

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

NGUYỄN HỒNG NAM

NGHIÊN CỨU PHÁT TRIỂN MỘT SỐ MÔ HÌNH
DẠNG LANCHESTER
TRONG MÔ PHỎNG TRẬN ĐÁNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

NGUYỄN HỒNG NAM

NGHIÊN CỨU PHÁT TRIỂN MỘT SỐ MÔ HÌNH
DẠNG LANCHESTER
TRONG MÔ PHÒNG TRẬN ĐÁNH

CHUYÊN NGÀNH: CƠ SỞ TOÁN HỌC CHO TIN HỌC

MÃ SỐ: 9 46 01 10

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

1. TS. Nguyễn Hữu Mộng
2. TS. Đào Trọng Quyết

HÀ NỘI - 2022

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, dưới sự hướng dẫn của các cán bộ trong tập thể hướng dẫn khoa học. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đều đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong công trình của các tác giả khác. Các tài liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

NCS. Nguyễn Hồng Nam

Lời cảm ơn

Bản luận án này được hoàn thành tại Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Hữu Mộng và TS. Đào Trọng Quyết. Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tác giả đã nhận được sự động viên, khuyến khích và chỉ bảo rất tận tình của tập thể giáo viên hướng dẫn. Các thầy đã không quản công sức, dành rất nhiều thời gian thảo luận, rèn giũa và định hướng cho trò. Nghiên cứu sinh xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới hai Thầy.

Nghiên cứu sinh xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự và các thầy cô ở Học viện Quốc phòng đã quan tâm giúp đỡ, động viên và đã cho nghiên cứu sinh những ý kiến đóng góp quý báu. Tác giả xin chân thành cảm ơn TS. Tạ Ngọc Ánh, TS. Hy Đức Mạnh, TS. Bùi Văn Định, TS. Vũ Anh Mỹ, TS. Đỗ Anh Tuấn, các anh chị và bạn bè đồng nghiệp đã luôn bên cạnh động viên, chỉ dạy và giúp đỡ nghiên cứu sinh trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Nghiên cứu sinh trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám đốc, Phòng Sau đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Công nghệ Thông tin, Hệ quản lý Học viên Sau đại học, Học viện Kỹ thuật Quân sự đã luôn giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Tác giả thành kính dâng tặng món quà tinh thần này đến gia đình thân yêu của mình với lòng biết ơn sâu sắc. Bản luận án này sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự cảm thông và giúp đỡ của những người thân trong gia đình tác giả.

Tác giả

Mục lục

Bảng ký hiệu và một số từ viết tắt	1
Danh sách hình vẽ	3
Mở đầu	5
Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị	17
1.1 Một số mô hình toán học động học trận đánh	17
1.1.1 Mô hình Lanchester	17
1.1.2 Một số mô hình trận đánh bất đối xứng	23
1.1.3 Mô hình tự suy giảm quân số và Mô hình bổ sung quân số	26
1.1.4 Tác chiến mạng trung tâm - Mô hình trận đánh NCW . .	27
1.2 Một số kiến thức về lý thuyết điều khiển tối ưu	29
1.2.1 Bài toán điều khiển tối ưu	29
1.2.2 Nguyên lý cực đại Pontryagin	30
1.3 Một số kiến thức về tối ưu đa mục tiêu	34
1.3.1 Bài toán tối ưu đa mục tiêu	35
1.3.2 Phương pháp vô hướng hóa trọng số WM (Weighting Method) giải bài toán tối ưu đa mục tiêu	36
Chương 2. Mô hình trận đánh bất đối xứng	38
2.1 Mô hình và bài toán tối ưu chi phí	40
2.2 Trạng thái ổn định trong và tính ổn định của các trạng thái	42
2.3 Một vài minh họa số	47

