

BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ
_____ * _____

NGUYỄN HỒNG NAM

NGHIÊN CỨU PHÁT TRIỂN MỘT SỐ MÔ HÌNH
DẠNG LANCHESTER
TRONG MÔ PHỎNG TRẬN ĐÁNH

Chuyên ngành: **Cơ sở toán học cho tin học**

Mã số: **9 46 01 10**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2022

Công trình được hoàn thành tại Học viện Kỹ thuật Quân sự

Người hướng dẫn khoa học:

- 1. Nguyễn Hữu Mộng**
- 2. TS. Đào Trọng Quyết**

Phản biện 1: PGS.TS Nguyễn Năng Tâm

Phản biện 2: PGS.TS Nguyễn Văn Tuyên

Phản biện 3: PGS.TS Huỳnh Thị Thanh Bình

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng đánh giá luận án cấp Học viện theo quyết định số 1739/QĐ-HV, ngày 18 tháng 5 năm 2022 của Giám đốc Học viện Kỹ thuật Quân sự, họp tại Học viện Kỹ thuật Quân sự vào hồi....giờ....ngày....tháng...năm....

Có thể tìm hiểu luận án tại Thư viện Học viện Kỹ thuật Quân sự, Thư viện Quốc gia.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Một nhiệm vụ hết sức quan trọng trong công cuộc chuẩn bị cho chiến tranh là xây dựng các phương án tác chiến khác nhau cho nhiều tính huống chiến sự khác nhau có thể xảy ra trong tương lai. Để thực hiện được nhiệm vụ rất khó khăn này người ta có nhiều cách khác nhau.

Toán học là một môn khoa học được ứng dụng rộng rãi vào tất cả các lĩnh vực hoạt động của con người và xã hội. Từ khi máy tính điện tử ra đời thì các vấn đề phức tạp của toán học mới được ứng dụng có hiệu quả và có ý nghĩa thực tiễn. Cũng từ đó đến nay, hàng loạt các bộ môn toán học mới ra đời để phục vụ ứng dụng toán học như: toán học tính toán (giải tích số, phương pháp số, phương pháp tính toán khoa học, ...), mô hình hóa toán học, mô phỏng, v.v....

Các bài toán đặt ra trong hoạt động quân sự là rất nhiều, rất phong phú sử dụng nhiều công cụ toán học khác nhau như mô hình hóa toán học, qui hoạch toán học, lý thuyết trò chơi, điều khiển, điều khiển tối ưu, sơ đồ mạng, mô phỏng,...

Khi xây dựng các phương án tác chiến người ta phải luôn dựa vào học thuyết quân sự của quốc gia, nghệ thuật quân sự cũng như lịch sử quân sự và kết quả của các cuộc chiến đã qua. Tuy nhiên, không thể có một phương án mới nào được xây dựng trùng lặp với các phương án đã thực hiện trong quá khứ, vì đơn giản, chiến tranh tương lai không giống như các cuộc chiến đã qua. Vì vậy, để kiểm tra các phương án mới xây dựng người ta thường tổ chức các cuộc tập trận với qui mô mức độ phù hợp. Nhưng, việc tổ chức các cuộc tập trận là vô cùng tốn kém về mặt kinh tế cũng như các phương diện khác như kỹ thuật, trang bị, con người, v.v... Do vậy, một cách hiệu quả và

rất kinh tế là “thực hiện các cuộc tập trận trên máy tính”. Đây là một lĩnh vực không mới đối với thế giới nhưng có lẽ rất mới mẻ với nền quân sự nước nhà. Như chúng tôi biết, trong Bộ quốc phòng cũng đã có những nỗ lực tìm kiếm các phương pháp áp dụng tri thức toán học, công nghệ thông tin vào các hoạt động quân sự nhưng hầu như chưa đạt được những kết quả mong muốn đáng kể.

Từ lịch sử vấn đề được phân tích trên ta thấy, việc nghiên cứu xây dựng, khảo sát và mô phỏng các cuộc đấu tranh vũ trang bằng các mô hình toán học trên máy tính là có ý nghĩa khoa học, quân sự to lớn và có hiệu quả kinh tế cao. Ngoài ra nhiệm vụ này luôn luôn là nhiệm vụ rất thời sự của nền quốc phòng toàn dân của chúng ta.

Với những lý do trên đây mà chúng tôi chọn đề tài **“Nghiên cứu phát triển một số mô hình dạng Lanchester trong mô phỏng trận đánh”** làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu các chủ điểm sau:

- (i) Xây dựng mô hình toán học cho trận đánh bất đối xứng với một bên là n lực lượng tham chiến có lực lượng lớn và có chia sẻ thông tin tình báo với một bên là một lực lượng có quân số nhỏ. Với mô hình này, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu với hàm mục tiêu là chi phí cho trận đánh của n lực lượng và các biến điều khiển là mức độ thông tin tình báo và tốc độ bổ sung quân số.
- (ii) Xây dựng mô hình toán học cho trận đánh mà một bên có sự hỗ trợ của các lực lượng khác, các lực lượng hỗ trợ này tuy không trực tiếp tham chiến nhưng có ảnh hưởng đến kết cục của trận đánh. Đối với các mô hình này, chúng tôi nghiên cứu bài toán phân bố hỏa lực tối ưu sao cho quân số còn lại của "bên ta" là lớn nhất tại mọi thời điểm.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với các mục tiêu đặt ra như trên, đối tượng và phạm vi nghiên cứu trong luận án này của chúng tôi như sau:

Đối tượng nghiên cứu: Mô hình trận đánh bất đối xứng và các mô hình trận đánh kiểu NCW.

Phạm vi nghiên cứu: Xây dựng mô hình, bài toán tối ưu chi phí, bài toán phân bố hỏa lực tối ưu, dự báo diễn biến và kết cục trận đánh.

