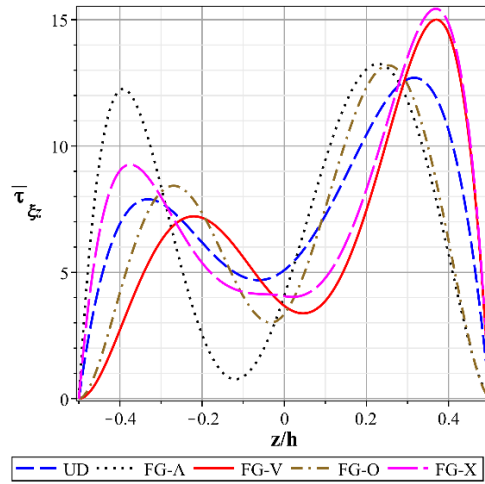
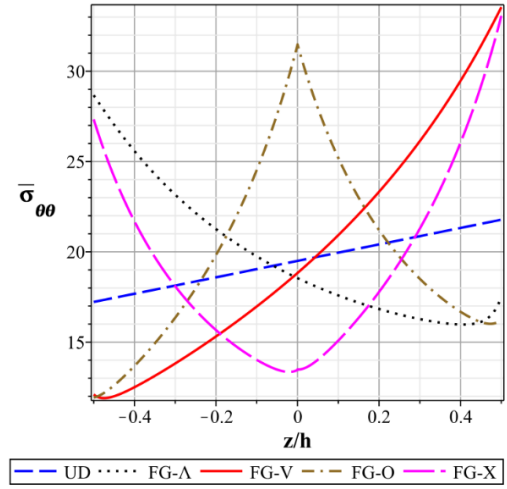
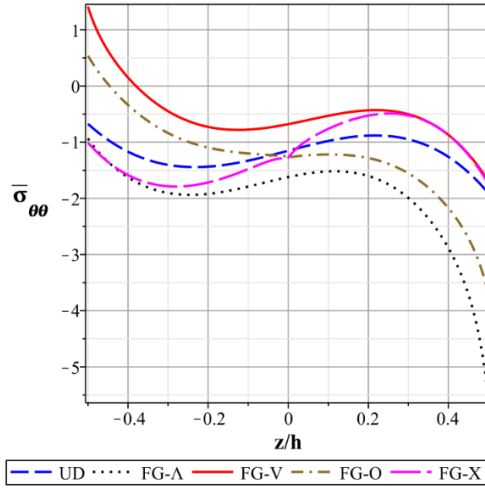
Đối với trường hợp 2 (áp suất trong và tải nhiệt ở mặt ngoài), giá trị lớn nhất của ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ của trường hợp phân bố FG-V, FG-X là lớn nhất (đồ thị Hình 4.9.c), còn giá trị lớn nhất của $\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\tau}_{\xi z}$ trong trường hợp FG- Λ , FG-X là lớn nhất (đồ thị Hình 4.9.f, Hình 4.9.g).

Từ kết quả trên cho thấy cần lựa chọn cấu hình phân bố CNT phù hợp với các trường hợp chịu tải. Trường hợp FG-X sẽ cho ta các giá trị ứng suất lớn nhất so với các trường hợp khác. Trong trường hợp này ở mặt trong và mặt ngoài có mật độ phân bố CNT lớn nhất sẽ có cơ tính tốt nhất, vật liệu ở vùng này sẽ phát huy hiệu quả chịu tải lớn.

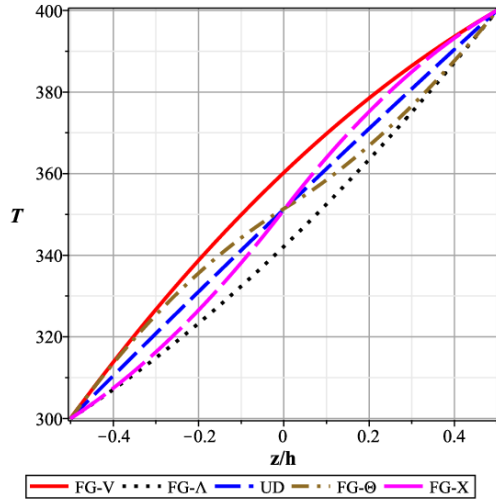


4.8.a) Phân bố nhiệt độ

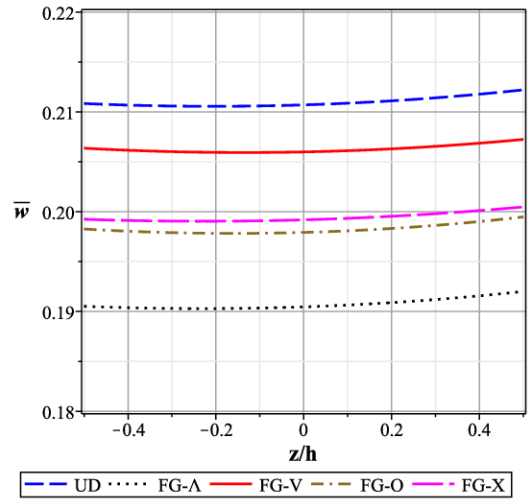
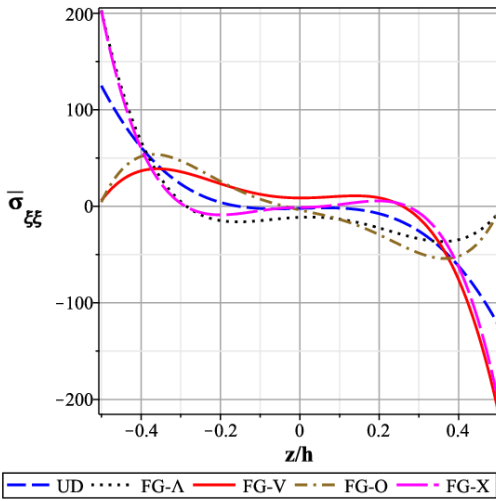
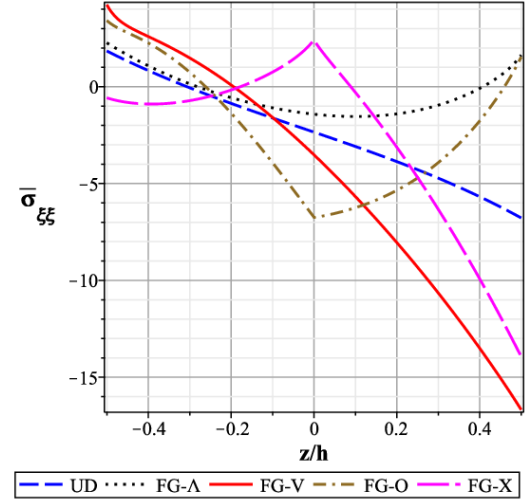
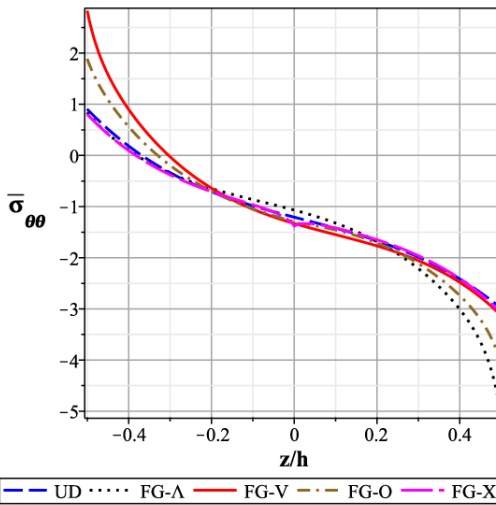
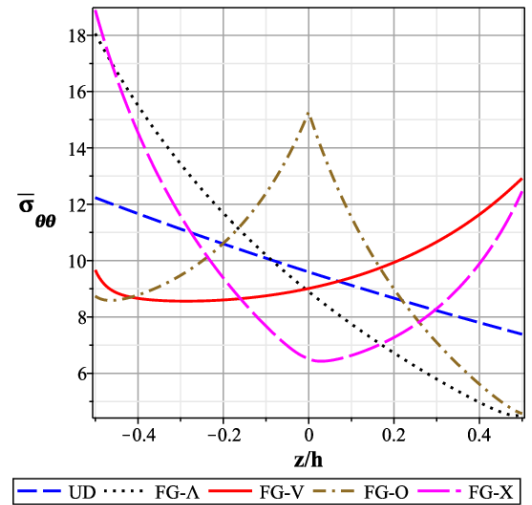
4.8.b) Độ võng tại $\xi = L/2R$ 4.8.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = 0$ 4.8.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$

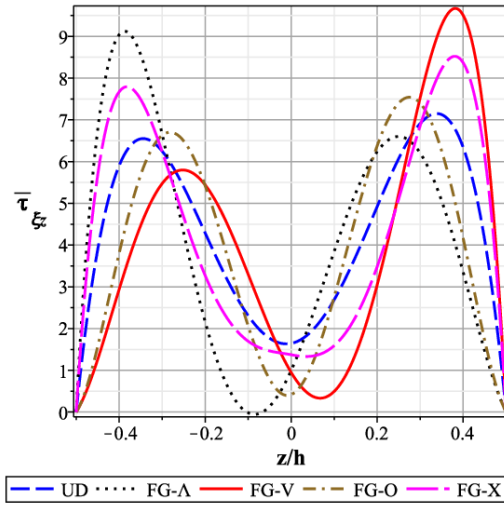
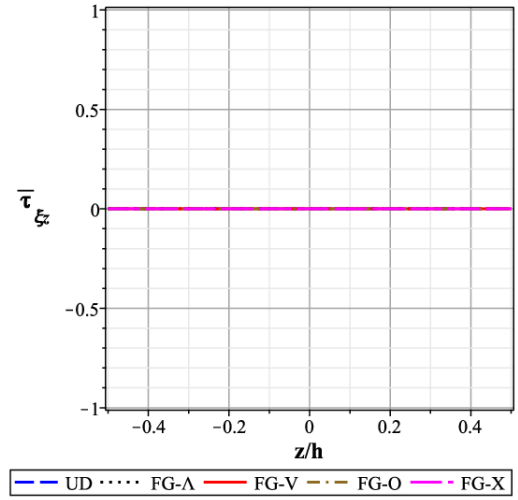
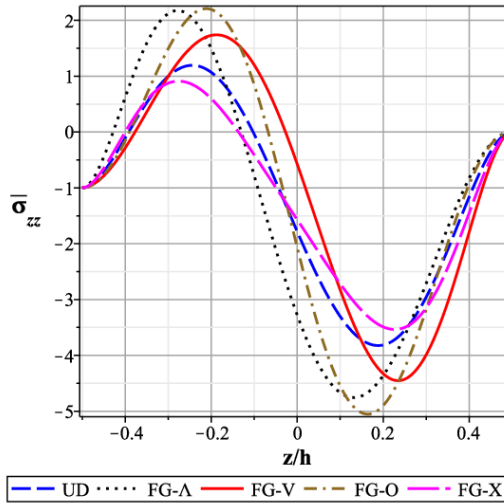
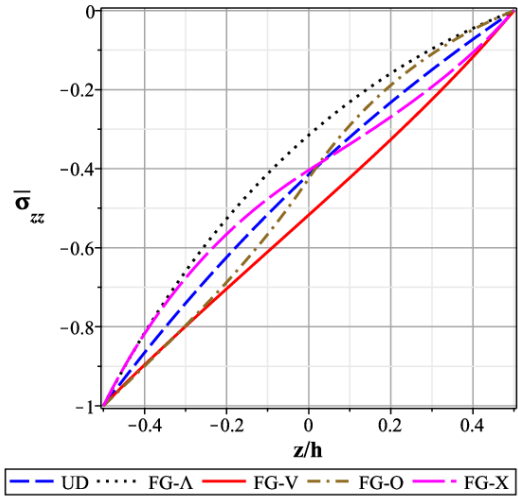


Hình 4.8 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đến nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ biên C-F với $L/R = 2$, $R/h = 20$, $T_{in} = 400K$, $T_{out} = 300K$



4.9.a) Phân bố nhiệt độ

4.9.b) Độ vồng tại $\xi = L/2R$ 4.9.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = 0$ 4.9.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$ 4.9.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = 0$ 4.9.f) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$

4.9.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi r}$ tại $\xi = 0$ 4.9.h) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$ 4.9.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = 0$ 4.9.k) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$

Hình 4.9 Ảnh hưởng của kiểu phân bố CNT đến nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ biên C-C với $L/R=5$, $R/h=10$, $T_{in}=300K$, $T_{out}=400K$

4.5.2. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT

Khảo sát vỏ với biên C-F có cấu hình phân bố FG- Λ . Thông số hình học của vỏ: $R=0.5m$; $L/R=2$; $R/h=20$. Nhiệt độ tại bề mặt trong và bề mặt ngoài của vỏ lần lượt là $T_{in}=400$ K và $T_{out}=300$ K. Các giá trị tỷ lệ thể tích CNT lần lượt là $V_{CNT}^* = 0.12; 0.17; 0.28$

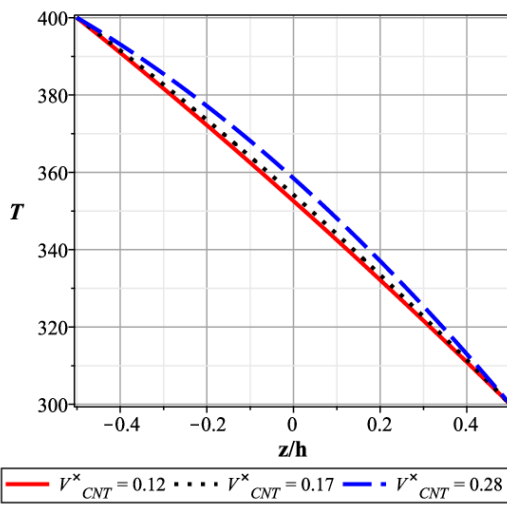
Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích CNT đến phân bố nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất được thể hiện ở Hình 4.10.