2.3.1	Mô hình Lanchester (2,1)	47
2.3.2	Mô hình Lanchester (3,1)	49
Chương 3. Mô hình trận đánh kiểu NCW		53
3.1	Mô hình trận đánh kiểu NCW tổng quát	54
3.2	Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ nhất	56
3.2.1	Mô hình	56
3.2.2	Phân bố hỏa lực tối ưu	57
3.2.3	Một vài minh họa số	63
3.3	Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ hai	69
3.3.1	Mô hình	69
3.3.2	Phân bố hỏa lực tối ưu	71
3.3.3	Một vài minh họa số	77
3.4	Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ ba	86
3.4.1	Mô hình	86
3.4.2	Phân bố hỏa lực tối ưu	87
3.4.3	Một vài minh họa số	92
Kết quả đạt được		101
Hướng nghiên cứu tiếp theo		102
Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án		103
Bảng thuật ngữ		104
Tài liệu tham khảo		105
Phụ lục		

Bảng ký hiệu

\mathbb{N}	Tập hợp các số tự nhiên.
\mathbb{N}^*	Tập hợp các số tự nhiên khác 0.
\mathbb{R}	Tập hợp các số thực.
\mathbb{R}_+	Tập hợp các số thực không âm.
\mathbb{R}_-	Tập hợp các số thực không dương.
\mathbb{R}_+^*	Tập hợp các số thực dương.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Tích vô hướng.
\mathbb{R}^d	Không gian Euclide thực d chiều.
$\ \cdot\ $	Chuẩn Euclide (độ dài).
M^T	Chuyển vị của ma trận M .
$\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$	Tập các ma trận thực cỡ $n \times m$.
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$	Tập các ma trận thực vuông cấp n .
$Re\lambda$	Phần thực của λ .
$Im\lambda$	Phần ảo của λ .
μ	Thông tin tình báo.
β	Tốc độ bổ sung quân số.
X	Lực lượng X .
Y	Lực lượng Y .
A	Lực lượng hỗ trợ.
P^*	Phân bố hỏa lực tối ưu.
$H(x, p, a)$	Hàm Hamilton, $H(x, p, a) := \mathbf{f}(x, a) \cdot p + r(x, a), \quad x, p \in \mathbb{R}^n, a \in A.$
$\frac{\partial L}{\partial x_i}$	Đạo hàm riêng của L theo biến x_i .

Một số từ viết tắt

Từ viết tắt	Tiếng Anh	Tiếng Việt
ARC	Attrition Rate Coefficient	Hệ số tốc độ tiêu hao
LM	Lanchester Model	Mô hình Lanchester
DFM	Directed Fire Model	Mô hình hỏa lực định hướng
AFM	Area Fire Model	Mô hình hỏa lực khu vực
KKS	Kaplan - Kress - Szechtman model	Mô hình KKS
ODE	Ordinary Differential Equation	Phương trình vi phân thường
MOP	Multiobjective Optimization Problems	Bài toán tối ưu đa mục tiêu
CMOP	Convex Multiobjective Opimization Problems	Bài toán tối ưu lồi đa mục tiêu
WM	Weighting Method	Phương pháp trọng số
NCW	Network Centric Warfare	Tác chiến mạng trung tâm

Danh sách hình vẽ

1.1	Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW.	29
2.1	Mô hình Lanchester(2,1): Kết quả cho trường hợp 1.	48
2.2	Mô hình Lanchester(2,1): Kết quả cho trường hợp 2.	50
3.1	Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW tổng quát.	54
3.2	Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW - trộn.	57
3.3	Diễn tiến trận đánh của mô hình NCW - trộn trên lý thuyết.	62
3.4	Diễn tiến trận đánh của mô hình NCW - trộn trên thực tế.	62
3.5	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 1: A bị đánh trước.	65
3.6	Trường hợp 1: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_1]$	66
3.7	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 2: Y_1 bị đánh trước.	67
3.8	Trường hợp 2: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_2]$	68
3.9	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 3: Y_2 bị đánh trước.	69
3.10	Trường hợp 3: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_3]$	70
3.11	Sơ đồ trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n)))$	70
3.12	Diễn tiến trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), (Y_2, A_2)))$ trên lý thuyết.	76
3.13	Diễn tiến trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), (Y_2, A_2)))$ trên thực tế.	77
3.14	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 1: Y_1 và Y_2 lần lượt bị đánh trước.	79
3.15	Trường hợp 1: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_1]$	80