4. Phương pháp nghiên cứu

Xuất phát từ mục tiêu của đề tài nghiên cứu, các phương pháp nghiên cứu được sử dụng như sau:

- Sử dụng các lý thuyết về phương trình vi phân để xây dựng các mô hình trận đánh: Mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng và Mô hình trận đánh kiểu NCW.
- Sử dụng phương pháp tối ưu Pontryagin để nghiên cứu bài toán tối ưu chi phí đối với Mô hình Lanchester bất đối xứng.
- Sử dụng các phương pháp giải tích liên quan đến bài toán tối ưu đa mục tiêu để nghiên cứu bài toán tối ưu về quân số đối với Mô hình trận đánh kiểu NCW.
- Lập trình giải số và mô phỏng một số trận đánh ứng với các mô hình trên.

5. Bố cục của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án, Tài liệu tham khảo và Phụ lục, luận án có ba chương.

Trong Chương 1, phần đầu tiên chúng tôi giới thiệu khái quát các mô hình quân sự và mô hình toán của trận đánh. Phần tiếp theo của chương,

chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về lý thuyết điều khiển tối ưu. Phần cuối của chương là một số kiến thức cơ bản về bài toán tối ưu đa mục tiêu và phương pháp vô hướng hóa WM để giải bài toán đó.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu các vấn đề liên quan đến Mô hình Lanchester phi tuyến bất đối xứng. Trong phần đầu, chúng tôi khảo sát và xây dựng mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng, phát biểu bài toán tối ưu chi phí và sử dụng Nguyên lý cực đại Pontryagin để giải quyết bài toán. Trong phần tiếp theo, chúng tôi thực hiện một số tính toán số minh họa cho tính đúng đắn của các nghiên cứu đó.

Trong Chương 3, chúng tôi dành cho nghiên cứu liên quan đến các Mô hình trận đánh dạng NCW. Đầu tiên, chúng tôi sẽ xây dựng các Mô hình trận đánh này dưới dạng hệ phương trình vi phân. Tiếp theo chúng tôi phát biểu và giải quyết bài toán phân bố hỏa lực tối ưu nhằm tối ưu hóa quân số tại một thời điểm bất kỳ. Cuối cùng là một số tính toán số minh họa cho tính đúng đắn của các kết quả mà chúng tôi đưa ra.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số mô hình toán học động học trận đánh

Mục này trình bày một số mô hình toán học của trận đánh: Mô hình Lanchester (Mô hình hỏa lực định hướng và Mô hình hỏa lực khu vực); Một số mô hình trận đánh bất đối xứng (Mô hình trộn, Mô hình Deitchman, Mô hình Helmbold, Mô hình Schreiber, Mô hình KKS); Mô hình tự suy giảm quân số và Mô hình bổ sung quân số (Mô hình Morse Kimball, Mô hình Coleman); Tác chiến mạng trung tâm - Mô hình trận đánh NCW.

1.2 Một số kiến thức về lý thuyết điều khiển tối ưu

Mục này trình bày bài toán điều khiển tối ưu và nguyên lý cực đại Pontryagin cho 04 bài toán điều khiển tối ưu: *Bài toán điểm cuối tự do, thời gian cố định; Bài toán điểm cuối cố định, thời gian tự do; Nguyên lý cực đại với các điều kiện hoành; Nguyên lý cực đại với các ràng buộc trạng thái.*

1.3 Một số kiến thức về tối ưu đa mục tiêu

Mục này trình bày bài toán tối ưu đa mục tiêu và phương pháp vô hướng hóa trọng số WM (Weighting Method) giải bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Chương 2

Mô hình trận đánh bất đối xứng

Trong Chương này, chúng tôi xây dựng mô hình tổng quát Lanchester(n,1) bất đối xứng và nghiên cứu bài toán tối ưu chi phí liên quan đến mô hình. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng tiến hành khảo sát tính ổn định của các trạng thái, trạng thái ổn định trong của các bên tham chiến. Phần cuối của Chương, luận án trình bày một số tính toán số nhằm minh họa cho tính đúng đắn của các nghiên cứu mà chúng tôi đưa ra.

Kết quả nghiên cứu của Chương 2 được được công bố trong 02 công trình [1, 2].

2.1 Mô hình và bài toán tối ưu chi phí

Giả sử có n lực lượng với quân số lớn cùng tham gia chống lại một lực lượng với quân số nhỏ. Tại thời điểm t bất kỳ, n lực lượng này có quân số là $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, ($X_i \geq 0, i = 1, \dots, n$), lực lượng đối nghịch có quân số là $Y(t)$ (nằm trong tổng dân số P , không mất tính tổng quát có thể coi $P = 1, 0 \leq Y \leq 1$). Ngoài ra, chúng tôi ký hiệu:

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: hiệu quả tấn công của lực lượng Y lên $X_1, \dots, X_n$ tương ứng.
- $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$: hiệu quả tấn công của các lực lượng $X_1, \dots, X_n$ đối với Y .
- μ : mức độ thông tin tình báo của n lực lượng $X_1, \dots, X_n$.
- $\delta_1, \dots, \delta_n$: hệ số tự tiêu hao của $X_1, \dots, X_n$ (đào ngũ, bệnh tật ...); $0 \leq \delta_1, \dots, \delta_n \leq 1$.

- $\beta_1, \dots, \beta_n$: tốc độ bổ sung quân số của n lực lượng $X_1, \dots, X_n$.

Khi đó, chúng ta có mô hình trận đánh dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -\alpha_1 Y - \delta_1 X_1 + \beta_1, \\ \dot{X}_2 = -\alpha_2 Y - \delta_2 X_2 + \beta_2, \\ \dots \\ \dot{X}_n = -\alpha_n Y - \delta_n X_n + \beta_n, \\ \dot{Y} = -\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i\right) (\mu + (1 - \mu) Y) + \theta(C), \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó, $\theta(C)$ là "hiệu ứng con dao hai lưỡi" với:

$$C = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i\right) (1 - \mu)(1 - Y). \quad (2.2)$$

Giả thiết thêm rằng:

- Chi phí thu thập thông tin tình báo là một hàm lồi nào đó của μ thỏa mãn:

$$I(0) = 0, \quad I'(\mu) > 0, \quad I''(\mu) > 0, \quad I(1) = +\infty. \quad (2.3)$$