Từ kết quả khảo sát tính toán cho thấy rằng:

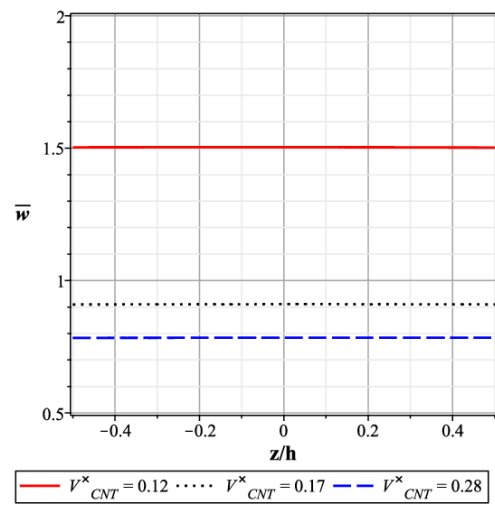
- Tỷ lệ thể tích CNT ảnh hưởng đến phân bố nhiệt độ theo chiều dày. Đối với vỏ FG- Λ , chịu tải trọng nhiệt ở mặt trong thì tại một vị trí tọa độ z , trường hợp có tỷ lệ thể tích CNT cao hơn sẽ có nhiệt độ cao hơn so với trường hợp có tỷ lệ thể tích CNT thấp hơn (đồ thị mục a Hình 4.10). Điều này có thể được giải thích là do vật liệu gia cường CNT có khả năng dẫn nhiệt cao hơn nhiều so với vật liệu nền.

- Độ võng tại vị trí điểm giữa vỏ giảm khi tỷ lệ thể tích CNT tăng lên (đồ thị mục b Hình 4.10). Do khi tỷ lệ thể tích CNT tăng lên thì độ cứng của vỏ tăng lên.

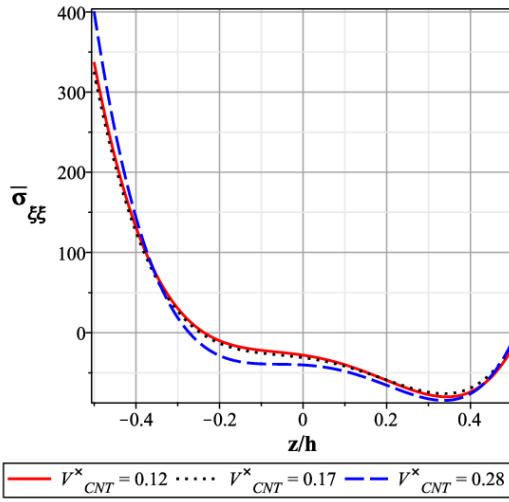
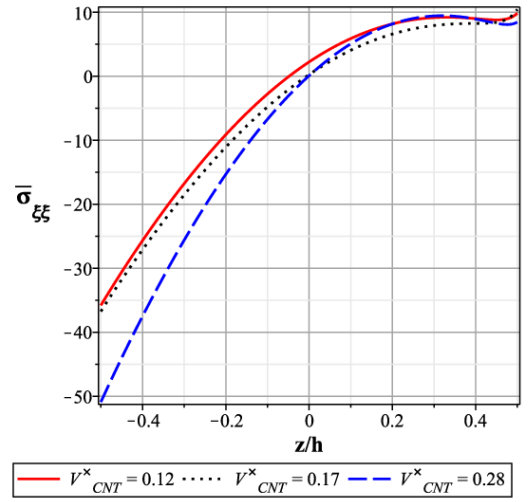
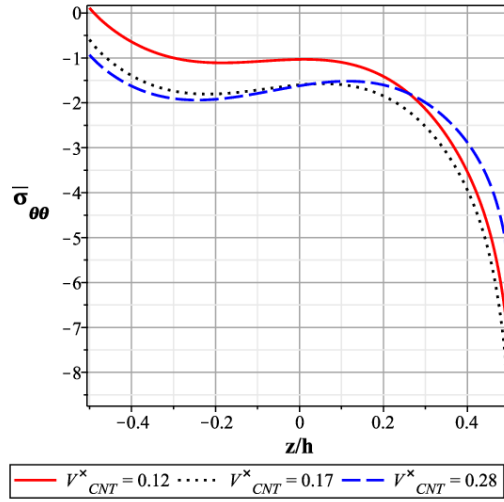
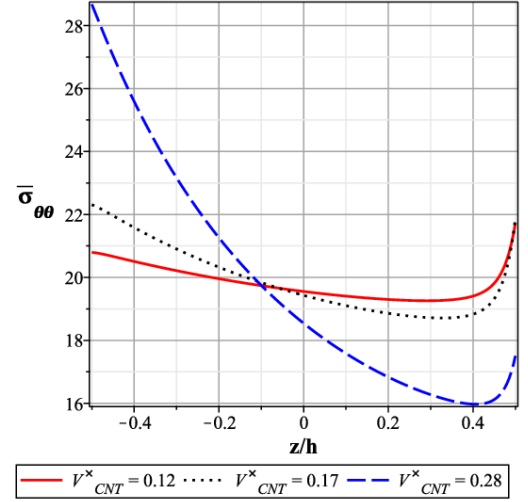
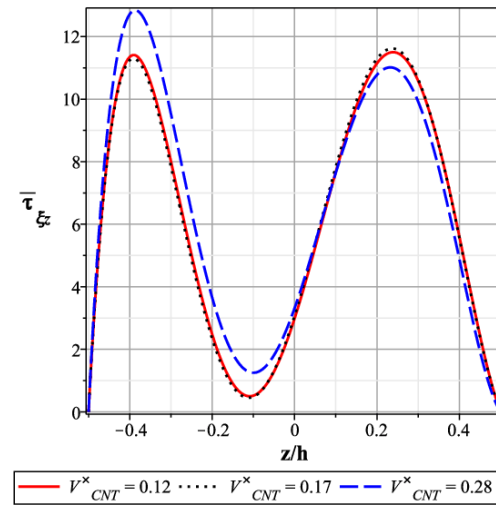
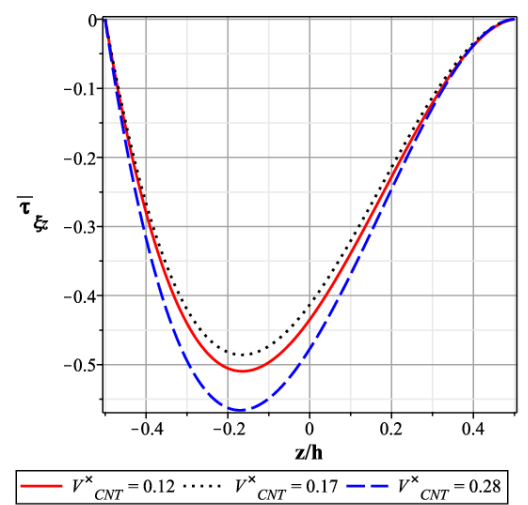
- Tỷ lệ thể tích CNT ảnh hưởng đến ứng suất trong vỏ. Tại vị trí giữa $\xi = L/2R$, khi tỷ lệ thể tích tăng lên thì giá trị lớn nhất của ứng suất tăng lên (đồ thị mục d, f, h, k Hình 4.10). Tại vị trí biên ngàm ($\xi = 0$), giá trị lớn nhất của các ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\tau}_{\xi z}$ khi $V_{CNT}^* = 0.28$ lớn hơn các trường hợp khác (đồ thị mục c, g Hình 4.10), giá trị lớn nhất của ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{zz}$ khi $V_{CNT}^* = 0.17$ lớn hơn các trường hợp khác (đồ thị mục e, i Hình 4.10).

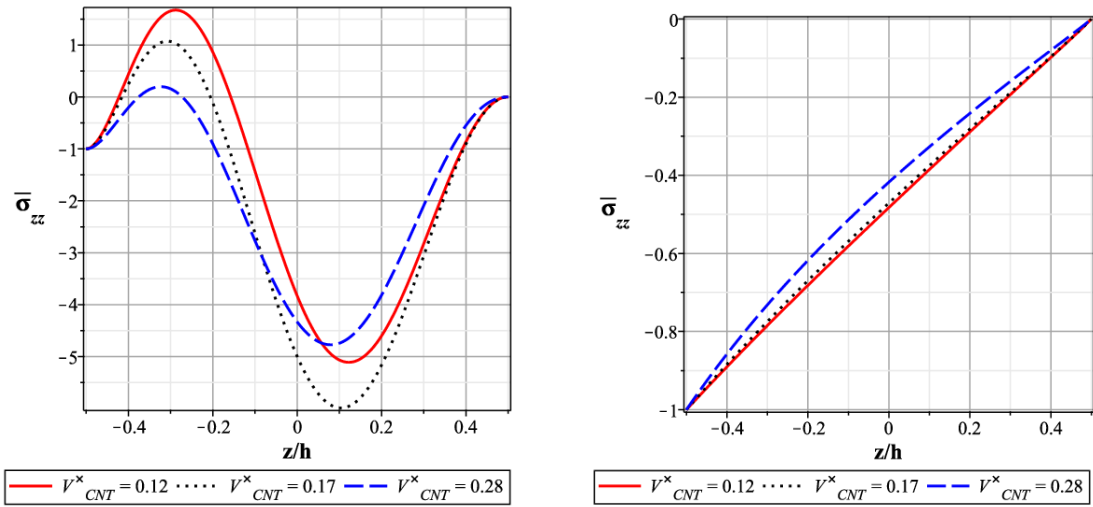


4.10.a) Phân bố nhiệt độ theo chiều dày



4.10.b) Độ võng tại $\xi = L/2R$

4.10.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = 0$ 4.10.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$ 4.10.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = 0$ 4.10.f) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$ 4.10.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = 0$ 4.10.h) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$

4.10.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = 0$ 4.10.k) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$

Hình 4.10 Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích V_{CNT}^* đối với nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ C-F FG- Λ có $L/R = 2$, $R/h = 20$, $T_{in} = 400K$, $T_{out} = 300K$

4.6. Khảo sát ảnh hưởng của tải trọng

4.6.1. Ảnh hưởng của loại tải trọng

Để đánh giá mức độ ảnh hưởng của các loại tải trọng cơ, tải trọng nhiệt, tải trọng cơ- nhiệt, thực hiện khảo sát vỏ trụ FG-CNTRC với các trường hợp:

- Vỏ chỉ chịu tải trọng cơ
- Vỏ chỉ chịu tải trọng nhiệt
- Vỏ chịu tải trọng cơ-nhiệt đồng thời.

Xét vỏ có cấu hình phân bố FG-V có biên C-C tỷ lệ thể tích CNT $V_{CNT}^* = 0.28$. Thông số hình học của vỏ: bán kính $R=0.5m$ với chiều dài tương đối $L/R=5$ và tỷ lệ độ dày $R/h = 10$. Nhiệt độ ở bề mặt trong là $T_{in} = 300K$. Xét các trường hợp vỏ có tải trọng như sau:

- Chỉ chịu tải trọng áp suất không đổi ở mặt trong $Q_0=10MPa$, nhiệt độ ở bề mặt ngoài $T_{out} = 300K$.
- Chỉ chịu tải trọng nhiệt với nhiệt độ ở bề mặt ngoài $T_{out} = 400K$

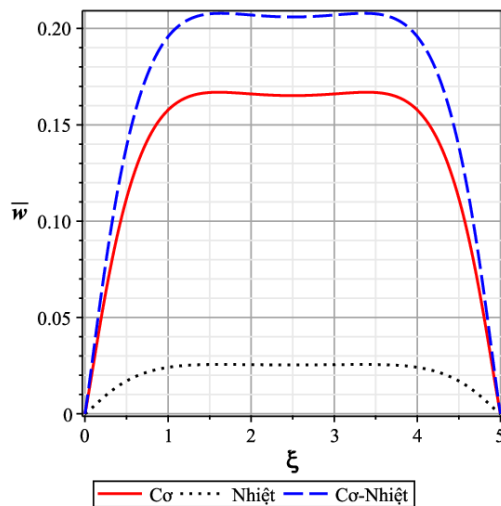
- Chịu tải trọng áp suất không đổi ở mặt trong $Q_0=10\text{MPa}$ và nhiệt độ ở bề mặt ngoài $T_{out} = 400\text{K}$

Kết quả khảo sát ảnh hưởng của của các loại tải đến chuyển vị và ứng suất của vỏ theo độ dày tại vị trí giữa $\xi = L/(2R)$ và vị trí biên ngàm $\xi = 0$ được thể hiện ở Hình 4.11.

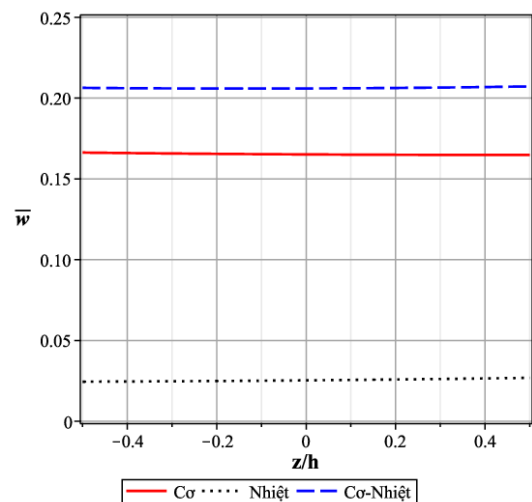
Từ các kết quả khảo sát có thể nhận xét rằng:

- Khi chỉ có tải nhiệt vẫn xuất hiện độ võng do sự giãn nở nhiệt. Khi có thêm tải trọng áp suất bên trong kết hợp với nguồn nhiệt bên ngoài độ võng của vỏ tăng lên. Tương tự ứng suất của trường hợp tải trọng cơ nhiệt đồng thời tăng lên khi so sánh với các trường hợp chỉ chịu tải trọng cơ hoặc tải trọng nhiệt.