3.16	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 2: Một trong các đơn vị hỗ trợ bị đánh trước.	82
3.17	Trường hợp 2: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_2]$.	83
3.18	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 3: Các đơn vị hỗ trợ lần lượt bị đánh trước.	84
3.19	Trường hợp 3: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_3]$.	85
3.20	Sơ đồ trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } (Y, A_1, \dots, A_n))$	86
3.21	Các trường hợp trận đánh có thể diễn ra theo Hệ quả 3.4.3. . . .	91
3.22	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 1: tấn công Y trong giai đoạn 1.	93
3.23	Trường hợp 1: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_1]$.	94
3.24	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 2: tấn công Y trong giai đoạn 2.	95
3.25	Trường hợp 2: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_2]$.	97
3.26	Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 3: tấn công Y trong giai đoạn 3.	98
3.27	Trường hợp 3: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_3]$.	99
3.28	Trường hợp 4: Quân số X còn lại cho đến khi kết thúc giai đoạn 1.	100

Mở đầu

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Trong suốt toàn bộ lịch sử nhân loại, con người chỉ sống khoảng gần 300 năm trong điều kiện hòa bình, hay chỉ khoảng 8% thời gian chiều dài lịch sử [29]. Những nhà khoa học xã hội đã nỗ lực đo đạc mức độ thường xuyên của xung đột quân sự để biết được liệu mức độ bạo lực quốc tế có đang tăng, giảm, hay giữ nguyên qua thời gian. Họ chia số xung đột vũ trang trên toàn thế giới theo hai cách nhìn: cách thứ nhất nhìn vào những thay đổi theo thập niên kể từ năm 1400; cách thứ 2 nhìn gần hơn vào những năm sau 1950 bằng cách phân tích con số hàng năm của những cuộc xung đột vũ trang đang diễn ra. Những thống kê đã chỉ ra mức độ thường xuyên của những xung đột vũ trang đã tăng lên một cách đáng kể trong hơn 300 năm vừa qua, với thế kỉ 20 đặc biệt bạo lực ([24], Chương 7). Một số mẫu hình xung đột vũ trang đã xuất hiện kể từ sau Chiến tranh thế giới lần thứ 2, gây nên những tác động cho tương lai toàn cầu. Mặc dù số lượng tử vong trung bình đã giảm trong 20 năm vừa qua, số quốc gia có liên quan đến xung đột lại nhiều hơn bao giờ hết trong hơn 7 thập kỉ vừa qua, tổng cộng 231 cuộc xung đột vũ trang đã diễn ra từ năm 1946 đến 2005 [30]. Vào đầu năm 2007, đã có 32 cuộc xung đột vũ trang diễn ra ở 23 nơi trên thế giới [27]. Đằng sau những con số thống kê mức độ thường xuyên này là những xu hướng và đặc tính chung của chiến tranh sau đây [24]:

- Số lượng các quốc gia trên thế giới dính líu tới những cuộc chiến tranh liên quốc gia đã giảm những năm gần đây.
- Đặc biệt, những cuộc chiến giữa những cường quốc đã giảm; từ năm 1945

thế giới chứng kiến một giai đoạn hòa bình lâu dài – một giai đoạn kéo dài lâu nhất trong lịch sử thế giới hiện đại trong đó không có cuộc chiến nào xảy ra giữa những quốc gia mạnh nhất thế giới.

- Hầu hết các cuộc xung đột vũ trang hiện nay diễn ra ở những quốc gia có dân số đông, nhưng thu nhập ít và sở hữu những chính quyền kém ổn định nhất.
- Đa số các cuộc xung đột vũ trang này là nội chiến. Từ năm 1989 đến 2008, 94% của 122 cuộc xung đột vũ trang thực sự trên thế giới là những cuộc nội chiến, trong đó gần 1/3 có sự can thiệp quân sự từ các thế lực bên ngoài [27].
- Do sự xung đột về nhiều mặt giữa các quốc gia và các tổ chức (đặc biệt là các tổ chức tôn giáo và sắc tộc), viễn cảnh chiến tranh bất đối xứng, chiến tranh giữa mạng lưới khủng bố và lực lượng quân sự của các chính phủ, sẽ ngày càng phát triển.