- Thiệt hại do lực lượng Y gây ra cũng là một hàm lồi $D(Y)$ nào đó của biến Y thỏa mãn:

$$D(0) = 0, \quad D'(Y) > 0, \quad D''(Y) > 0. \quad (2.4)$$

- Chi phí để duy trì quân đội, ký hiệu $A_1(X_1), \dots, A_n(X_n)$, có thể giả thiết là hàm tuyến tính của các biến $X_1, \dots, X_n$ thỏa mãn:

$$A_1(0) = 0, \dots, A_n(0) = 0, \quad (2.5)$$

hoặc là hàm lõm của các biến $X_1, \dots, X_n$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} A_1(0) &= 0, \dots, A_n(0) = 0, \\ A'_1(X_1) &> 0, \dots, A'_n(X_n) > 0, \\ A''_1(X_1) &\leq 0, \dots, A''_n(X_n) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

- Chi phí để bổ sung quân số, ký hiệu $K_1(\beta_1), \dots, K_n(\beta_n)$, giống như trong các bài toán về quy hoạch nguồn nhân lực, chi phí này thường được giả thiết là các hàm bình phương của các biến $\beta_1, \dots, \beta_n$.

Nhiệm vụ của n lực lượng $X_1, \dots, X_n$ là giải quyết bài toán:

$$\min_{\mu, \beta} \int_0^{\infty} e^{-rt} (D(Y) + I(\mu) + A(X) + K(\beta)) dt, \quad (2.7)$$

trong đó

$$A(X) = \sum_{i=1}^n A_i(X_i); \quad K(\beta) = \sum_{i=1}^n K_i(\beta_i).$$

Ở đây, chúng tôi lựa chọn thiệt hại do lực lượng Y gây ra là hàm bình phương $\frac{fY^2}{2}$ (với $f > 0$), chi phí để duy trì quân đội là các hàm tuyến tính: $c_1X_1, \dots, c_nX_n$, chi phí để thu thập thông tin tình báo là hàm logarit: $-\log(1 - \mu)$ và chi phí để bổ sung quân số là $\frac{\beta_1^2}{2}, \dots, \frac{\beta_n^2}{2}$ tương ứng, và $\theta(C) = \theta C^2$.

2.2 Trạng thái ổn định trong và tính ổn định của các trạng thái

Trạng thái ổn định trong

Định lý 2.1. Với các giả thiết nêu trên, điều kiện để hệ (2.1) tồn tại trạng thái ổn định trong là $c_i < 0, i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó thông tin tình báo tối ưu được tính bởi $\mu = 1 - \frac{x}{(\gamma X)(1 - Y)}$, trong đó $\gamma X = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i, x = (\gamma X)(1 - \mu)(1 - Y)$.

Tính ổn định của các trạng thái

Với điều kiện rằng trạng thái ổn định trong được tìm thấy, ma trận Jacobian tương ứng là:

$$\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

trong đó,

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \begin{bmatrix} -\delta_1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & -\delta_2 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\delta_n & -\alpha_n \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \dots & -\gamma_n & 0 \end{bmatrix}, \\
 G_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (1 + 2\theta x) \frac{\partial x}{\partial \lambda_{n+1}} \end{bmatrix}, \\
 G_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_1^2}{(\gamma X)^2} & -\frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma X)^2} & \dots & -\frac{\gamma_1 \gamma_n}{(\gamma X)^2} & 0 \\ -\frac{\gamma_2 \gamma_1}{(\gamma X)^2} & -\frac{\gamma_2^2}{(\gamma X)^2} & \dots & -\frac{\gamma_2 \gamma_n}{(\gamma X)^2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\gamma_n \gamma_1}{(\gamma X)^2} & -\frac{\gamma_n \gamma_1}{(\gamma X)^2} & \dots & -\frac{\gamma_n^2}{(\gamma X)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{f(1-Y)^2 - 1}{(1-Y)^2} \end{bmatrix}, \\
 G_4 &= \begin{bmatrix} r + \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 \\ 0 & r + \delta_2 & \dots & 0 & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r + \delta_n & \gamma_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r & r \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

với

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_{n+1}} = -\frac{1}{\lambda_{n+1} \sqrt{\lambda_{n+1}^2 - 8\theta \lambda_{n+1}}}.$$

Bằng cách nghiên cứu các phần thực của các giá trị riêng của ma trận (2.8), ta có thể suy ra tính ổn định của các trạng thái.

2.3 Một vài minh họa số

Để có cái nhìn sâu hơn về mô hình Lanchester (n,1), chúng tôi đưa ra các tính toán số cho các mô hình Lanchester (2,1) và Lanchester (3,1). Trong các mô hình này, với một số bộ tham số đầu vào cho trước, chúng tôi sẽ tính toán để đưa ra các trạng thái ổn định trong và thông tin tình báo tối ưu cho từng trường hợp đồng thời so sánh kết quả đạt được với kết quả của Feichtinger và nhóm tác giả đưa ra trong bài báo: Feichtinger G., Novak A., Wrzaczek S. (2012), Optimizing counter-terroristic operations in an asymmetric Lanchester model, *IFAC Proceedings Volumes*, 45 (25), pp. 27-32.

2.3.1 Mô hình Lanchester (2,1)

Trong bài báo trên các tác giả chọn các tham số:

$$r = 2.2; \alpha = 2.23; \delta = 0.34; \gamma = 1.19; \theta = 1.86; c = -2.3734; f = 1.12.$$

Kết quả tính toán số như sau:

- Trạng thái ổn định trong là $X = 1.39523; Y = 0.16034$.
- Tốc độ bổ sung quân số tối ưu là $\lambda = \beta = 0.83193$.
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0.48822$.