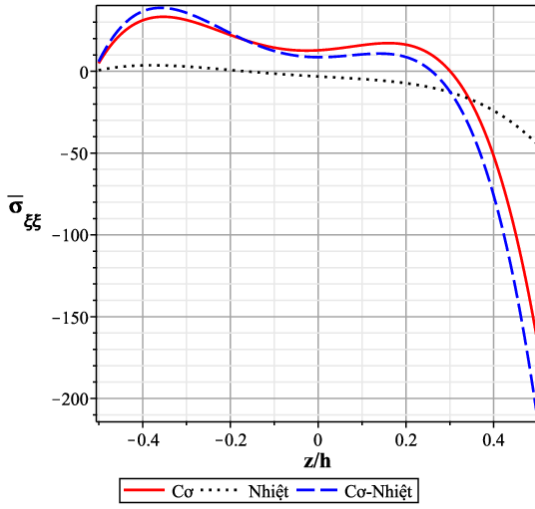
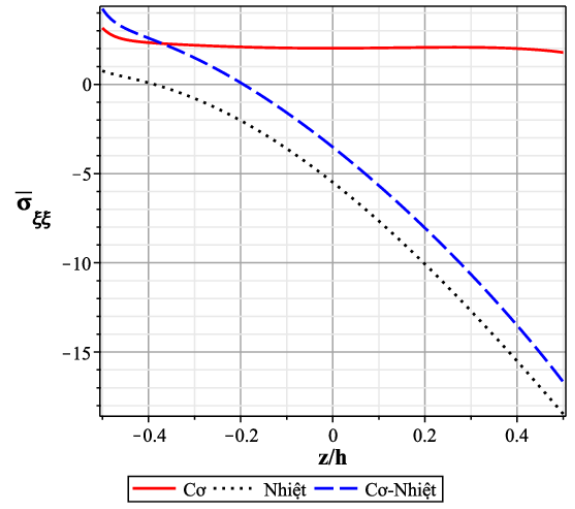
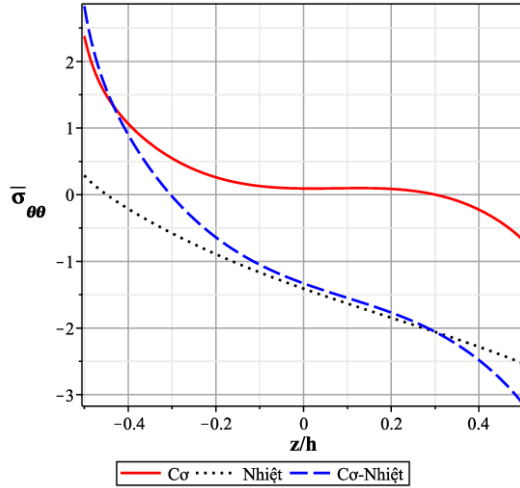
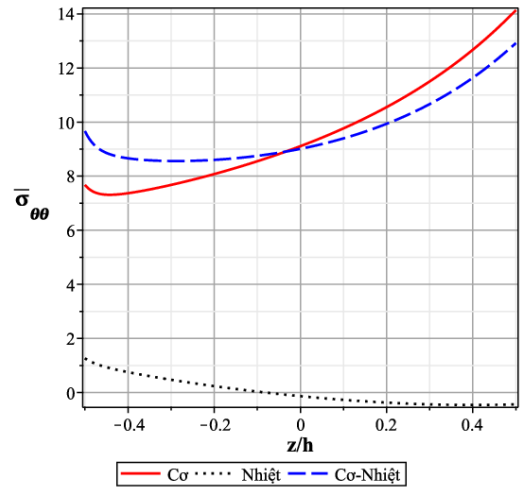
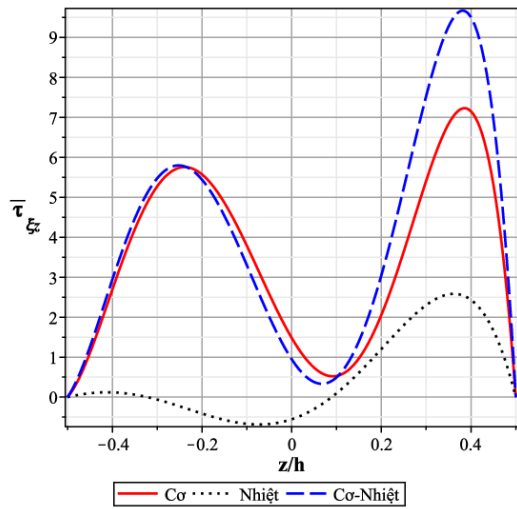
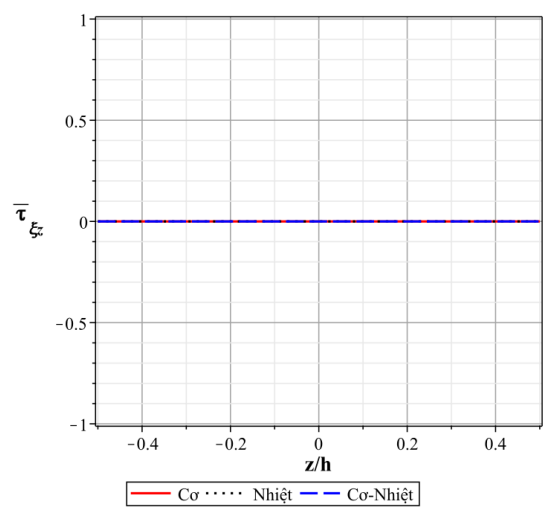
- Chuyển vị và ứng suất trong trường hợp chịu tải trọng cơ nhiệt đồng thời không phải là giá trị tổng đơn thuần của trường hợp chỉ chịu tải trọng nhiệt hoặc cơ.

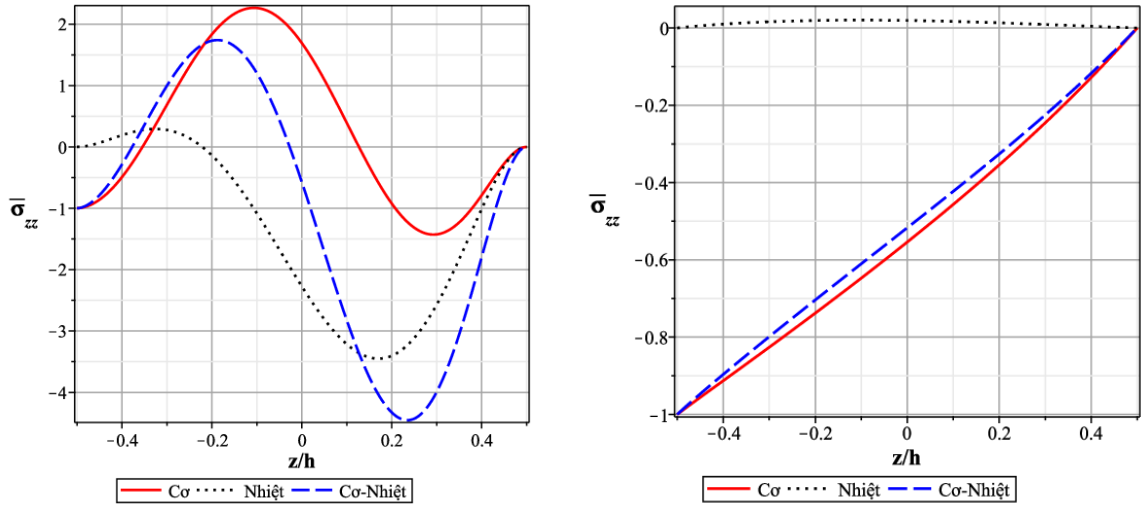


4.11.a) Độ võng theo chiều dài tại lớp giữa $z=0$



4.11.b) Độ võng theo chiều dày tại $\xi = L/2R$

4.11.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = 0$ 4.11.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$ 4.11.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = 0$ 4.11.f) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$ 4.11.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{zz}$ tại $\xi = 0$ 4.11.h) Ứng suất $\bar{\tau}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$

4.11.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = 0$ 4.11.k) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$

Hình 4.11 Ảnh hưởng của loại tải đến chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của vỏ trụ C-C FG-V với $V_{CNT}^* = 0.28$, $L/R = 5$, $R/h = 10$

4.6.2. Ảnh hưởng của nhiệt độ và tải trọng áp suất

Trong phần này thực hiện khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ và tải trọng áp suất đến chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của vỏ.

Trường hợp 1: Vỏ chịu tải áp suất trong, tải nhiệt độ ở mặt trong.

Xét vỏ có cấu hình phân bố FG- Λ có biên C-S chịu tải trọng trong $Q_0 = 10\text{MPa}$, tỷ lệ thể tích CNT $V_{CNT}^* = 0.28$. Thông số hình học của vỏ: $R = 0.5\text{m}$, $L/R = 3$, $R/h = 10$. Nhiệt độ ở bề mặt ngoài là $T_{out} = 300\text{K}$, nhiệt độ ở bề mặt trong với các giá trị khác nhau $T_{in} = 450, 400, 350, 300\text{K}$

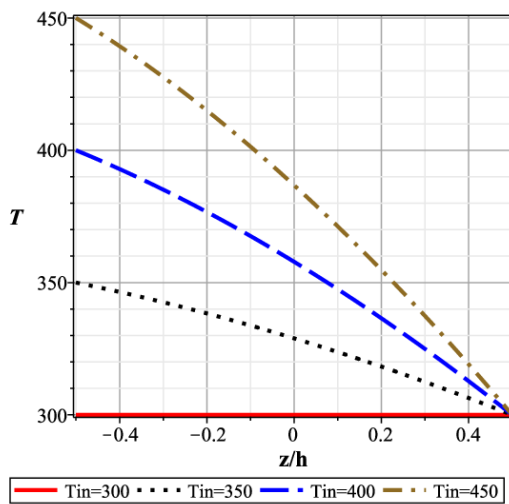
Kết quả khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ đến biến thiên chuyển vị và ứng suất theo độ dày tại vị trí giữa $\xi = L/(2R)$ và vị trí biên ngàm $\xi = 0$ được thể hiện ở Hình 4.12. Từ các kết quả có thể nhận xét rằng:

- Độ võng tại vị trí giữa của vỏ tăng lên khi nhiệt độ tăng lên (đồ thị Hình 4.12.b). Điều này có thể giải thích do tác dụng của tải trọng nhiệt làm cho biến dạng nhiệt của vỏ tăng lên và thông số độ cứng của vỏ giảm.

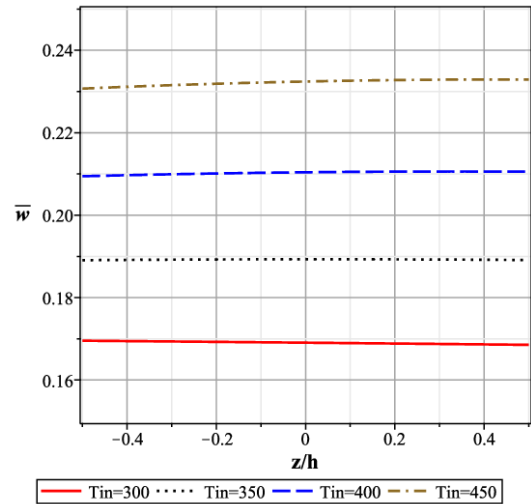
- Nhiệt độ bên trong vỏ ảnh hưởng lớn đến các giá trị ứng suất. Khi nhiệt độ càng tăng giá trị lớn nhất của ứng suất càng tăng lên.

Tại vị trí giữa vỏ $\xi = L/(2R)$, nhiệt độ ảnh hưởng rõ nét nhất đến các ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ở bề mặt trong (đồ thị mục d, f của Hình 4.12). Điều này có thể được giải thích là do tác dụng đồng thời của độ chênh lệch nhiệt độ ở mặt trong kết hợp với giá trị tỷ lệ thể tích CNT đạt giá trị cực đại (nhỏ nhất, lớn nhất) ở mặt trong. Ứng suất cắt $\bar{\tau}_{\xi z}$ đạt giá trị lớn nhất tại vị trí $z \approx -0.17; 0; 0.17$ đối với trường hợp có phân bố FG- Λ (đồ thị Hình 4.12.h).