Những xu hướng như trên làm dấy lên những câu hỏi liên quan đến bản chất của chiến tranh đương đại. Tại sao những chủ thể quốc gia và phi quốc gia sử dụng đến bạo lực? Những nhân tố nào là nguyên nhân làm tăng khả năng xảy ra xung đột vũ trang? Chúng có tương tác với nhau qua một chuỗi các diễn biến không ngừng vốn dần xuất hiện qua thời gian hay không?

Mặc dù loài người đã ngăn chặn được khả năng bùng nổ Chiến tranh thế giới lần thứ 3 trong giai đoạn chạy đua vũ trang, nhưng việc dùng vũ khí để giải quyết các tình huống xung đột vẫn là một nét đặc trưng của thời đại ngày nay. Cho nên việc nghiên cứu tính chất và đặc điểm các cuộc chiến tranh cục bộ và xung đột quân sự, từ đó rút ra những bài học cần thiết để phát triển chiến lược và nghệ thuật quân sự sẽ vẫn là một yêu cầu cấp thiết của thế kỷ XXI.

Với tất cả các đặc tính trên của chiến tranh hiện đại thì đấu tranh vũ trang luôn luôn là nhiệm vụ sống còn của mỗi quốc gia. Khi có chiến tranh thì nhiệm vụ đó là hàng đầu, còn khi chiến tranh chưa xảy ra thì đó là nhiệm vụ chuẩn bị

sẵn sàng để khi chiến tranh xảy ra thì có thể tối thiểu được thiệt hại và mất mát, đồng thời đạt được tối đa phần thắng. Có lẽ trên thế giới rất ít quốc gia mà quân đội không chuẩn bị sẵn sàng chiến đấu, còn lại hầu hết quân đội các nước đều ở trạng thái sẵn sàng chiến đấu, thường xuyên phát triển quân số, trang thiết bị quân sự, vũ khí, kỹ thuật quân sự, đào tạo, huấn luyện và thỉnh thoảng tổ chức các cuộc tập trận lớn nhỏ khác nhau, phạm vi qui mô khác nhau. Tất cả các biện pháp trên đều nhằm đặt quân đội trong tư thế sẵn sàng chiến đấu. Tuy nhiên, đạt được mục tiêu đó là nhiệm vụ vô cùng phức tạp, vô cùng khó khăn và tất nhiên là vô cùng cấp bách.

Một nhiệm vụ hết sức quan trọng trong công cuộc chuẩn bị cho chiến tranh là xây dựng các phương án tác chiến khác nhau cho nhiều tính huống chiến sự khác nhau có thể xảy ra trong tương lai. Để thực hiện được nhiệm vụ rất khó khăn này người ta có nhiều cách khác nhau.

Toán học là một môn khoa học được ứng dụng rộng rãi vào tất cả các lĩnh vực hoạt động của con người và xã hội. Từ khi máy tính điện tử ra đời thì các vấn đề phức tạp của toán học mới được ứng dụng có hiệu quả và có ý nghĩa thực tiễn. Cũng từ đó đến nay, hàng loạt các bộ môn toán học mới ra đời để phục vụ ứng dụng toán học như: toán học tính toán (giải tích số, phương pháp số, phương pháp tính toán khoa học, ...), mô hình hóa toán học, mô phỏng, v.v....

Hệ thống hoạt động quân sự của một quốc gia bao gồm nhiều lĩnh vực chuyên môn khác nhau. Các lĩnh vực hoạt động quân sự như xây dựng lực lượng, trang bị, huấn luyện, tác chiến, v.v... đều rất phức tạp và chứa trong nó nhiều yếu tố đặc thù quân sự như: quyết liệt, biến đổi nhanh, phạm vi rộng, rủi ro lớn, v.v.... Những đặc thù này mang tính quyết định khi xây dựng và nghiên cứu các hệ thống hoạt động quân sự. Rất nhiều lĩnh vực hoạt động quân sự cần áp dụng của toán học để giải quyết. Nhu cầu này xuất phát từ nhiều khía cạnh khác nhau: quân sự, khoa học và kinh tế. Ví như để xây dựng một phương án tác chiến theo một chiến lược quân sự nào đó thì truyền thống là người ta sau khi xây dựng xong hệ thống thì tiến hành tập trận để thử nghiệm và rút ra kết luận. Tuy nhiên,