Trường hợp 1:

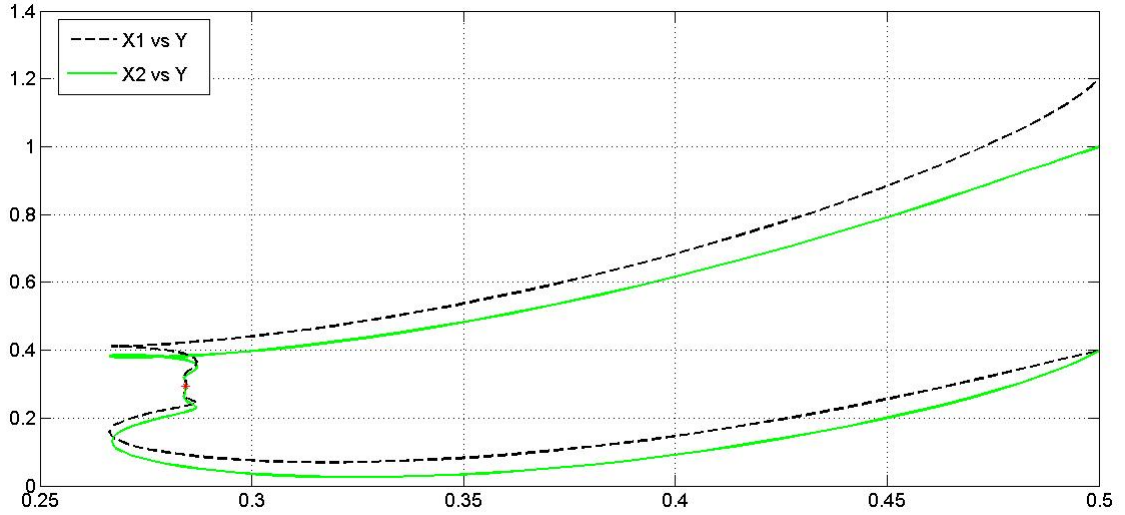
Để so sánh, đầu tiên chúng tôi sử dụng lại các tham số trong bài báo của Feichtinger và nhóm tác giả ở trên cho mô hình của chúng tôi.

$$r = 2.2, \alpha_1 = \alpha_2 = 2.23; \delta_1 = \delta_2 = 0.34; \gamma_1 = \gamma_2 = 1.19; \theta = 1.86.$$

Với các tham số này, chúng tôi có kết quả số như sau:

- Trạng thái ổn định trong là $X_1 = X_2 = 0.294785; Y = 0.284383$.
- Tốc độ bổ sung quân số tối ưu là $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7344$.
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0.200107$.

Kết quả được chỉ ra dưới Hình 2.1.



Hình 2.1: Mô hình Lanchester(2,1): Kết quả cho trường hợp 1.

Trường hợp 2:

Chọn một bộ tham số tùy ý: $r = 2.5; \alpha_1 = 2.0; \alpha_2 = 1.9; \delta_1 = 0.34; \delta_2 = 0.37; \gamma_1 = \gamma_2 = 1.3; c_1 = c_2 = -2.5; f = 1.2; \theta = 1.86$.

Với các tham số này, chúng tôi có kết quả số như sau:

- Trạng thái ổn định trong là $X_1 = 0.355214; X_2 = 0.387704; Y = 0.302679$.
- Tốc độ bổ sung quân số tối ưu là $\lambda_1 = 0.726132; \lambda_2 = 0.718542$.
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0.257162$.

Kết quả được chỉ ra dưới Hình 2.2.

2.3.2 Mô hình Lanchester (3,1)

Trường hợp 1:

$r = 2.5; \alpha_1 = 2.0, \alpha_2 = 1.9, \alpha_3 = 2.0;$

$\delta_1 = 0.34; \delta_2 = 0.37, \delta_3 = 0.32;$

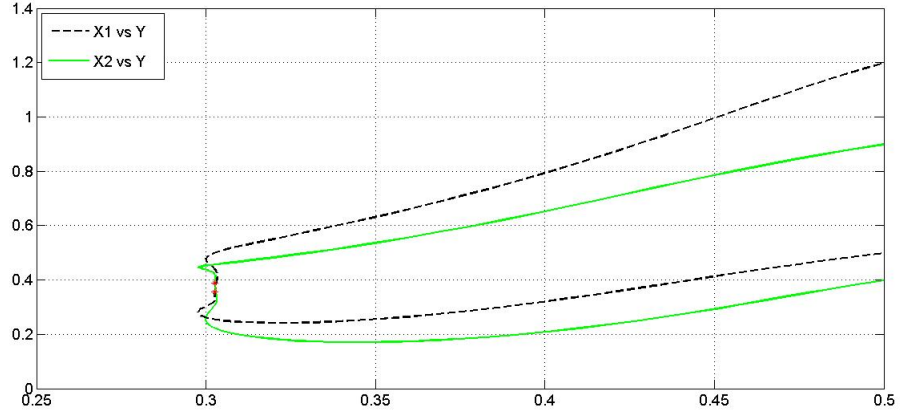
$\gamma_1 = 1.0, \gamma_2 = 1.3, \gamma_3 = 1.1;$

$c_1 = c_2 = c_3 = -2.5; f = 1.2; \theta = 1.86$.

Kết quả tính toán như sau:

Trạng thái ổn định trong:

$$X_1 = 0.14635; X_2 = 0.18627; X_3 = 0.19253; Y = 0.33134.$$



Hình 2.2: Mô hình Lanchester(2,1): Kết quả cho trường hợp 2.

Thông tin tình báo tối ưu: $\mu = 0.10393$.

Trường hợp 2: $r = 2.3; \alpha_1 = 2.2, \alpha_2 = 2.1, \alpha_3 = 2.3;$

$\delta_1 = 0.34; \delta_2 = 0.37, \delta_3 = 0.32; \gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 1.4,$

$\gamma_3 = 1.2; c_1 = -2.6, c_2 = -2.4, c_3 = -2.5; f = 1.2; \theta = 1.86.$

Kết quả tính toán cho Trường hợp 2 như sau:

Trạng thái ổn định trong:

$$X_1 = 0.09208; X_2 = 0.16590; X_3 = 0.10893; Y = 0.29424.$$

Thông tin tình báo tối ưu: $\mu = 0.10729$.

Các trạng thái ổn định trong là các trạng thái mà các lực lượng $X_1, X_2, \dots, X_n$ và lực lượng Y kìm hãm lẫn nhau. Ở những trạng thái này, lực lượng Y không thể mở rộng hoạt động, còn các lực lượng $X_1, X_2, \dots, X_n$ thì giữ nguyên.