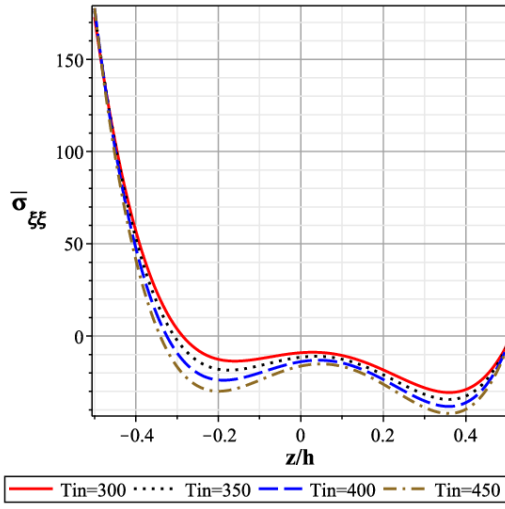
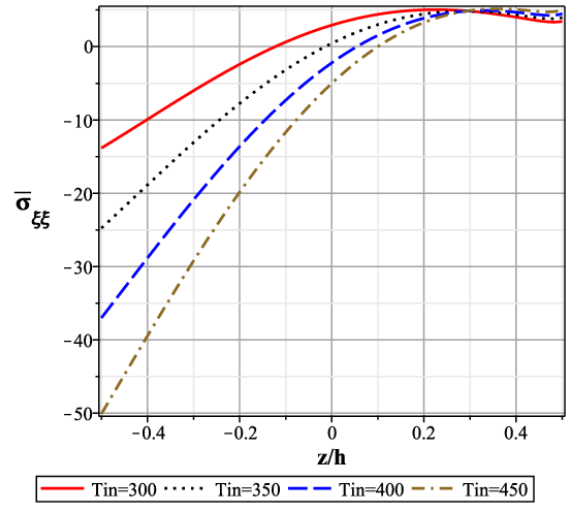
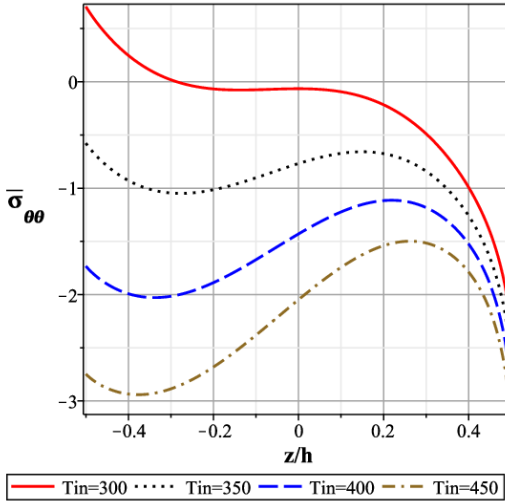
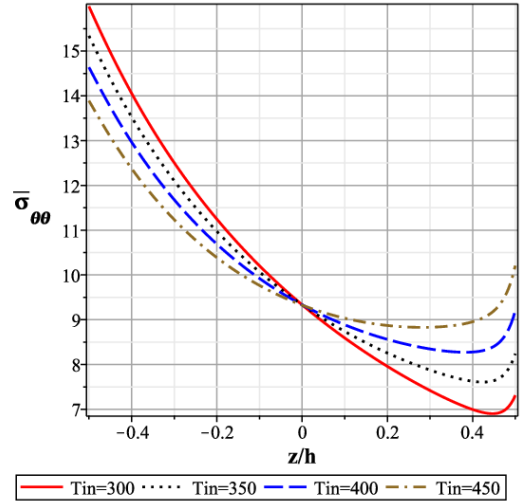
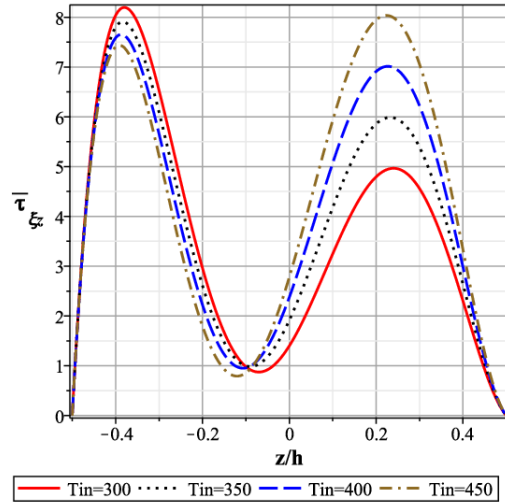
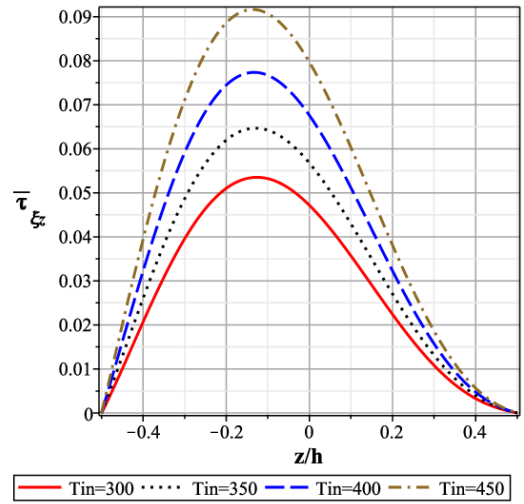
Tại vị trí biên ngàm $\xi = 0$, nhiệt độ ảnh hưởng rõ nét nhất đến ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ ở bề mặt trong (đồ thị Hình 4.12.e), nhưng ảnh hưởng không nhiều đến ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ (đồ thị Hình 4.12.c). Giá trị ứng suất cắt $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại biên ngàm cũng có giá trị lớn hơn nhiều so với giá trị tại điểm giữa. Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ có vị trí đạt cực đại là $z \approx 0.3$ (đồ thị Hình 4.12.g).

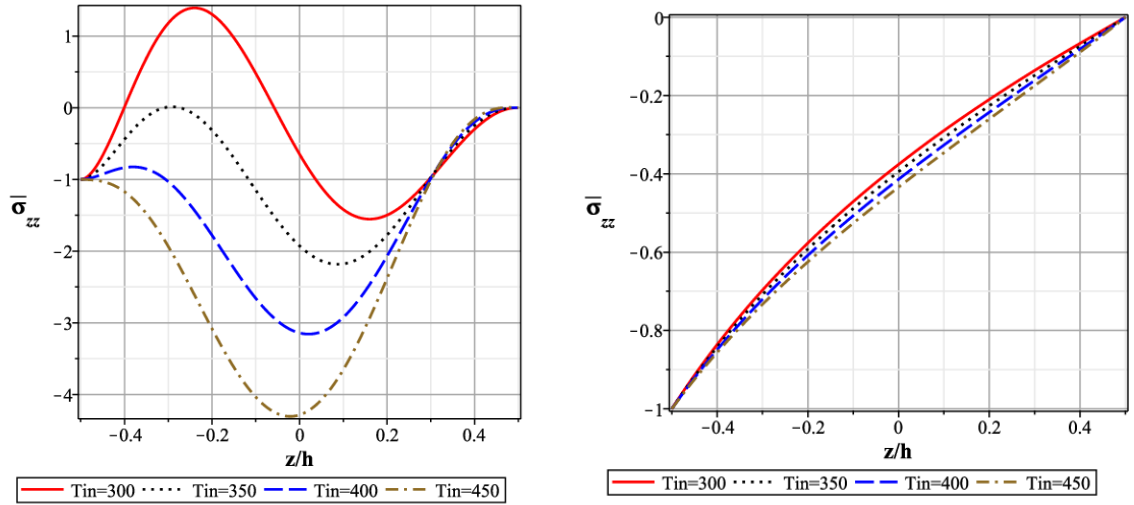


4.12.a) Phân bố nhiệt độ theo chiều dày



4.12.b) Độ võng tại $\xi = L/2R$

4.12.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = 0$ 4.12.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$ 4.12.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = 0$ 4.12.f) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$ 4.12.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = 0$ 4.12.h) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$

4.12.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = 0$ 4.12.k) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$

Hình 4.12 Ảnh hưởng của nhiệt độ bên trong đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ C-S FG- Λ với $V_{CNT}^* = 0.28$, $T_{out} = 300K$, $L/R = 3$, $R/h = 10$

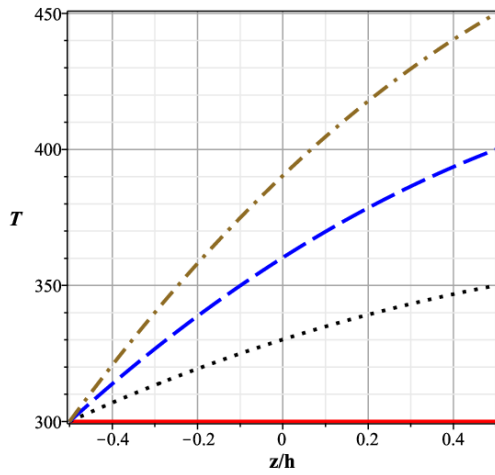
Trường hợp 2: Vỏ chịu tải áp suất trong, tải nhiệt độ ở mặt ngoài.

Thực hiện khảo sát ảnh hưởng của tải trọng nhiệt đối với vỏ trụ C-C FG-V. Thông số hình học của vỏ: $R=0.5m$; $L/R=5$; $R/h=10$. Vỏ chịu áp suất phân bố đều ở mặt trong $Q_0=10^7$ Pa. Tỷ lệ thể tích CNT $V_{CNT}^* = 0.28$. Nhiệt độ bề mặt ngoài lần lượt xét là $T_{out}=300; 350; 400; 450$ K, điều kiện nhiệt độ ở mặt trong là $T_{in}=300$ K. Hình 4.13 biểu diễn ảnh hưởng của tải trọng nhiệt đến phân bố nhiệt độ, chuyển vị, ứng suất tại vị trí giữa của vỏ. Từ các đồ thị ở Hình 4.13 có thể nhận xét rằng:

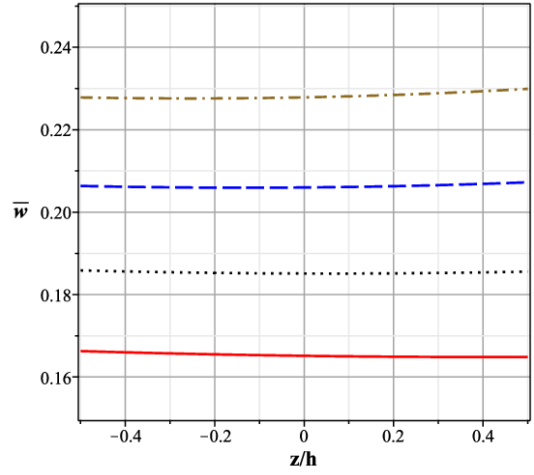
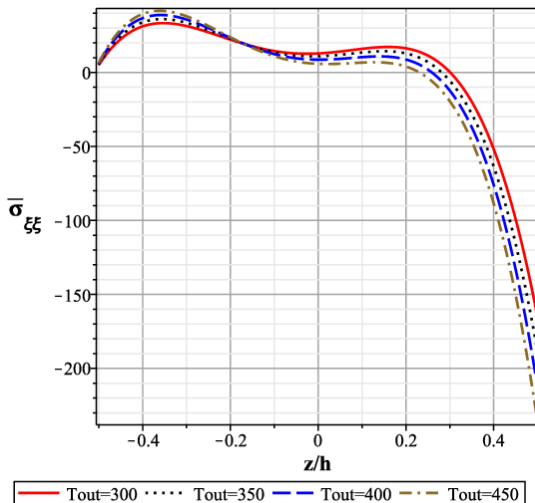
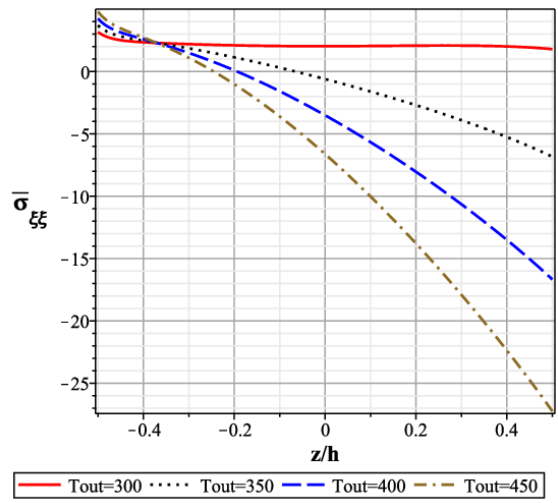
Tải trọng nhiệt ảnh hưởng lớn đến phân bố nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất của vỏ. Khi nhiệt độ bề mặt ngoài tăng thì chuyển vị tăng. Giá trị độ võng không thứ nguyên $\bar{w}$ ở vị trí giữa khi $T_{out}=450; 400; 350K$ tương ứng xấp xỉ bằng 138%; 125%; 112% so với trường hợp $T_{out}=300K$ (đồ thị mục b của Hình 4.13).