các kết luận từ một cuộc tập trận thường thiếu tính khách quan, chưa có tính qui luật. Để rút ra được kết luận có tính qui luật thì phải thực hiện tập trận rất nhiều lần với các điều kiện khác nhau, nhưng việc này là bất khả thi vì nhiều lý do về tổ chức, trang thiết bị, thời gian và kinh tế. Một giải pháp đơn giản mà hiệu quả và kinh tế là mô phỏng tác chiến trên máy tính. Việc mô phỏng trên máy tính có thể thực hiện bao nhiêu lần cũng được, không hạn chế thời gian và không hạn chế sự thay đổi các điều kiện tác chiến. Từ kết quả mô phỏng ta có thể rút ra các kết luận có tính qui luật hơn hẳn các kết luận từ kết quả tập trận (tính phổ biến khách quan).

Các bài toán đặt ra trong hoạt động quân sự là rất nhiều, rất phong phú sử dụng nhiều công cụ toán học khác nhau như mô hình hóa toán học, qui hoạch toán học, lý thuyết trò chơi, điều khiển, điều khiển tối ưu, sơ đồ mạng, mô phỏng, v.v... [1, 2].

Trên quan điểm lịch sử thì một trong các ứng dụng đầu tiên của “vận trù học” là ứng dụng trong quân sự và là cách tổ chức phòng thủ Sirakus của Archimet [67]. Trong thời đại chúng ta thì mãi đến chiến tranh thế giới I mới có một số mô hình đơn giản của F. Lanchester [39] và được phát triển thêm vào đầu chiến tranh thế giới II [18, 48, 62, 63, 65, 68, 69, 74, 75].

Hiện nay người ta có thể một cách hình thức chia các mô hình toán học của các hoạt động chiến đấu thành 4 nhóm:

- Mô hình giải tích.
- Mô hình mô phỏng.
- Mô hình tối ưu.
- Mô hình quyết định.

Các mô hình giải tích dựa trên cơ sở phương trình vi phân, lý thuyết xác suất, quyết định thống kê, lý thuyết độ tin cậy và phục vụ đám đông, lý thuyết đánh giá chuyên gia, phân tích định tính và khảo sát các hệ động học [59, 60, 63, 70, 71, 75].

Các mô hình mô phỏng dựa trên các xích Markov, các otomat hữu hạn và trí tuệ nhân tạo [19, 35, 68]. Ngoài ra phải kể đến các trò chơi quân sự [18, 67, 72]. Hiện tại có nhiều hệ thống đang chạy trên máy tính cho các hoạt động của một số lĩnh vực quân sự như hàng không hay hải quân [61, 64].

Các mô hình tối ưu áp dụng các phương pháp của qui hoạch toán học [9, 63, 75], lý thuyết điều khiển tối ưu [12, 25, 63, 71, 75], tối ưu hoá rời rạc [12, 66, 70, 71] và lý thuyết phục vụ đám đông và điều khiển dự trữ [63, 70, 71, 75].

Lý thuyết quyết định có thể chia một cách tượng trưng thành quyết định cá nhân và quyết định tập thể. Trong nhóm thứ nhất chú trọng đến quyết định đa mục tiêu, còn ở nhóm thứ hai chú trọng đến lý thuyết trò chơi – ra quyết định trong các điều kiện bất định ([63]).

Theo cách khác, người ta cũng phân loại các mô hình toán học trong quân sự theo lĩnh vực hoạt động: lục quân, hải quân, không quân, biên phòng, v.v. . .