Chương 3

Mô hình trận đánh kiểu NCW

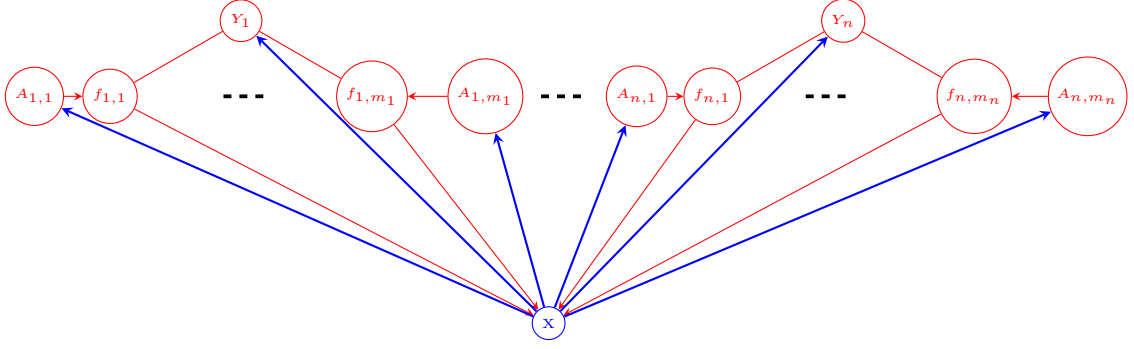
Trong chương này, luận án xây dựng ba mô hình trận đánh kiểu NCW mà trong đó lực lượng X chống lại một hay nhiều lực lượng đối lập, các lực lượng đối lập này lại được hỗ trợ bởi một hay nhiều lực lượng hỗ trợ. Các lực lượng hỗ trợ này tuy rằng không trực tiếp tham gia chiến đấu với X nhưng tùy thuộc vào mức độ hỗ trợ cho các lực lượng đối lập mà có ảnh hưởng trực tiếp đến diễn biến cũng như kết cục trận đánh. Ngoài ra, trong các mô hình này, một phân bố hỏa lực được thêm vào cho lực lượng X , dùng để thể hiện chiến thuật của X trong trận đánh. Rõ ràng phân bố hỏa lực này cũng ảnh hưởng tới diễn biến và kết quả trận đánh. Kết quả nghiên cứu của Chương 3 được được công bố trong 03 công trình [3, 4, 5].

3.1 Mô hình trận đánh kiểu NCW tổng quát

Xét một trận đánh mà một bên là lực lượng X chống lại một bên gồm n lực lượng Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, trong đó mỗi lực lượng Y_i được hỗ trợ bởi m_i ($m_i \in \mathbb{N}$) lực lượng $A_{i,m_1}, \dots, A_{i,m_i}$. Sơ đồ của trận đánh được mô tả dưới Hình 3.1.

Ta ký hiệu:

- r_{Y_i} , ($i = 1, \dots, n$) : tốc độ tiêu diệt của X đối với Y_i , ($0 \leq r_{Y_i} \leq 1$).
- $r_{A_{i,j}}$, ($j = 1, \dots, m_i$) : tốc độ tiêu diệt của X đối với $A_{i,j}$, ($0 \leq r_{A_{i,j}} \leq 1$).
- $\alpha_c^{A_{i,j}}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi kết nối đầy đủ với $A_{i,j}$ đối với X .



Hình 3.1: Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW tổng quát.

- $\alpha_d^{A_{i,j}}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi không có kết nối với $A_{i,j}$ đối với X , $(0 \leq \alpha_d^{A_{i,j}} \leq \alpha_c^{A_{i,j}} \leq 1)$.
- $X(0), A_{i,j}(0), Y_i(0)$: quân số ban đầu của $X, A_{i,j}, Y_i$ tương ứng, $(X(0), A_{i,j}(0), Y_i(0) \geq 0)$.
- $f_{i,j}$: hàm hỗ trợ của $A_{i,j}$ cho Y_i đánh X . Ở đây chúng tôi xét hàm hỗ trợ của $A_{i,j}$ cho Y_i đánh X là một hàm tuyến tính có dạng $f_{i,j} = \alpha_d^{A_{i,j}} + \left(\alpha_c^{A_{i,j}} - \alpha_d^{A_{i,j}} \right) \frac{A_{i,j}}{A_{i,j}(0)}$. Trong trường hợp $A_{i,j}(0) = 0$, tức là lực lượng Y_i không nhận được sự hỗ trợ của lực lượng $A_{i,j}$, hay Y_i khi không có kết nối với $A_{i,j}$, khi đó $f_{i,j} = \alpha_d^{A_{i,j}}$. Trường hợp Y_i kết nối đầy đủ với $A_{i,j}$ thì $f_{i,j} = \alpha_c^{A_{i,j}}$.

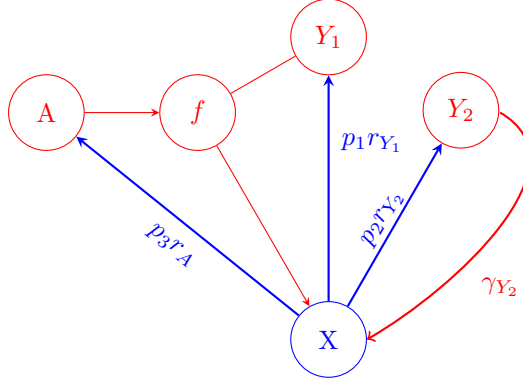
3.2 Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ nhất

3.2.1 Mô hình

Xét một trận đánh mà một bên là lực lượng X , đối đầu với bên còn lại gồm hai lực lượng Y_1 và Y_2 , trong đó Y_2 tác chiến độc lập còn Y_1 có sự hỗ trợ của lực lượng A . Ký hiệu mô hình này là $(X \text{ vs } (Y_1, A), Y_2)$. Sơ đồ trận đánh của mô hình được mô tả trong Hình 3.2.

Trong đó:

+ Tốc độ tiêu diệt của Y_1 đối với X phụ thuộc vào hàm hỗ trợ của A cho Y_1 đánh X , hàm này có dạng $f = \alpha_d^A + (\alpha_c^A - \alpha_d^A) \frac{A}{A(0)}$.



Hình 3.2: Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW - trộn.