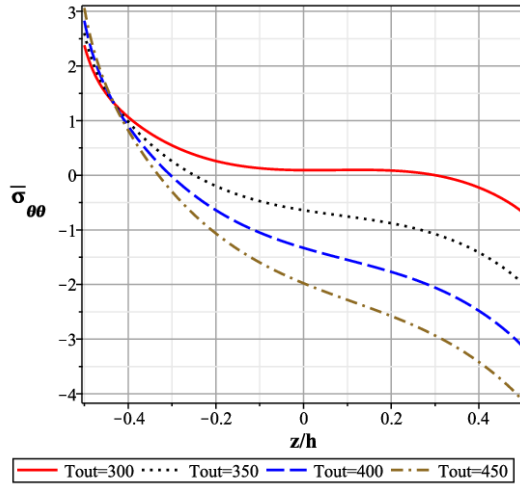
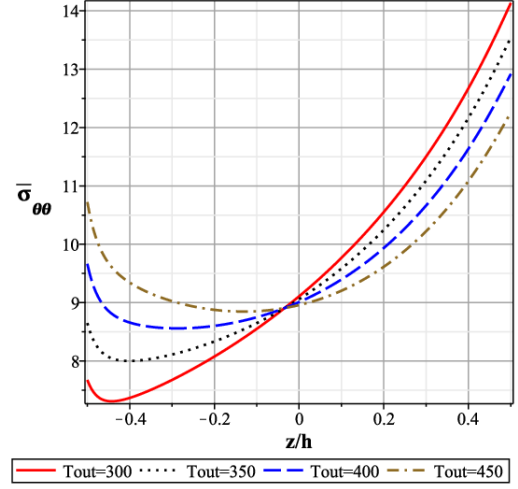
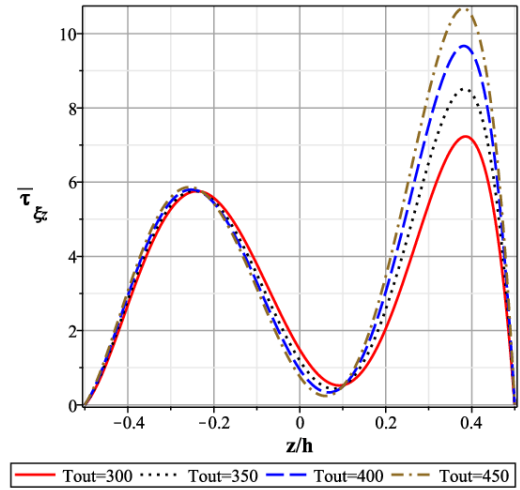
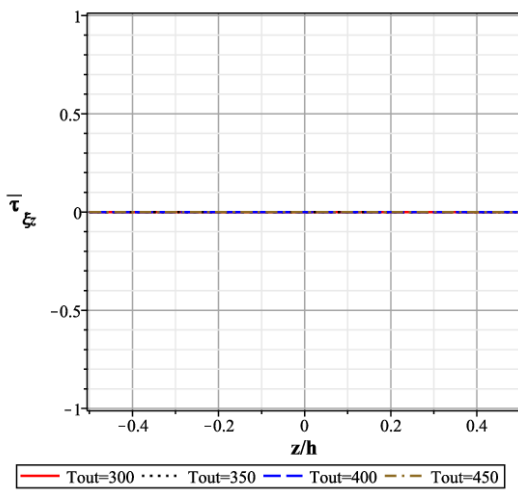
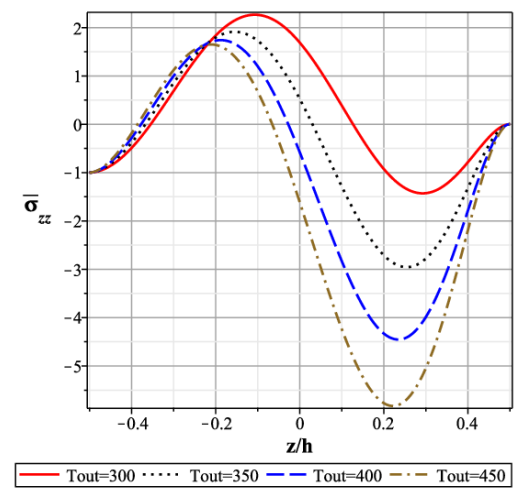
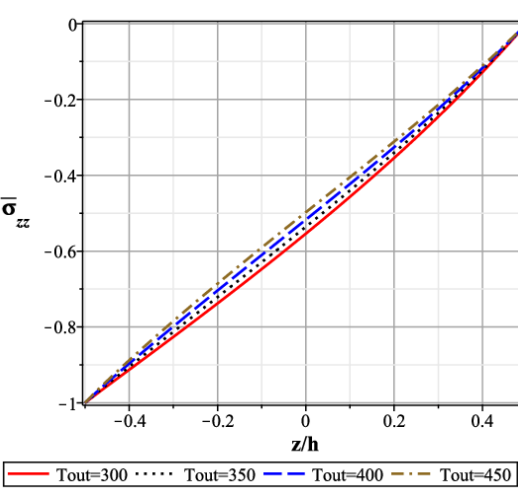
Về mức độ ảnh hưởng, tải trọng nhiệt ảnh hưởng đến các thành phần ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$ nhiều hơn đối với $\bar{\sigma}_{zz}$. Sự ảnh hưởng của tải trọng nhiệt đến ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tăng dần từ mặt trong ra mặt ngoài tương ứng với giá trị tỷ lệ thể

tích V_{CNT} tăng từ 0 đến giá trị lớn nhất (đồ thị mục c, d, e, f của Hình 4.13). Xu hướng của $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại vị trí giữa biến thiên quanh giá trị $\bar{\sigma}_{\theta\theta} \approx 9$ tại mặt có vị trí $\bar{z} = -0.04$ (đồ thị mục f của Hình 4.13). Giá trị $\bar{\sigma}_{zz}$ ở vị trí giữa biến thiên gần như tuyến tính từ giá trị áp suất ở mặt trong đến giá trị áp suất ở mặt ngoài (đồ thị mục k của Hình 4.13). Còn tại vị trí biên, giá trị $\bar{\sigma}_{zz}$ có sự khác biệt lớn giữa các trường hợp, khi nhiệt độ càng tăng thì giá trị $\bar{\sigma}_{zz}$ càng lớn (đồ thị mục i của Hình 4.13).



4.13.a) Phân bố nhiệt độ theo chiều dày

4.13.b) Độ võng tại $\xi = L/2R$ 4.13.c) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = 0$ 4.13.d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi\xi}$ tại $\xi = L/2R$

4.13.e) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = 0$ 4.13.f) Ứng suất $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ tại $\xi = L/2R$ 4.13.g) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = 0$ 4.13.h) Ứng suất $\bar{\tau}_{\xi z}$ tại $\xi = L/2R$ 4.13.i) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = 0$ 4.13.k) Ứng suất $\bar{\sigma}_{zz}$ tại $\xi = L/2R$

Hình 4.13 Ảnh hưởng của nhiệt độ đối với chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ C-C
FG-V với $V_{CNT}^* = 0.28$, $T_{in} = 300K$, $L/R = 5$, $R/h = 10$

Kết luận chương 4

Trong chương 4, luận án đã thực hiện giải quyết được các nội dung sau:

- Thực hiện giải quyết bài toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải cơ nhiệt theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi-3D và tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ. Cách tiếp cận giải tích của luận án cho phép giải bài toán trong các trường hợp vỏ trụ có điều kiện biên khác nhau, chịu tải trọng cơ hướng kính, tuần hoàn theo hướng vòng, nhiệt độ biến thiên theo chiều dày vỏ. Hàm phân bố nhiệt độ được xác định từ phương trình truyền nhiệt phản ánh được ảnh hưởng của cả yếu tố kết cấu, vật liệu và môi trường. Thực hiện kiểm chứng mô hình bài toán, phương pháp giải và chương trình tính toán bằng cách so sánh với kết quả đã được công bố.

- Thực hiện khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố điều kiện biên, thông số vật liệu, tải trọng nhiệt đến chuyển vị, ứng suất của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ. Các kết quả khảo sát cho thấy:

- + Cần thiết phải xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu của vỏ khi nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt, đặc biệt ở nhiệt độ cao do cơ tính chịu ảnh hưởng lớn bởi nhiệt độ.

- + Điều kiện biên ảnh hưởng lớn đến chuyển vị và ứng suất của vỏ chịu tải cơ nhiệt. Giá trị ứng suất tại vị trí biên lớn hơn nhiều so với ứng suất tại vùng giữa của vỏ, giá trị ứng suất của biên ngàm lớn hơn nhiều so với các kiểu liên kết khác; sự gia tăng đột ngột giá trị của các thành phần ứng suất tại khu vực biên là do ảnh hưởng của các hiệu ứng biên. Sự chênh lệch giá trị ứng suất càng lớn khi vỏ càng ngắn.

- + Kiểu phân bố CNT và tỷ lệ thể tích CNT ảnh hưởng lớn đến phân bố nhiệt độ, chuyển vị, ứng suất của vỏ. Nguyên nhân là có sự chênh lệch rất lớn của giá trị hệ số truyền nhiệt và các mô-đun đàn hồi giữa vật liệu CNT và nền.

Do đó cần lựa chọn kiểu phân bố CNT và tỷ lệ thể tích CNT phù hợp với dạng tải trọng trong từng trường hợp. Ví dụ các dạng tải trọng nhiệt tác động từ bên trong vỏ thì ưu tiên lựa chọn kiểu phân bố FG- Λ , FG-X; ngược lại tải trọng nhiệt tác động từ bên ngoài thì ưu tiên kiểu phân bố FG-V, FG-X.

+ Nhiệt độ ảnh hưởng lớn đến chuyển vị và ứng suất của vỏ. Khi nhiệt độ tăng thì cơ tính của vật liệu giảm do đó chuyển vị và ứng suất của vỏ đều tăng lên. Chuyển vị và ứng suất trong trường hợp chịu tải trọng cơ nhiệt đồng thời không đơn thuần chỉ là tổng cộng của tải trọng nhiệt và tải trọng cơ. Đây là một trong những điểm khác biệt quan trọng khi sử dụng mô hình tính toán có tính đến ảnh hưởng của trường nhiệt độ lên cơ tính vật liệu.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết quả đạt được và những đóng góp mới của luận án

Nghiên cứu ứng xử cơ học của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ và nhiệt độ là bài toán phức tạp, có ý nghĩa khoa học và thực tiễn. Với mong muốn thu được những kết quả có ý nghĩa thực tiễn, đồng thời góp phần bổ sung và hoàn thiện mô hình cũng như phương pháp tính toán đối với các kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC, luận án đã thực hiện phân tích tĩnh vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt độ. Từ các nội dung nghiên cứu đã được trình bày trong các chương, có thể rút ra các kết quả đã đạt được của luận án như sau:

- Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao kiểu quasi-3D có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang để thiết lập hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên tương ứng của vỏ trụ FG-CNTRC chịu đồng thời tải trọng cơ và nhiệt. Các kết quả khảo sát đã cho thấy sự cần thiết phải kể đến ảnh hưởng của ứng suất pháp tuyến ngang bao gồm khi tính toán đối với vỏ dày, còn khi khảo sát ứng suất ở khu vực biên thì khuyến cáo sử dụng ngay cả với vỏ mỏng.

- Mô hình tính trong luận án đã xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu. Giả thiết này hoàn toàn phù hợp với thực tế là các tính chất cơ lý của vật liệu chịu ảnh hưởng lớn bởi nhiệt độ. Mặt khác, trong khi đa số các nghiên cứu khác thường giả sử hàm phân bố nhiệt độ trong vỏ là dạng hàm cho trước (hằng số, tuyến tính, dạng sin...) để phù hợp với phương pháp giải thì luận án này sử dụng hàm phân bố nhiệt độ xác định từ phương trình truyền nhiệt. Phương trình truyền nhiệt đã bao hàm được ảnh hưởng của kết cấu, vật liệu, môi trường đến sự phân bố nhiệt độ trong vỏ. Do vậy, mô hình tính toán trong luận án đã mô tả sát thực tế hơn.

- Tiếp cận theo hướng giải tích bằng cách sử dụng chuỗi lượng giác để xấp xỉ cho hàm chuyển vị, tải trọng và phép biến đổi Laplace để tìm biểu thức nghiệm chuyển vị của hệ phương trình cân bằng. Phương pháp sử dụng trong luận án cho phép xử lý hiệu quả các trường hợp: vỏ có điều kiện khác nhau, tải trọng phân bố không đều, tải trọng tác dụng lên một phần vỏ... mà các phương pháp giải tích khác thường gặp khó khăn.

- Xây dựng chương trình tính toán và thực hiện các khảo sát nhằm đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố (điều kiện biên liên, vật liệu, hình học, tải trọng) đến ứng xử cơ học của vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ và nhiệt độ, trong đó luận án cũng đã tập trung phân tích trạng thái ứng suất tại vùng biên. Từ các kết quả khảo sát đã đưa ra những khuyến cáo quan trọng phục vụ quá trình tính toán thiết kế, khai thác sử dụng kết cấu bằng vật liệu FG-CNTRC.

Từ kết quả đã đạt được có thể rút ra một số đóng góp mới của luận án như sau:

- Xây dựng được hệ phương trình cân bằng và phương pháp giải để phân tích ứng xử tuyến tính của vỏ trụ composite cơ tính biến thiên được gia cường bởi các ống nano cacbon chịu tải trọng cơ nhiệt bằng cách tiếp cận giải tích, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao Quasi-3D. Phương pháp tính đã được so sánh, đối chiếu với kết quả đã được công bố cho thấy có cơ sở tin cậy.

- Các số liệu, kết quả khảo sát số trên nhiều lớp bài toán xem xét ảnh hưởng của các yếu tố: điều kiện biên, cách bố trí các ống nano cacbon gia cường, tải trọng, nhiệt độ, ... đến ứng xử tĩnh của vỏ. Các số liệu, nhận xét và kết luận có ý nghĩa khoa học, thực tiễn và định hướng ứng dụng.

2. Hướng phát triển tiếp theo của luận án

Trên cơ sở sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến ngang kiểu quasi 3D và tính chất vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ, luận án có thể phát triển theo các hướng sau đây:

- Phân tích ổn định, phân tích dao động tự do, phân tích đáp ứng động lực học của vỏ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt.
- Phân tích đáp ứng tĩnh đối với vỏ FG-CNTRC có kết cấu phức tạp (có lỗ rỗng, gân gia cường, trên nền đàn hồi, biên mềm, vỏ đa lớp...)
- Phân tích đáp ứng tĩnh đối với vỏ FG-CNTRC chịu tác động hỗn hợp của các loại tải trọng khác nhau (cơ, nhiệt, âm, khí động, tải trọng nổ,...)
- Nghiên cứu tối ưu hoá vật liệu và tối ưu hoá kết cấu vỏ FG-CNTRC.

DANH MỤC CÔNG BỐ CỦA ĐỀ TÀI LUẬN ÁN

1. **Dương Văn Quang**, Trần Ngọc Đoàn, Đoàn Trắc Luật, Vũ Xuân Đức, (2021). *Tính toán tĩnh vỏ trụ nanocomposite có cơ tính biến thiên theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất pháp tuyến*, Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ XV, pp. 779-788.
2. **Van Quang Duong**, Ngoc Doan Tran, Doan Trac Luat, Do Van Thom, (2022), Static analysis and boundary effect of FG-CNTRC cylindrical shells with various boundary conditions using quasi-3D shear and normal deformations theory, *Structures*, 44, pp. 828-850. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.08.039> (ISI, Q1)
3. **Van Quang Duong**, Lac Hong Nguyen, Ngoc Doan Tran, Trac Luat Doan, The Hung Tran (2022). *Bending Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite Cylindrical Shell Using Higher-Order Shear Deformation Theory*. Proceedings of the International Conference on Advanced Mechanical Engineering, Automation, and Sustainable Development 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-99666-6_90 (SCOPUS)
4. **Van Quang Duong**, Ngoc Doan Tran, Trac Luat Doan (2022). Static investigation of a functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell, double-ended clamped subjected to external pressure loads. *Journal of Science and Technique*, 17(05), pp. 28-46. <https://doi.org/10.56651/lqdtu.jst.v17.n05.528>
5. **Dương Văn Quang**, Trần Ngọc Đoàn, Đoàn Trắc Luật, (2022), *Tính toán vỏ trụ FG-CNTRC chịu tác dụng của tải trọng cơ nhiệt bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và thông số vật liệu phụ thuộc nhiệt độ*, Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI, Hà Nội, 02-03/12/2022, Tập 1, pp. 118-128.