Khi xây dựng các phương án tác chiến người ta phải luôn dựa vào học thuyết quân sự của quốc gia, nghệ thuật quân sự cũng như lịch sử quân sự và kết quả của các cuộc chiến đã qua. Tuy nhiên, không thể có một phương án mới nào được xây dựng trùng lặp với các phương án đã thực hiện trong quá khứ, vì đơn giản, chiến tranh tương lai không giống như các cuộc chiến đã qua. Vì vậy, để kiểm tra các phương án mới xây dựng người ta thường tổ chức các cuộc tập trận với qui mô mức độ phù hợp. Nhưng, việc tổ chức các cuộc tập trận là vô cùng tốn kém về mặt kinh tế cũng như các phương diện khác như kỹ thuật, trang bị, con người, v.v... Do vậy, một cách hiệu quả và rất kinh tế là “thực hiện các cuộc tập trận trên máy tính”. Đây là một lĩnh vực không mới đối với thế giới nhưng có lẽ rất mới mẻ với nền quân sự nước nhà. Như chúng tôi biết, trong Bộ quốc phòng cũng đã có những nỗ lực tìm kiếm các phương pháp áp dụng tri thức toán học, công nghệ thông tin vào các hoạt động quân sự nhưng hầu như chưa đạt được những kết quả mong muốn đáng kể.

Thực hiện các cuộc tập trận trên máy tính là làm các thí nghiệm về hoạt động tác chiến trên máy tính. Để làm được việc này ta phải:

- Đặt bài toán.
- Nghiên cứu xây dựng mô hình.
- Nghiên cứu xây dựng các phương pháp giải (giải tích và số).
- Mô phỏng theo các tình huống khác nhau.
- Phân tích các kết quả mô phỏng đạt được.
- Rút ra các kết luận từ phân tích đầu ra.
- Điều chỉnh lại mô hình trong đó có các tham số đầu vào.
- Mô phỏng lại.
- Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi đạt được kết quả mong muốn.

Như vậy, phương pháp thực nghiệm trên máy tính có các ưu điểm sau:

- Thực hiện được cho mô hình tác chiến bất kỳ.
- Đối với một mô hình có thể thực hiện nhiều lần, bao nhiêu lần cũng được.
- Chi phí cho mỗi cuộc thí nghiệm mô hình là không đáng kể.
- Thời gian thực hiện một mô hình có thể tính bằng giờ, không kéo dài như một cuộc tập trận bình thường.

Người đầu tiên xây dựng mô hình trận đánh dưới dạng giải tích là Lanchester vào năm 1916 [39], mô hình được xây dựng dưới dạng một hệ phương trình vi phân và được gọi là **mô hình Lanchester**. Sau đó, mô hình Lanchester được nghiên cứu và mở rộng hơn với nhiều biến thể khác nhau. Mô hình trộn do Brackney đưa ra vào năm 1959 [10], mô hình trộn sau đó đã được Deitchman mở rộng vào năm 1962 [17] và Helmbold vào năm 1965 [28]. Năm 1968, Schreiber [52] đã mở rộng mô hình của Deitchman bằng cách đưa vào yếu tố thông tin tình báo. Tổng quát hơn, năm 2005 và 2009 Kaplan, Kress và Szechtman xây dựng

mô hình KKS có thông tin tình báo và khái niệm "hiệu ứng con dao hai lưỡi" liên quan đến mô hình lần đầu tiên được các tác giả nghiên cứu [35, 37]. Các mô hình trên (trộn, Deitchman, Helmbold, Schreiber, KKS) mô tả trận đánh giữa hai lực lượng trong đó một bên có quân số tham gia vượt trội so với bên còn lại nên còn được gọi là các mô hình trận đánh bất đối xứng. Trong một trận đánh, nhiều tổn thất của các bên tham chiến lại do chính bên đó gây ra (ví dụ như do tai nạn, do ốm đau,...), P. Morse và G. Kimball [44] đề xuất mô hình tự suy giảm quân số vào năm 1951. Năm 1976 Coleman [16] xây dựng mô hình mà trong đó ngoài tổn thất liên quan đến chiến đấu và hoạt động, số lượng chiến binh tham gia vào một trận chiến cũng thay đổi khi quân tiếp viện được đưa đến hoặc khi các quân số bị rút đi, mô hình này còn được gọi là mô hình bổ sung quân số. Năm 2017, Donghyun Kim và nhóm tác giả đã xây dựng mô hình trận đánh trong đó ngoài các lực lượng trực tiếp tham gia vào trận đánh còn có các lực lượng hỗ trợ gián tiếp tham gia vào trận đánh và gọi đó là mô hình NCW [36]. Các mô hình này đều được mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân và được gọi chung là **mô hình dạng Lanchester** [56].