+ Y_2 là đơn vị tác chiến độc lập không có lực lượng hỗ trợ, chúng tôi ký hiệu tốc độ tiêu diệt của Y_2 đối với X là γ_{Y_2} .

+ (p_1, p_2, p_3) là một phân bố hỏa lực của X đối với Y_1 , Y_2 , A tương ứng.

Ta có mô hình dưới dạng hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -[\alpha_d^A + (\alpha_c^A - \alpha_d^A) \frac{A}{A(0)}]Y_1 - \gamma_{Y_2}Y_2, \\ \frac{dY_1}{dt} = -p_1r_{Y_1}X, \\ \frac{dY_2}{dt} = -p_2r_{Y_2}X, \\ \frac{dA}{dt} = -p_3r_A X. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2.2 Phân bố hỏa lực tối ưu

Đặt $\mathcal{P} = \{(p_1, p_2, p_3) : p_1, p_2, p_3 \in [0; 1], p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$ là tập các phân bố hỏa lực của X trong giai đoạn 1.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra khái niệm “hệ số đe dọa”, là các hệ số b_1 , b_2 , b_3 được tính theo các công thức sau:

$$b_1 = \alpha_c^A r_{Y_1}, \quad b_2 = \gamma_{Y_2} r_{Y_2}, \quad b_3 = \frac{r_A (\alpha_c^A - \alpha_d^A) Y_1(0)}{A(0)}.$$

Định lý 3.1. Với p_1, p_2, p_3 không đổi tại mọi thời điểm t tùy ý trong giai đoạn 1 của trận đánh, trong đó $p_1, p_2, p_3 \in [0, 1] : (p_1 + p_2 + p_3 = 1)$, khi

đó phân bố hỏa lực tối ưu của X trong giai đoạn 1 là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{khi } b_1 = \max\{b_1, b_2, b_3\}, \\ (0, 1, 0) & \text{khi } b_2 = \max\{b_1, b_2, b_3\}, \\ (0, 0, 1) & \text{khi } b_3 = \max\{b_1, b_2, b_3\}. \end{cases}$$

Hệ quả 3.1. Nếu $Y_2 = 0$, ta có mô hình trận đánh $(X \text{ vs } (Y_1, A))$, mô hình này mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -[\alpha_d^A + (\alpha_c^A - \alpha_d^A) \frac{A}{A(0)}]Y_1, \\ \frac{dY_1}{dt} = -pr_{Y_1}X, \\ \frac{dA}{dt} = -(1-p)r_AX. \end{cases} \quad (3.2)$$

Phân bố hỏa lực tối ưu của X đối với mô hình (3.2) là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0) & \text{khi } \frac{r_A (\alpha_c^A - \alpha_d^A) Y_1(0)}{A(0)} \leq r_{Y_1} \alpha_c^A, \\ (0, 1) & \text{khi } \frac{r_A (\alpha_c^A - \alpha_d^A) Y_1(0)}{A(0)} \geq r_{Y_1} \alpha_c^A. \end{cases}$$

Hệ quả 3.2. Nếu $A = 0$, ta có mô hình trận đánh $(X \text{ vs } (Y_1, Y_2))$, mô hình này mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\alpha_d^A Y_1 - \gamma_{Y_2} Y_2, \\ \frac{dY_1}{dt} = -pr_{Y_1}X, \\ \frac{dY_2}{dt} = -(1-p)r_{Y_2}X. \end{cases} \quad (3.3)$$

Phân bố hỏa lực tối ưu của X đối với mô hình (3.3) là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0) & \text{khi } \alpha_d^A r_{Y_1} \geq \gamma_{Y_2} r_{Y_2}, \\ (0, 1) & \text{khi } \alpha_d^A r_{Y_1} \leq \gamma_{Y_2} r_{Y_2}. \end{cases}$$

3.2.3 Một vài minh họa số

Để minh họa, chúng tôi đã đưa ra một vài kết quả tính toán số cho ba trường hợp của Định lý 3.1, cụ thể là các trường hợp: lực lượng hỗ trợ A bị

đánh trong giai đoạn 1, Y_1 bị đánh trước trong giai đoạn 1 và Y_2 bị đánh trước trong giai đoạn 1. Trong mỗi trường hợp, chúng tôi sẽ phân tích kết quả và diễn tiến của trận đánh trong trường hợp phân bố hỏa lực tối ưu, đồng thời đưa ra một số phân bố hỏa lực khác để so sánh. Để củng cố khẳng định của mình, đối với mỗi trường hợp, chúng tôi cũng tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và khảo sát diễn biến của các trận đánh cho đến khi giai đoạn đầu tiên của trận đánh kết thúc.

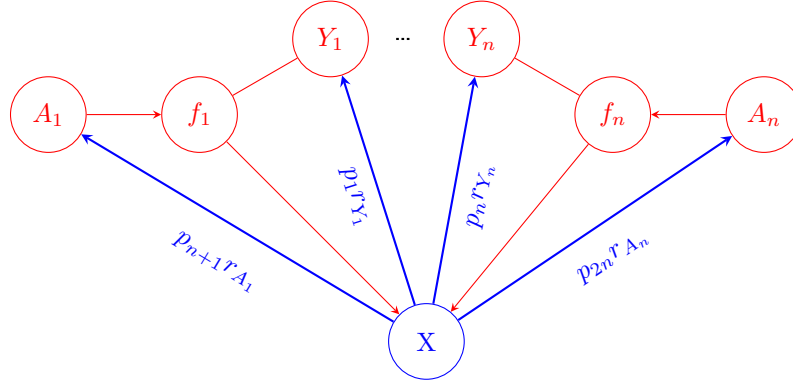
3.3 Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ hai

3.3.1 Mô hình

Xét mô hình trận đánh mà một bên là lực lượng X đối đầu với n lực lượng $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ trong đó mỗi lực lượng Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lại có một đơn vị hỗ trợ A_i tương ứng. Rõ ràng là các đơn vị hỗ trợ $A_1, \dots, A_n$ tác động đến kết quả của trận chiến bằng cách ảnh hưởng đến tốc độ tiêu diệt của $Y_1, \dots, Y_n$ đối với X . Khi quân số của nó bị tiêu diệt hoàn toàn thì các tác động này cũng không còn nữa. Chúng tôi ký hiệu mô hình này là $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n)))$. Sơ đồ trận đánh của mô hình được mô tả trong Hình 3.3.