6. **Duong Van Quang**, Tran Ngoc Doan, Doan Trac Luat, (2022). *Investigation of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell subjected to external pressure*, Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ 17, Hà Nội, 3/2022, pp. 612-624.
7. **Dương Văn Quang**, Trần Ngọc Đoàn, Đoàn Trắc Luật, Nguyễn Lê Hùng, (2023). *Nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ đến thông số vật liệu bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao*, Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ 18, Hà Nội, 3/2023.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] L. T. N. Trang, Ổn định nhiệt đàn hồi của tấm và vỏ thoải composite gia cường carbon nanotube, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 2021.
- [2] V. T. Long, Ổn định của vỏ FGM có lỗ rỗng và panel sandwich FG-CNTRC với các cạnh biên chịu liên kết đàn hồi, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 2022.
- [3] N. V. Thành, Ổn định và các đáp ứng phi tuyến của kết cấu tấm và vỏ composite gia cường các sợi nano cacbon, có cơ lý tính biến đổi (FG-CNTRC), Luận án Tiến sĩ, Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội, 2022.
- [4] P. T. Hiếu, Phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ và vỏ trống làm từ FGM và FG-CNTRC có kể đến tính đàn hồi của liên kết biên, Luận án Tiến sĩ, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 2022.
- [5] V. V. Thắm, Phân tích tính và động tấm, vỏ thoải hai độ cong composite nano carbon - áp điện, Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Xây dựng, 2021.
- [6] T. H. Q. Vũ Văn Thắm, Trần Minh Tú, Phân tích dao động riêng kết cấu tấm composite lớp gia cường ống nano cacbon có gắn lớp vật liệu áp điện, *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng* **13 (3V)**, (2019), pp. 42-54.

Tiếng Anh

- [7] H.-S. Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, **91**, (1), (2009), pp. 9-19.
- [8] K. M. Liew, Z. Pan, and L.-W. J. S. C. P. Zhang, Mechanics, The recent progress of functionally graded CNT reinforced composites and

structures, *Science China Physics, Mechanics, Astronomy*, **63**, (3), (2020), p. 234601.

- [9] R. P. Behera, P. Rawat, S. K. Tiwari, and K. K. Singh, A brief review on the mechanical properties of Carbon nanotube reinforced polymer composites, *Materials Today: Proceedings*, **22**, (2020), pp. 2109-2117.
- [10] N. P. Singh, V. Gupta, and A. P. Singh, Graphene and carbon nanotube reinforced epoxy nanocomposites: A review, *Polymer*, **180**, (2019), p. 121724.
- [11] R. I. Rubel, M. H. Ali, M. A. Jafor, and M. M. Alam, Carbon nanotubes agglomeration in reinforced composites: A review, *AIMS Materials Science*, **6**, (5), (2019), p. 756.
- [12] F. Ebrahimi and A. Dabbagh, A comprehensive review on modeling of nanocomposite materials and structures, *Journal of Computational Applied Mechanics*, **50**, (1), (2019), pp. 197-209.
- [13] K. Liew, Z. Lei, and L. Zhang, Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: a review, *Composite Structures*, **120**, (2015), pp. 90-97.
- [14] A. Alibeigloo, Elasticity solution of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel subjected to thermo mechanical load, *Composites Part B: Engineering*, **87**, (2016), pp. 214-226.
- [15] A. Alibeigloo, Three-dimensional thermoelasticity solution of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate embedded in piezoelectric sensor and actuator layers, *Composite Structures*, **118**, (2014), pp. 482-495.
- [16] H.-S. Shen and Y. Xiang, Postbuckling of axially compressed nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composites Part B: Engineering*, **67**, (2014), pp. 50-61.

- [17] H.-S. Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells, *Composite Structures*, **93**, (10), (2011), pp. 2496-2503.
- [18] A. Alibeigloo and K. Liew, Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate using theory of elasticity, *Composite Structures*, **106**, (2013), pp. 873-881.
- [19] A. Poursaghar and Z. Chen, Thermoelastic response of CNT reinforced cylindrical panel resting on elastic foundation using theory of elasticity, *Composites Part B: Engineering*, **99**, (2016), pp. 436-444.
- [20] A. Poursaghar, R. Moradi-Dastjerdi, M. Yas, A. Ghorbanpour Arani, and S. Kamarian, Three-dimensional analysis of carbon nanotube-reinforced cylindrical shells with temperature-dependent properties under thermal environment, *Polymer Composites*, **39**, (4), (2018), pp. 1161-1171.
- [21] V. Firsanov and T. Doan, Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory, *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, **6**, (2), (2015).
- [22] T. N. Doan, N. T. Thanh, P. Van Chuong, N. C. Tho, N. T. Ta, and H. N. Nguyen, Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory, *Composite Structures*, **232**, (2020), p. 111526.
- [23] N. D. Tran and T. T. Nguyen, Thermoelastic response and boundary effect of cross-ply laminated cylindrical shells based on a quasi-3D type higher-order shear deformation theory, *International Journal of Pressure Vessels Piping*, **194**, (2021), p. 104534.
- [24] T. N. Doan, A. T. Nguyen, P. Van Binh, T. Van Hung, V. Q. Tru, and D. T. Luat, Static analysis of FGM cylindrical shells and the effect of stress concentration using quasi-3D type higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, **262** (1), (2020), p. 113357.

- [25] B. D. Malhotra, M. Ali, B. Malhotra, and M. Ali, *Chapter 5 - Nanocomposite Materials: Biomolecular Devices*: William Andrew Publishing, (2018), pp. 145-159.
- [26] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*, **354**, (6348), (1991), pp. 56-58.
- [27] B. Ribeiro, E. Botelho, M. Costa, and C. Bandeira, Carbon nanotube buckypaper reinforced polymer composites: A review, *Polímeros*, **27**, (2017).
- [28] S. Iijima and T. Ichihashi, Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter, *Nature*, **363**, (6430), (1993), pp. 603-605.
- [29] D. Bethune, C. H. Kiang, M. De Vries, G. Gorman, R. Savoy, J. Vazquez, and R. Beyers, Cobalt-catalysed growth of carbon nanotubes with single-atomic-layer walls, *Nature*, **363**, (6430), (1993), pp. 605-607.
- [30] M. Loos, *Carbon nanotube reinforced composites: CNT Polymer Science and Technology*: Elsevier, (2014),
- [31] G. Overney, W. Zhong, and D. Tomanek, Structural rigidity and low frequency vibrational modes of long carbon tubules, *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules Clusters*, **27**, (1), (1993), pp. 93-96.
- [32] E. W. Wong, P. E. Sheehan, and C. M. Lieber, Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes, *Science*, **277**, (5334), (1997), pp. 1971-1975.
- [33] J. P. Salvetat, A. J. Kulik, J. M. Bonard, G. A. D. Briggs, T. Stöckli, K. Méténier, S. Bonnamy, F. Béguin, N. A. Burnham, and L. Forró, Elastic modulus of ordered and disordered multiwalled carbon nanotubes, *Advanced Materials*, **11**, (2), (1999), pp. 161-165.
- [34] J. P. Lu, Elastic properties of single and multilayered nanotubes, *Journal of physics chemistry of solids*, **58**, (11), (1997), pp. 1649-1652.

- [35] M. S. Shaffer and A. H. Windle, Fabrication and characterization of carbon nanotube/poly (vinyl alcohol) composites, *Advanced materials*, **11**, (11), (1999), pp. 937-941.
- [36] D. Qian, E. C. Dickey, R. Andrews, and T. Rantell, Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites, *Applied physics letters*, **76**, (20), (2000), pp. 2868-2870.
- [37] B. Safadi, R. Andrews, and E. Grulke, Multiwalled carbon nanotube polymer composites: synthesis and characterization of thin films, *Journal of applied polymer science*, **84**, (14), (2002), pp. 2660-2669.
- [38] M. Cadek, J. Coleman, V. Barron, K. Hedicke, and W. Blau, Morphological and mechanical properties of carbon-nanotube-reinforced semicrystalline and amorphous polymer composites, *Applied physics letters*, **81**, (27), (2002), pp. 5123-5125.
- [39] S. Ruan, P. Gao, X. G. Yang, and T. Yu, Toughening high performance ultrahigh molecular weight polyethylene using multiwalled carbon nanotubes, *Polymer*, **44**, (19), (2003), pp. 5643-5654.
- [40] P. Pötschke, T. Fornes, and D. Paul, Rheological behavior of multiwalled carbon nanotube/polycarbonate composites, *Polymer*, **43**, (11), (2002), pp. 3247-3255.
- [41] H.-S. Shen and C.-L. Zhang, Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates, *Materials Design*, **31**, (7), (2010), pp. 3403-3411.
- [42] H.-S. Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells, *Composite Structures*, **93**, (8), (2011), pp. 2096-2108.
- [43] H.-S. Shen and Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, **213**, (2012), pp. 196-205.
- [44] H. Zhang, C. Gao, H. Li, F. Pang, T. Zou, H. Wang, and N. Wang, Analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite

structures: a review, *Nanotechnology Reviews*, **9**, (1), (2020), pp. 1408-1426.

- [45] S. D. Kumar, M. Ravichandran, S. Alagarsamy, C. Chanakyan, M. Meignanammoorthy, and S. Sakthivelu, Processing and properties of carbon nanotube reinforced composites: A review, *Materials Today: Proceedings*, (2020).
- [46] Z.-X. Wang and H.-S. Shen, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Computational Materials Science*, **50**, (8), (2011), pp. 2319-2330.
- [47] P. Zhu, Z. Lei, and K. M. Liew, Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, **94**, (4), (2012), pp. 1450-1460.
- [48] Z.-X. Wang and H.-S. Shen, Nonlinear vibration and bending of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets, *Composites Part B: Engineering*, **43**, (2), (2012), pp. 411-421.
- [49] H.-S. Shen, Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells, *Composites Part B: Engineering*, **43**, (3), (2012), pp. 1030-1038.
- [50] H.-S. Shen and Y. Xiang, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environment, *Composites Part B: Engineering*, **52**, (2013), pp. 311-322.
- [51] D. G. Ninh and D. H. Bich, Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads, *Aerospace Science Technology*, **77**, (2018), pp. 595-609.
- [52] L. Trang and H. Tung, Tangential Edge Constraint Sensitivity of Nonlinear Stability of CNT-Reinforced Composite Plates under Compressive and Thermomechanical Loadings, *Journal of Engineering Mechanics*, **144**, (2018).

- [53] H. Tung and L. Trang, Thermal postbuckling of shear deformable CNT-reinforced composite plates with tangentially restrained edges and temperature-dependent properties, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **33**, (2018), p. 089270571880458.
- [54] L. T. N. Trang and H. Van Tung, Thermomechanical postbuckling of higher order shear deformable CNT-reinforced composite plates with elastically restrained unloaded edges, *Polymers and Polymer Composites*, **29**, (9_suppl), (2021), pp. S857-S875.
- [55] H. Tung and L. Trang, Imperfection and tangential edge constraint sensitivities of thermomechanical nonlinear response of pressure-loaded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels, *Acta Mechanica*, **229**, (2018).
- [56] L. Trang and H. Tung, Thermomechanical nonlinear analysis of axially compressed carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations with tangentially restrained edges, *Journal of Thermal Stresses*, **41**, (2018), pp. 1-21.
- [57] L. T. N. Trang and H. V. Tung, Buckling and postbuckling of carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels subjected to axial compression in thermal environments, *Vietnam Journal of Mechanics*, **40**, (1), (2018), pp. 47-61.
- [58] L. Trang and H. Tung, Nonlinear stability of CNT-reinforced composite cylindrical panels with elastically restrained straight edges under combined thermomechanical loading conditions, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **33**, (2018), p. 089270571880513.
- [59] L. T. N. Trang and H. V. Tung, Thermally induced postbuckling of higher order shear deformable CNT-reinforced composite flat and cylindrical panels resting on elastic foundations with elastically restrained edges, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **50**, (8), (2022), pp. 2812-2835.
- [60] L. Trang and H. Tung, Thermomechanical nonlinear stability of pressure-loaded CNT-reinforced composite doubly curved panels resting on elastic foundations, *Nonlinear Engineering*, **8**, (2019).

- [61] H. V. Tung, N. D. Kien, and L. T. N. Trang, Thermal postbuckling analysis of FG-CNTRC doubly curved panels with elastically restrained edges using Reddy's higher order shear deformation theory, *Vietnam Journal of Mechanics*, **42**, (3), (2020), pp. 307-320.
- [62] H. V. Tung and V. T. Long, Buckling and postbuckling of CNT-reinforced composite sandwich cylindrical panels subjected to axial compression in thermal environments, *Vietnam Journal of Mechanics*, **41**, (3), (2019), pp. 217-231.
- [63] V. T. Long and H. Van Tung, Thermal postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with tangentially restrained edges and temperature-dependent properties, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **33**, (10), (2020), pp. 1396-1428.
- [64] H. V. Tung, D. N. Mai, and V. T. Long, Nonlinear response of doubly curved sandwich panels with CNT-reinforced composite core and elastically restrained edges subjected to external pressure in thermal environments, *Vietnam Journal of Mechanics*, **44**, (1), (2021), pp. 15-28.
- [65] V. T. Long and H. V. Tung, Thermomechanical postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with elastically restrained unloaded edges, *Journal of Thermal Stresses*, **42**, (5), (2019), pp. 658-680.
- [66] D. T. Dong, V. H. Nam, N. T. Phuong, L. N. Ly, V. M. Duc, N. Van Tien, T. Q. Minh, V. T. Hung, and P. H. Quan, An analytical approach of nonlinear buckling behavior of longitudinally compressed carbon nanotube-reinforced (CNTR) cylindrical shells with CNTR stiffeners in thermal environment, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **102**, (4), (2022), p. e202100228.
- [67] N. Van Tien, N. T. Phuong, V. M. Duc, T. Q. Minh, D. T. Dong, P. H. Quan, V. H. Nam, and L. N. Ly, Nonlinear Thermo-Mechanical Buckling of Torsion-Loaded Cylindrical Shells with Eccentric Stiffeners Made from CNT-Reinforced Composite, *Iranian Journal of Science Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, (2022), pp. 1-13.