Ngoài việc xây dựng mô hình toán học cho một trận đánh thì trong nhiều năm qua các nhà khoa học đã tiến hành nghiên cứu các vấn đề sau liên quan đến mô hình toán học của trận đánh:

- Năm 1948, Snow [53] là người đầu tiên nghiên cứu kỹ lưỡng các vấn đề xảy ra ngẫu nhiên đối với mô hình Lanchester. Theo đó, ở trong mô hình Lanchester các thông số ngẫu nhiên được Snow nghiên cứu là hỏa lực và quân số.
- Năm 1956, Isbell và Marlow [34] đã nghiên cứu các mô hình mà lực lượng tham chiến không đồng nhất, đồng thời nghiên cứu sự phân bố hỏa lực cho các mục tiêu.
- Năm 1973, Howes và Thrall [32] đã sử dụng lý thuyết Perron-Frobenius về các giá trị riêng và các vector riêng để tính trọng số tổng thể (hiệu quả) của

một lực lượng không đồng nhất. Trọng số tổng thể này được định nghĩa là tổng các hiệu quả trung bình của hiệu quả của các vũ khí riêng lẻ, được lấy từ ma trận hiệu quả giữa các vũ khí. Các ma trận này là giả định và được đưa ra trong nghiên cứu của họ.

- Năm 1974, trong các nghiên cứu của mình, Taylor [54, 55] đã sử dụng lý thuyết điều khiển tối ưu để tìm ra phân phối hỏa lực tối ưu cho các mô hình Lanchester. Sau đó, năm 2014, Lin và Mackay [41] mở rộng các kết quả của Taylor cho bài toán hỏa lực tối ưu theo thời gian cho mô hình Lanchester $(n,1)$.
- Để tìm ra nghiệm dưới dạng giải tích của một mô hình trận đánh kiểu Lanchester nhiều khi là không thể. Khắc phục vấn đề này, năm 1983, Taylor [56] đã sử dụng các phương pháp giải số hệ phương trình vi phân, như phương pháp Euler-Cauchy, nhằm chứng minh cho tính đúng đắn của các nghiên cứu về mô hình toán học của trận đánh.
- Năm 1989, Protopopescu và các tác giả [51] đã phát triển một mô hình trận đánh sử dụng các phương trình đạo hàm riêng có các tác động của sự phụ thuộc không gian nhằm khắc phục một số thiếu sót của phương trình dạng Lanchester. Mô hình của họ cũng giới thiệu một số vấn đề thực tế không tồn tại trong các mô hình Lanchester cổ điển.
- Năm 1995, Huges [33] đã nghiên cứu về hiệu quả tinh thần của sức mạnh chiến đấu nhằm tìm hãm các hành động của đối phương. Dựa trên nhận xét rằng những tác động rõ ràng của sức mạnh chiến đấu không chỉ về thể chất mà còn về tinh thần, ông đã phát triển một phương pháp định lượng sử dụng định luật bình phương Lanchester để minh họa hiệu quả ngăn chặn hỏa lực của đối phương.
- Năm 1999, Fowler [21] đã thiết lập các kỹ thuật để tập hợp các mô hình Lanchester không đồng nhất với hỏa lực định hướng thành một mô hình

Lanchester đồng nhất.

- Năm 2012, Feichtinger và nhóm tác giả [20] nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu cho mô hình KKS với hàm mục tiêu là chi phí cho trận đánh với các biến điều khiển là thông tin tình báo và tốc độ bổ sung quân số.
- Năm 2016, Chuev V. U, Dubogray I. V [76] đã nghiên cứu tầm quan trọng của đòn đánh phủ đầu trong mô hình trận đánh "được tổ chức kém" có nhiều lực lượng tham gia.
- Năm 2017, Donghyun Kim và nhóm tác giả [36] đã xây dựng mô hình Lanchester dạng NCW (Network Centric Warfare) mà trong đó một bên có sử dụng hàm bổ sung là một lực lượng bao gồm quân số cũng như các thông tin về trận chiến. Nhóm tác giả cũng đã đưa ra một số kết quả tối ưu hỏa lực trong trường hợp hàm bổ sung là tuyến tính và phi tuyến.
- Năm 2020, Shimov và Korepanov [73] đã nghiên cứu mô hình trận đánh "tấn công - phòng thủ" mà trong đó các yếu tố sau được xem xét đến: kinh nghiệm chỉ huy, khả năng phối hợp tác chiến của các đơn vị, khả năng trinh sát, hỏa lực, khả năng cơ động của các bên và khả năng hỗ trợ tác chiến.