Đối với mô hình này chúng tôi sử dụng các ký hiệu:

- + r_{A_i} , ($i = 1, \dots, n$) : tốc độ tiêu diệt của X đối với A_i .
- + $\alpha_c^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi kết nối đầy đủ với A_i đối với X .
- + $\alpha_d^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi không có kết nối với A_i đối với X .
- + Tốc độ tiêu diệt của Y_i đối với X phụ thuộc vào hàm hỗ trợ của A_i cho Y_i đánh X , hàm này có dạng $f_i = \alpha_d^{A_i} + \left(\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i} \right) \frac{A_i}{A_i(0)}$.
- + $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{2n})$ là một phân bố hỏa lực của X đối với $Y_1, \dots, Y_n, A_1, \dots, A_n$ tương ứng.



Hình 3.3: Sơ đồ trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n)))$.

Tốc độ suy giảm quân số của tất cả các bên tham chiến được cho dưới dạng hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left[\alpha_d^{A_i} + \left(\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i} \right) \frac{A_i}{A_i(0)} \right] Y_i, \\ \frac{dY_i}{dt} = -p_i r_{Y_i} X, \quad (i = 1, \dots, n), \\ \frac{dA_j}{dt} = -p_{n+j} r_{A_j} X, \quad (j = 1, \dots, n). \end{cases} \quad (3.4)$$

3.3.2 Phân bố hỏa lực tối ưu

Đặt:

$$\begin{aligned} b_i &= \alpha_c^{A_i} r_{Y_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \\ b_{n+j} &= \frac{r_{A_j} \left(\alpha_c^{A_j} - \alpha_d^{A_j} \right) Y_j(0)}{A_j(0)}, \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Chúng tôi gọi các hằng số này là các "*hệ số đe dọa*". Chúng đại diện cho mức độ "đe dọa" của các lực lượng $Y_1, \dots, Y_n$ cùng với các đơn vị hỗ trợ cho chúng đối với lực lượng X . Phân bố hỏa lực tối ưu của X được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 3.2. *Giả sử rằng phân bố hỏa lực của X là tập*

$$\mathcal{P} = \{(p_1, \dots, p_n, \dots, p_{2n}) : p_k \in [0, 1] \text{ là các hằng số, } k = 1, \dots, 2n; \sum_{k=1}^{2n} p_k = 1\}.$$

Khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là :

$$P^* = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0 \right) \text{ trong đó } k = \arg \max_{l=1, \dots, 2n} \{b_l\}.$$

Hệ quả 3.3. Với $n = 2$, ta có mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), (Y_2, A_2)))$, phân bố hỏa lực tối ưu của X khi đó là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0, 0, 0) & \text{nếu } b_1 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \\ (0, 1, 0, 0) & \text{nếu } b_2 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \\ (0, 0, 1, 0) & \text{nếu } b_3 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \\ (0, 0, 0, 1) & \text{nếu } b_4 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Hệ quả 3.4. Với $n = 1$, ta có mô hình $(X \text{ vs } (Y_1, A_1))$, khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0) & \text{nếu } b_1 \geq b_2, \\ (0, 1) & \text{nếu } b_1 \leq b_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.3.3 Một vài minh họa số

Trong phần này, chúng tôi đã đưa ra các tính toán số cho ba trường hợp tiêu biểu của Hệ quả 3.3. Đó là các trường hợp: Y_1 và Y_2 lần lượt bị đánh trước; một trong các đơn vị hỗ trợ bị đánh trước; các đơn vị hỗ trợ lần lượt bị đánh trước. Ngoài ra, trong mỗi trường hợp chúng tôi cũng tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và khảo sát diễn biến của các trận đánh cho đến khi giai đoạn đầu tiên của trận đánh kết thúc.

3.4 Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ ba

3.4.1 Mô hình

Trong phần này, chúng tôi xét mô hình trận đánh mà một bên là lực lượng X đối đầu với một bên là lực lượng Y , trong đó lực lượng Y được hỗ trợ bởi n đơn vị $A_1, \dots, A_n$. Rõ ràng là các đơn vị hỗ trợ $A_1, \dots, A_n$ tác động

đến kết quả của trận chiến bằng cách ảnh hưởng đến tốc độ tiêu diệt của Y đối với X . Khi quân số của các lực lượng hỗ trợ bị tiêu diệt hoàn toàn thì các tác động này cũng không còn nữa. Chúng tôi ký hiệu mô hình này là $(X \text{ vs } (Y, A_1, \dots, A_n))$. Sơ đồ trận đánh của mô hình được mô tả trong Hình 3.4.

Đối với mô hình này chúng tôi sử dụng các ký hiệu:

+ r_{A_i} , $(i = 1, \dots, n)$: tốc độ tiêu diệt của X đối với A_i .

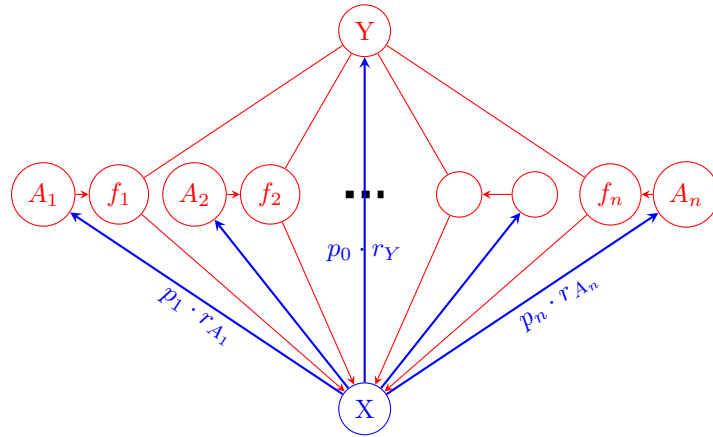
+ $\alpha_c^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y khi kết nối đầy đủ với A_i đối với X .

+ $\alpha_d^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y khi không có kết nối với A_i đối với X .