- [68] N. D. Dat, T. Q. Quan, V. Mahesh, and N. D. Duc, Analytical solutions for nonlinear magneto-electro-elastic vibration of smart sandwich plate with carbon nanotube reinforced nanocomposite core in hygrothermal environment, *International Journal of Mechanical Sciences*, **186**, (2020), p. 105906.
- [69] N. V. Thanh, N. D. Khoa, N. D. Tuan, P. Tran, and N. D. Duc, Nonlinear dynamic response and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (FG-CNTRC) shear deformable plates with temperature-dependent material properties and surrounded on elastic foundations, *Journal of Thermal Stresses*, **40**, (10), (2017), pp. 1254-1274.
- [70] D. Ngo, N. Thanh, V. MinhAnh, and N. Duc, Vibration and nonlinear dynamic analysis of sandwich FG-CNTRC plate with porous core layer, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **29**, (2020), pp. 1-18.
- [71] N. Van Thanh, V. Dinh Quang, N. Dinh Khoa, K. Seung-Eock, and N. Dinh Duc, Nonlinear dynamic response and vibration of FG CNTRC shear deformable circular cylindrical shell with temperature-dependent material properties and surrounded on elastic foundations, *Journal of Sandwich Structures Materials*, **21**, (7), (2019), pp. 2456-2483.
- [72] N. D. Duc, P. H. Cong, N. D. Tuan, P. Tran, and N. V. Thanh, Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations, *Thin-Walled Structures*, **115**, (2017), pp. 300-310.
- [73] N. Van Quyen, N. Van Thanh, T. Q. Quan, and N. D. Duc, Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets, *Thin-Walled Structures*, **162**, (2021), p. 107571.
- [74] H. V. Tung and P. T. Hieu, Buckling and postbuckling of axially-loaded CNT-reinforced composite cylindrical shell surrounded by an elastic medium in thermal environment, *Vietnam Journal of Mechanics*, **41**, (1), (2019), pp. 31-49.
- [75] P. T. Hieu and H. Van Tung, Postbuckling behavior of CNT-reinforced composite cylindrical shell surrounded by an elastic medium and

- subjected to combined mechanical loads in thermal environments, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **32**, (10), (2019), pp. 1319-1346.
- [76] P. T. Hieu and H. Van Tung, Thermal buckling and postbuckling of CNT-reinforced composite cylindrical shell surrounded by an elastic medium with tangentially restrained edges, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **34**, (7), (2021), pp. 861-883.
- [77] P. Hiếu and H. Tung, Thermomechanical nonlinear buckling of pressure-loaded carbon nanotube reinforced composite toroidal shell segment surrounded by an elastic medium with tangentially restrained edges, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **233**, (2018), p. 095440621880294.
- [78] P. Hiếu and H. Tung, Buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments under mechanical loads in thermal environments, *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **100**, (2020).
- [79] P. T. Hieu and H. Van Tung, Thermal and thermomechanical buckling of shear deformable FG-CNTRC cylindrical shells and toroidal shell segments with tangentially restrained edges, *Archive of Applied Mechanics*, **90**, (7), (2020), pp. 1529-1546.
- [80] L. T. N. Trang and H. Van Tung, Thermally induced postbuckling of thin CNT-reinforced composite plates under nonuniform in-plane temperature distributions, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, **35**, (12), (2022), pp. 2331-2353.
- [81] R. Moradi-Dastjerdi, G. Payganeh, and M. Tajdari, Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders reinforced by wavy CNT using a mesh-free method, *Polymer Composites*, **39**, (2016).
- [82] R. Moradi-Dastjerdi and G. Payganeh, Thermoelastic dynamic analysis of wavy carbon nanotube reinforced cylinders under thermal loads, *Steel Composite Structures*, **25**, (3), (2017), pp. 315-326.

- [83] P. T. Hieu and H. V. Tung, Postbuckling Behavior of Carbon-Nanotube-Reinforced Composite Toroidal Shell Segments Subjected to Thermomechanical Loadings, *AIAA Journal*, **58**, (7), (2020), pp. 3187-3198.
- [84] P. T. Hieu and H. Van Tung, Thermomechanical postbuckling of pressure-loaded CNT-reinforced composite cylindrical shells under tangential edge constraints and various temperature conditions, *Polymer Composites*, **41**, (1), (2020), pp. 244-257.
- [85] H. Van Tung and L. T. N. Trang, Imperfection and tangential edge constraint sensitivities of thermomechanical nonlinear response of pressure-loaded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels, *Acta Mechanica*, **229**, (5), (2018), pp. 1949-1969.
- [86] H. V. Tung and P. T. Hieu, Nonlinear buckling of CNT-reinforced composite toroidal shell segment surrounded by an elastic medium and subjected to uniform external pressure, *Vietnam Journal of Mechanics*, **40**, (3), (2018), pp. 285-301.
- [87] Q. C. Do, D. N. Pham, D. Q. Vu, T. T. A. Vu, and D. D. Nguyen, Nonlinear buckling and post-buckling of functionally graded CNTs reinforced composite truncated conical shells subjected to axial load, *Steel Composite Structures*, **31**, (2019).
- [88] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*: CRC press, (2003),
- [89] M. Rafiee, X. He, S. Mareishi, and K. Liew, Modeling and stress analysis of smart CNTs/fiber/polymer multiscale composite plates, *International Journal of Applied Mechanics*, **6**, (03), (2014), p. 1450025.
- [90] B. Bakhadda, M. B. Bouiadjra, F. Bourada, A. A. Bousahla, A. Tounsi, and S. Mahmoud, Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation, *Wind Structures*, **27**, (5), (2018), pp. 311-324.

- [91] L. Zhang, Z. Lei, K. Liew, and J. Yu, Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels, *Composite Structures*, **111**, (2014), pp. 205-212.
- [92] Z. Lei, K. Liew, and J. Yu, Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method, *Composite Structures*, **98**, (2013), pp. 160-168.
- [93] K. Liew, Z. Lei, J. Yu, and L. Zhang, Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, **268**, (2014), pp. 1-17.
- [94] S. J. Mehrabadi, B. S. Aragh, V. Khoshkharesh, and A. Taherpour, Mechanical buckling of nanocomposite rectangular plate reinforced by aligned and straight single-walled carbon nanotubes, *Composites Part B: Engineering*, **43**, (4), (2012), pp. 2031-2040.
- [95] P. Malekzadeh and M. Shojaee, Buckling analysis of quadrilateral laminated plates with carbon nanotubes reinforced composite layers, *Thin-Walled Structures*, **71**, (2013), pp. 108-118.
- [96] Z. Lei, L. Zhang, and K. Liew, Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, **99**, (2015), pp. 208-217.
- [97] Y. Heydarpour, M. Aghdam, and P. Malekzadeh, Free vibration analysis of rotating functionally graded carbon nanotube-reinforced composite truncated conical shells, *Composite Structures*, **117**, (2014), pp. 187-200.
- [98] R. Ansari and J. Torabi, Numerical study on the buckling and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells under axial loading, *Composites Part B: Engineering*, **95**, (2016), pp. 196-208.
- [99] D. T. N. Thu, N. T. Chung, and N. V. Dang, Nonlinear flutter analysis of functionally graded carbon, *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, **11**, (04), (2022), p. 2250010.

- [100] T. N. Nguyen, C. H. Thai, H. Nguyen-Xuan, and J. Lee, NURBS-based analyses of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite shells, *Composite Structures*, **203**, (2018), pp. 349-360.
- [101] T. Truong-Thi, T. Vo-Duy, V. Ho-Huu, and T. Nguyen-Thoi, Static and free vibration analyses of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates using CS-DSG3, *International Journal of Computational Methods*, **17**, (03), (2020), p. 1850133.
- [102] J. Reddy, A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates, *International Journal of Aerospace Lightweight Structures*, **1**, (1), (2011).
- [103] P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, H. Luong-Van, and Q. Lieu-Xuan, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using a cell-based smoothed three-node plate element (CS-MIN3) based on the C0-HSDT, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, **270**, (2014), pp. 15-36.
- [104] P. Phung-Van, L. De Lorenzis, C. H. Thai, M. Abdel-Wahab, and H. Nguyen-Xuan, Analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using higher-order shear deformation theory and isogeometric finite elements, *Computational Materials Science*, **96**, (2015), pp. 495-505.
- [105] A. Soni, N. Grover, G. Bhardwaj, and B. Singh, Non-polynomial framework for static analysis of functionally graded carbon nano-tube reinforced plates, *Composite Structures*, **233**, (2020), p. 111569.
- [106] M. Janghorban and M. R. Nami, Wave propagation in functionally graded nanocomposites reinforced with carbon nanotubes based on second-order shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials Structures*, **24**, (6), (2017), pp. 458-468.
- [107] B. Karami, D. Shahsavari, and M. Janghorban, A comprehensive analytical study on functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates, *Aerospace Science Technology*, **82**, (2018), pp. 499-512.

- [108] S. Natarajan, M. Haboussi, and G. Manickam, Application of higher-order structural theory to bending and free vibration analysis of sandwich plates with CNT reinforced composite facesheets, *Composite Structures*, **113**, (2014), pp. 197-207.
- [109] H. Q. Tran, M. T. Tran, and P. Nguyen-Tri, A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates, *Mechanics of Materials*, **142**, (2020), p. 103294.
- [110] V. Van Tham, T. Huu Quoc, and T. Minh Tu, Free vibration analysis of laminated functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly curved shallow shell panels using a new four-variable refined theory, *Journal of Composites Science*, **3**, (4), (2019), p. 104.
- [111] T. Huu Quoc, T. Minh Tu, and V. Van Tham, Free Vibration Analysis of Smart Laminated Functionally Graded CNT Reinforced Composite Plates via New Four-Variable Refined Plate Theory, *Materials*, **12**, (22), (2019), p. 3675.
- [112] D. T. Huan, T. H. Quoc, V. V. Tham, and C. T. Binh, *Vibration Characteristics of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Plates Submerged in Fluid Medium*, in *Modern Mechanics and Applications*: Springer,(2022), pp. 271-286.
- [113] T. Quoc, V. Vu, and T. Minh Tu, Active vibration control of a piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced spherical shell panel, *Acta Mechanica*, **232**, (2021).
- [114] N. T. Chung, D. T. N. Thu, and L. X. Thuy, Dynamic analysis of stiffened functionally graded composite plates reinforced by carbon nanotubes subjected to blast loads using a new four-variable refined plate theory, *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, **12**, (03), (2023), p. 2350004.
- [115] A. Alibeigloo, Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity, *Composite Structures*, **95**, (2013), pp. 612-622.

- [116] E. A. Shahrabaki and A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration of carbon nanotube-reinforced composite plates with various boundary conditions using Ritz method, *Composite Structures*, **111**, (2014), pp. 362-370.
- [117] P. Malekzadeh and A. Zarei, Free vibration of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers, *Thin-Walled Structures*, **82**, (2014), pp. 221-232.
- [118] M. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, and M. Heshmati, Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Materials Design*, **49**, (2013), pp. 583-590.
- [119] A. Alibeigloo, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **44**, (2014), pp. 104-115.
- [120] S. Zghal, A. Frikha, and F. Dammak, Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced plate and shell structures, *Composite Structures*, **176**, (2017), pp. 1107-1123.
- [121] C.-L. Zhang and H.-S. Shen, Temperature-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes: Prediction from molecular dynamics simulation, *Applied Physics Letters*, **89**, (8), (2006), p. 081904.
- [122] Y. Han and J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites, *Computational Materials Science*, **39**, (2), (2007), pp. 315-323.
- [123] M. Griebel and J. Hamaekers, Molecular dynamics simulations of the elastic moduli of polymer-carbon nanotube composites, *Computer methods in applied mechanics engineering*, **193**, (17-20), (2004), pp. 1773-1788.
- [124] Firsanov V.V and D. T.N., Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory, *Composites*:

Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, **6**, (2), (2015), pp. 135-166.

- [125] R. J.N., 2, Ed. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, New York: CRC press, (2004),
- [126] Gol'denveizer, *Theory of elastic thin shells: solid and structural mechanics*: Elsevier, (1961),
- [127] S. Brischetto, A general exact elastic shell solution for bending analysis of functionally graded structures, *Composite Structures*, **175**, (2017), pp. 70-85.
- [128] R. Moradi-Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, and R. Sotoudeh-Bahreini, Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylinders by a mesh-free method, *Journal of Reinforced Plastics and Composites Part A: Applied Science*, **32**, (9), (2013), pp. 593-601.
- [129] A. J. G. Yunus A. Çengel, *Heat and mass transfer: fundamentals and application fifth edition*, 5 ed: Mac Graw Hill Education, (2015),
- [130] H. Gharooni, M. Ghannad, and M. Z. Nejad, Thermo-elastic analysis of clamped-clamped thick FGM cylinders by using third-order shear deformation theory, *Latin American Journal of Solids Structures*, **13**, (2016), pp. 750-774.

PHỤ LỤC

Các hệ số của hệ phương trình cân bằng viết theo chuyển vị

$$\begin{aligned}
H_{10}^1 &= 0, & H_{11}^1 &= 0, & H_{12}^1 &= 0, & H_{13}^1 &= 0, & H_{10,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{11,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}z}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{12,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{13,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \frac{z^3}{3!} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{10,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} dz, & H_{11,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}z}{R+z} dz, & H_{12,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{13,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^3}{3!} dz, & H_{20,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right) dz, \\
H_{21,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right) z dz, & H_{22,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right) \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{23,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right) \frac{z^3}{3!} dz, & H_{30,1}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{31,1}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}z}{R+z} + C_{13} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{32,1}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \frac{z^2}{2} + C_{13}z \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz. \\
H_{10}^2 &= 0, & H_{11}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R dz, & H_{12}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R z dz, \\
H_{13}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^2}{2} dz, & H_{10,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \frac{z}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{11,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \frac{z^2}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{12,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \frac{z^3}{2R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{13,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \frac{z^4}{6R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{10,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \frac{z}{R+z} dz, \\
H_{11,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \frac{z^2}{R+z} dz, & H_{12,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \frac{z^3}{2(R+z)} dz, & H_{13,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \frac{z^4}{6(R+z)} dz, \\
H_{20,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(C_{12} \frac{z}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + C_{44} \frac{z}{R} \right) dz, & H_{21,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(C_{12} \frac{z^2}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + C_{44} \frac{z^2}{R} \right) dz, \\
H_{22,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(C_{12} \frac{z^3}{2(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + C_{44} \frac{z^3}{2R} \right) dz, \\
H_{23,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(C_{12} \frac{z^4}{6(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + C_{44} \frac{z^4}{6R} \right) dz, & H_{30,1}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz,
\end{aligned}$$

B

$$H_{31,1}^2 = \int_{-h/2}^{h/2} (C_{13} - A_{55}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz,$$

$$H_{32,1}^2 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(C_{13} - \frac{C_{55}}{2}\right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^2 dz.$$

$$H_{10}^3 = 0, \quad H_{11}^3 = - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz, \quad H_{12}^3 = - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^2 dz,$$

$$H_{13}^3 = - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{10,11}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^2}{2} dz, \quad H_{11,11}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{2} dz,$$

$$H_{12,11}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^4}{4} dz, \quad H_{13,11}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^5}{12} dz, \quad H_{10,22}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz,$$

$$H_{11,22}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{12,22}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^4}{4} dz, \quad H_{13,22}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz,$$

$$H_{20,12}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^2}{2} dz, \quad H_{21,12}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^3}{2} dz,$$

$$H_{22,12}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^4}{4} dz, \quad H_{23,12}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz,$$

$$H_{30,1}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^2}{2} dz, \quad H_{31,1}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} + C_{13} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^2}{2} dz,$$

$$H_{32,1}^3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \frac{z^4}{2} + C_{13} \frac{z^3}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz.$$

$$H_{10}^4 = 0, \quad H_{11}^4 = - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^2}{2} dz, \quad H_{12}^4 = - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^3}{2} dz,$$

$$H_{13}^4 = - \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^4}{2} dz, \quad H_{10,11}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{6} dz,$$

$$H_{11,11}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^4}{6} dz, \quad H_{12,11}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^5}{12} dz, \quad H_{13,11}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^6}{36} dz,$$

$$H_{10,22}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^3}{6} dz, \quad H_{11,22}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^4}{6} dz, \quad H_{12,22}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz,$$

$$H_{13,22}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R+z} \frac{z^6}{36} dz, \quad H_{20,12}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^3}{6} dz,$$

$$H_{21,12}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^4}{6} dz, \quad H_{22,12}^4 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz,$$

$$\begin{aligned}
H_{23,12}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{44}}{R} \right] \frac{z^6}{36} dz, & H_{30,1}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \frac{z^3}{6} - C_{55} \frac{z^2}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, \\
H_{31,1}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \frac{z^4}{6} - C_{55} \frac{z^3}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, & H_{32,1}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{12}}{R+z} \frac{z^5}{12} - C_{55} \frac{z^4}{4} \right) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, \\
H_{20}^5 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} dz, & H_{21}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} R dz, & H_{22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} \left(Rz + \frac{z^2}{2} \right) dz, \\
H_{23}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} \left(R \frac{z^2}{2} + 2 \frac{z^3}{6} \right) dz, & H_{20,11}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, & H_{21,11}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z dz \\
, & H_{22,11}^5 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2} dz, & H_{23,11}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{6} dz, & H_{20,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} dz, \\
H_{21,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} z dz, & H_{22,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, & H_{23,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^3}{6} dz, \\
H_{10,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, & H_{11,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz, \\
H_{12,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^2}{2} dz, & H_{13,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{6} dz, \\
H_{30,2}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} (C_{22} + C_{66}) \frac{1}{R+z} dz, & H_{31,2}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[(C_{22} + C_{66}) \frac{z}{R+z} + C_{23} \right] dz, \\
H_{32,2}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[(C_{22} + C_{66}) \frac{z^2}{2(R+z)} + C_{23} z \right] dz, \\
H_{20}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} R dz, & H_{21}^6 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} R^2 dz, & H_{22}^6 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{RC_{66}}{R+z} \left(Rz + \frac{z^2}{2} \right) dz, \\
H_{23}^6 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{RC_{66}}{R+z} \left(R \frac{z^2}{2} + 2 \frac{z^3}{6} \right) dz, & H_{20,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z}{R} dz, \\
H_{21,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{R} dz, & H_{22,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2R} dz, \\
H_{23,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^4}{6R} dz, & H_{20,22}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} z dz, & H_{21,22}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} z^2 dz, \\
H_{22,22}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, & H_{23,22}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^4}{6} dz, & H_{10,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz, \\
H_{11,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z^2 dz, & H_{12,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{2} dz,
\end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned}
H_{13,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} + \frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^4}{6} dz, & H_{30,2}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} (C_{22}z - RC_{66}) \frac{1}{R+z} dz, \\
H_{31,2}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[(C_{22}z - RC_{66}) \frac{1}{R+z} + C_{23} \right] z dz, & H_{32,2}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[(C_{22}z - RC_{66}) \frac{1}{2(R+z)} + C_{23} \right] z^2 dz, \\
. & & & \\
H_{20}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} \left(R - \frac{z}{2} \right) \frac{z}{R+z} dz, & H_{21}^7 &= - \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} \left(R + \frac{z}{2} \right) \frac{Rz}{R+z} dz, \\
H_{22}^7 &= - \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} \left(R + \frac{z}{2} \right) \left(Rz + \frac{z^2}{2} \right) \frac{z}{R+z} dz, & H_{23}^7 &= - \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} \left(R + \frac{z}{2} \right) \left(R \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) \frac{z}{R+z} dz, \\
H_{20,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2R} dz, & H_{21,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2R} dz, \\
H_{22,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^4}{4R} dz, & H_{23,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^5}{12R} dz, & H_{20,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{21,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, & H_{22,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^4}{4} dz, & H_{23,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{10,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^2}{2} dz, & H_{11,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{12,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^4}{4} dz, & H_{13,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{30,2}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(C_{22} \frac{z}{2} - RA_{66} - C_{66} \frac{z}{2} \right) \frac{z}{R+z} dz, \\
H_{31,2}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + \frac{C_{23}}{2} - \frac{RC_{66}}{R+z} - \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z}{2} \right) z^2 dz, \\
H_{32,2}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + C_{23} - \frac{RC_{66}}{R+z} - \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z}{2} \right) \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{20}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(R + \frac{2z}{3} \right) \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, & H_{21}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(R + \frac{2z}{3} \right) \frac{RC_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{22}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(R + \frac{2z}{3} \right) \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} \left(Rz + \frac{z^2}{2} \right) dz, & H_{23}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(R + \frac{2z}{3} \right) \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} \left(\frac{Rz^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) dz, \\
H_{20,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{6} dz, & H_{21,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^4}{6} dz, \\
H_{22,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^5}{12} dz, & H_{23,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{44}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^6}{36} dz, & H_{20,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^3}{6} dz,
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
H_{21,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^4}{6} dz, & H_{22,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz, & H_{23,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^6}{36} dz, \\
H_{10,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^3}{6} dz, & H_{11,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^4}{6} dz, \\
H_{12,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz, & H_{13,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{44}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{C_{21}}{R} \right] \frac{z^6}{36} dz, \\
H_{30,2}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(C_{22} \frac{z}{3} - RA_{66} - C_{66} \frac{2z}{3} \right) \frac{z^2}{2(R+z)} dz, \\
H_{31,2}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{22}}{(R+z)} \frac{z}{3} + C_{23} \frac{z}{3} - \frac{RC_{66}}{(R+z)} - \frac{C_{66}}{(R+z)} \frac{2z}{3} \right) \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{32,2}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{22}}{(R+z)} \frac{z^2}{6} + C_{23} \frac{z}{3} - \frac{RC_{66}}{2(R+z)} - \frac{C_{66}}{(R+z)} \frac{z}{6} \right) \frac{z^4}{2} dz. \\
H_{30}^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{22}}{R+z} dz, & H_{31}^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{22}z}{R+z} + C_{23} \right) dz, & H_{32}^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{C_{22}z}{2(R+z)} + C_{23} \right) z dz, \\
H_{30,11}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz, & H_{31,11}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z dz, & H_{32,11}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{30,22}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} dz, & H_{31,22}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} z dz, & H_{32,22}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, & H_{10,1}^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{21}}{R} dz, \\
H_{11,1}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{55} \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{C_{21}}{R} z \right] dz, & H_{12,1}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{55} \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{C_{21}}{2R} z \right] z dz, \\
H_{13,1}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{55} \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{C_{21}}{2R} \frac{z}{3} \right] \frac{z^2}{2} dz, & H_{20,2}^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} (C_{66} + C_{22}) \frac{1}{R+z} dz, \\
H_{21,2}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} (RC_{66} - C_{22}z) \frac{1}{R+z} dz, & H_{22,2}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{66} \left(Rz + \frac{z^2}{2} \right) - C_{22} \frac{z^2}{2} \right] \frac{1}{R+z} dz, \\
H_{23,2}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{66} \left(R \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) - C_{22} \frac{z^3}{6} \right] \frac{1}{R+z} dz, & H_4^9 &= -R \left(1 + \frac{h}{2R} \right), & H_5^9 &= -R \left(1 - \frac{h}{2R} \right), \\
H_T^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} (C_{21} + C_{22} + C_{23}) \alpha_z \Delta T dz, \\
H_{30}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{22}z}{R+z} + \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, \\
H_{31}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{22}z^2}{R+z} + C_{23}z + \frac{RC_{32}z}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) + RC_{33} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{32}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{22}}{R+z} \frac{z^3}{2} + C_{23} z^2 + \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2} + RC_{33} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z \right] dz, \\
H_{30,11}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z dz, \quad H_{31,11}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z^2 dz, \quad H_{32,11}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{30,22}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} z dz, \quad H_{31,22}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} z^2 dz, \quad H_{32,22}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{10,1}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} z + C_{31} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, \quad H_{11,1}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{55} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z - \frac{C_{21}}{R} z^2 - C_{31} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z \right] dz, \\
H_{12,1}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{55} \left(1 + \frac{z}{R} \right) z^2 - \frac{C_{21}}{R} \frac{z^3}{2} - C_{31} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2} \right] dz, \\
H_{13,1}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{55} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2} - \frac{C_{21}}{R} \frac{z^4}{6} - C_{31} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{6} \right] dz, \\
H_{20,2}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{66} z}{R+z} + \frac{C_{22} z}{R+z} + \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, \\
H_{21,2}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{RC_{66}}{R+z} - \frac{C_{22} z}{R+z} - \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz, \\
H_{22,2}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{66}}{R+z} \left(R + \frac{z}{2} \right) - \frac{C_{22} z}{2(R+z)} - \frac{RC_{32}}{2(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z^2 dz, \\
H_{23,2}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{66}}{R+z} \left(R + \frac{2z}{3} \right) - \frac{C_{22} z}{3(R+z)} - \frac{RC_{32}}{3(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \quad H_4^{10} = -R \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \frac{h}{2}, \\
H_5^{10} &= R \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \frac{h}{2}, \quad H_T^{10} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left[(C_{21} + C_{22} + C_{23}) z + (C_{31} + C_{32} + C_{33}) R \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \alpha_z \Delta T dz \\
H_{30}^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz, \\
H_{31}^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + \frac{C_{23}}{2} + \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z^2 dz \\
H_{32}^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + A_{23} + \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{30,11}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{31,11}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{32,11}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^4}{4} dz, \quad H_{30,22}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{31,22}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{32,22}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{C_{66}}{R+z} \frac{z^4}{4} dz, \quad H_{10,1}^{11} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{21}}{R} \frac{z}{2} + C_{31} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{11,1}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{55}}{2} \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{C_{21}}{R} \frac{z}{2} - C_{31} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z^2 dz, \\
H_{12,1}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[C_{55} \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{C_{21}}{R} \frac{z}{2} - C_{31} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{13,1}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{55}}{2} \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{C_{21}}{R} \frac{z}{6} - \frac{C_{31}}{3} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^4}{2} dz, \\
H_{20,2}^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{66} z}{2(R+z)} + \frac{C_{22} z}{2(R+z)} + \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz, \\
H_{21,2}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{RC_{66}}{2(R+z)} - \frac{C_{22} z}{2(R+z)} - \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] z^2 dz, \\
H_{22,2}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{66}}{R+z} \left(R + \frac{z}{2} \right) - \frac{C_{22} z}{2(R+z)} - \frac{RC_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{23,2}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{C_{66}}{R+z} \left(\frac{R}{2} + \frac{z}{3} \right) - \frac{C_{22} z}{6(R+z)} - \frac{RC_{32}}{3(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^4}{2} dz, \\
H_4^{11} &= -\frac{R}{2} \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^2, H_5^{11} = -\frac{R}{2} \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^2, \\
H_T^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[(C_{21} + C_{22} + C_{23}) \frac{z^2}{2} + (C_{31} + C_{32} + C_{33}) \left(1 + \frac{z}{R} \right) Rz \right] \alpha_z \Delta T dz.
\end{aligned}$$