+ Hàm hỗ trợ của A_i cho Y đánh X là $f_i = \alpha_d^{A_i} + \left(\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}\right) \frac{A_i}{A_i(0)}$.

+ Tốc độ tiêu diệt của Y đối với X phụ thuộc vào tổng của các hàm hỗ trợ của A_i cho Y đánh X , tổng này có dạng $\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n \left(\alpha_d^{A_i} + \left(\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}\right) \frac{A_i}{A_i(0)}\right)$.

+ $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ là một phân bố hỏa lực của X đối với $Y, A_1, \dots, A_n$ tương ứng.



Hình 3.4: Sơ đồ trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } (Y, A_1, \dots, A_n))$.

Mô hình được mô tả dưới hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left[\alpha_d^{A_i} + \left(\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i} \right) \frac{A_i}{A_i(0)} \right] Y, \\ \frac{dY}{dt} = -p_0 r_Y X, \\ \frac{dA_i}{dt} = -p_i r_{A_i} X, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (3.8)$$

3.4.2 Phân bố hỏa lực tối ưu

Đặt :

$$\begin{aligned} b_0 &= \left(\alpha_c^{A_1} + \dots + \alpha_c^{A_n} \right) r_Y \\ b_i &= \frac{r_{A_i} \left(\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i} \right) Y(0)}{A_i(0)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Định lý 3.3. *Giả sử rằng tập các phân bố hỏa lực của X là*

$$\mathcal{P} = \left\{ (p_0, p_1, \dots, p_n) : p_i \in [0, 1] \text{ là các hằng số, } i = 0, \dots, n; \sum_{i=0}^n p_i = 1 \right\},$$

khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là trong giai đoạn 1 của trận đánh là:

$$P^* = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0 \right) \text{ ở đó } i = \arg \max_{j=0,1,\dots,n} \{b_j\}.$$

Hệ quả 3.5. *Với $n = 1$, ta có mô hình $(X \text{ vs } (Y, A_1))$, khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là:*

$$P^* = \begin{cases} (1, 0) & \text{nếu } b_0 \geq b_1, \\ (0, 1) & \text{nếu } b_0 \leq b_1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Hệ quả 3.6. *Với $n = 2$, ta có mô hình $(X \text{ vs } (Y, A_1, A_2))$, phân bố hỏa lực tối ưu của X đối với mô hình này là:*

$$P^* = \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{nếu } b_0 \geq b_1 \text{ và } b_0 \geq b_2, \\ (0, 1, 0) & \text{nếu } b_1 \geq b_2 \text{ và } b_1 \geq b_0, \\ (0, 0, 1) & \text{nếu } b_2 \geq b_1 \text{ và } b_2 \geq b_0. \end{cases} \quad (3.11)$$

3.4.3 Một vài minh họa số

Chúng tôi tính toán số cho ba trường hợp của Hệ quả 3.6, trong đó Y bị đánh trong giai đoạn 1, giai đoạn 2 và giai đoạn 3 tương ứng. Để củng cố khẳng định của mình, đối với mỗi trường hợp, chúng tôi cũng tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và khảo sát diễn biến của các trận đánh cho đến khi giai đoạn đầu tiên của trận đánh kết thúc. Hơn nữa, chúng tôi cũng tiến hành một thử nghiệm cho trường hợp ba "hệ số đe dọa" bằng nhau.

Kết luận và kiến nghị

1. Kết quả đạt được

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- Xây dựng một số mô hình trận đánh: Mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng, Mô hình NCW - trộn $(X \text{ vs } (Y_1, A), Y_2)$, Mô hình NCW $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n)))$, Mô hình NCW $(X \text{ vs } (Y, A_1, A_2, \dots, A_n))$.
- Đề xuất được phương án tình báo và bổ sung quân số tối ưu cho bài toán tối ưu chi phí đối với mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng.
- Chứng minh được phương án phân bố hỏa lực tối ưu cho bài toán tối ưu quân số đối với 03 mô hình kiểu NCW ở trên.
- Xây dựng một số chương trình mô phỏng tính toán số cho các bài toán liên quan đến các mô hình trên.

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

- Xây dựng và khảo sát mô hình Lanchester bất đối xứng (n,m) .
- Xây dựng mô hình trận đánh bất đối xứng gồm nhiều hơn hai bên tham chiến độc lập cũng như nghiên cứu các bài toán tối ưu chi phí, tối ưu quân số đối với mô hình tổng quát.
- Nghiên cứu bài toán phân bố hỏa lực tối ưu đối với các mô hình kiểu NCW mà hàm bổ sung là phi tuyến.

Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

[1] Manh D. Hy, Nam H. Nguyen, Anh N. Ta, Dinh V. Bui and My A. Vu (2017), Optimizing in an Asymmetric Lanchester Model (2,1), *Kỷ yếu Hội nghị quốc tế về ứng dụng toán học lần thứ II - VIAMC 2017*, pp 102-111.

[2] Manh D. Hy, My A. Vu, Nam H. Nguyen, Anh N. Ta and Dinh V. Bui (2020), Optimization in an asymmetric Lanchester (n,1) model, *Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology*, **17** (1), pp 117–122, Scopus.

[3] Nam H. Nguyen, My A. Vu, Anh N. Ta, Manh D. Hy, Tuan A. Do (2021), Optimization in a non-linear Lanchester-type model involving supply units, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **15** (2), pp 315–325, Scopus.

[4] Nam H. Nguyen, My A. Vu, Anh N. Ta, Manh D. Hy, Dinh V. Bui (2021), Optimizing fire allocation in a NCW-type model, *Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology*, <https://doi.org/10.1177/15485129211022861>, Scopus.

[5] My A. Vu, Nam H. Nguyen, Hanh Le T. Nguyen, Anh N. Ta, Mong H. Nguyen (2021), Optimal fire allocation in a combat model of mixed - NCW type, *Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, Submitted.

Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

1. Xêmina của Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
2. Xêmina của Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
3. Hội nghị Quốc tế về Ứng dụng Toán học lần thứ II (VIAMC 2017).
4. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XIV (4/1/2018), Học viện Kỹ thuật Quân sự.
5. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX (14-18/8/2018), Nha Trang.