Ở nước ta, từ khi thành lập Bộ môn Toán của Học viện Kỹ thuật Quân sự và Trung tâm tính toán Bộ quốc phòng (nay là Viện Công nghệ thông tin thuộc Viện Khoa học công nghệ quân sự) các vấn đề về ứng dụng toán học vào các hoạt động chiến đấu đã được đề cập. Nhưng đến nay, các cố gắng này vẫn chưa đạt được những kết quả khả quan. Nói chung chưa có những kết quả sâu sắc và có tính ứng dụng cao, mọi kết quả mới chỉ dừng lại ở một số bài toán cụ thể như: bài toán vận tải, hành quân, tiết kiệm vật liệu trang bị, tổ chức kho bãi, v.v... Về phương diện mô hình toán cho các hoạt động chiến đấu, đặc biệt là động học trận đánh, thì chưa có một kết quả nào, ngoài một số kết quả của nhóm chúng tôi [3, 4, 5].

Từ lịch sử vấn đề được phân tích trên ta thấy, việc nghiên cứu xây dựng, khảo

sát và mô phỏng các cuộc đấu tranh vũ trang bằng các mô hình toán học trên máy tính là có ý nghĩa khoa học, quân sự to lớn và có hiệu quả kinh tế cao. Ngoài ra nhiệm vụ này luôn luôn là nhiệm vụ rất thời sự của nền quốc phòng toàn dân của chúng ta.

Với những lý do trên đây mà chúng tôi chọn đề tài “**Nghiên cứu phát triển một số mô hình dạng Lanchester trong mô phỏng trận đánh**” làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu các chủ điểm sau:

- (i) Xây dựng mô hình toán học cho trận đánh bất đối xứng với một bên là n lực lượng tham chiến có lực lượng lớn và có chia sẻ thông tin tình báo với một bên là một lực lượng có quân số nhỏ. Với mô hình này, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu với hàm mục tiêu là chi phí cho trận đánh của n lực lượng và các biến điều khiển là mức độ thông tin tình báo và tốc độ bổ sung quân số.
- (ii) Xây dựng mô hình toán học cho trận đánh mà một bên có sự hỗ trợ của các lực lượng khác, các lực lượng hỗ trợ này tuy không trực tiếp tham chiến nhưng có ảnh hưởng đến kết cục của trận đánh. Đối với các mô hình này, chúng tôi nghiên cứu bài toán phân bố hỏa lực tối ưu sao cho quân số còn lại của "bên ta" là lớn nhất tại mọi thời điểm.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với các mục tiêu đặt ra như trên, đối tượng và phạm vi nghiên cứu trong luận án này của chúng tôi như sau:

Đối tượng nghiên cứu: Mô hình trận đánh bất đối xứng và các mô hình trận đánh kiểu NCW.

Phạm vi nghiên cứu: Xây dựng mô hình, bài toán tối ưu chi phí, bài toán phân bố hỏa lực tối ưu, dự báo diễn biến và kết cục trận đánh.

4. Phương pháp nghiên cứu

Xuất phát từ mục tiêu của đề tài nghiên cứu, các phương pháp nghiên cứu được sử dụng như sau:

- Sử dụng các lý thuyết về phương trình vi phân để xây dựng các mô hình trận đánh: Mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng và Mô hình trận đánh kiểu NCW.
- Sử dụng phương pháp tối ưu Pontryagin để nghiên cứu bài toán tối ưu chi phí đối với Mô hình Lanchester bất đối xứng.
- Sử dụng các phương pháp giải tích liên quan đến bài toán tối ưu đa mục tiêu để nghiên cứu bài toán tối ưu về quân số đối với Mô hình trận đánh kiểu NCW.
- Lập trình giải số và mô phỏng một số trận đánh ứng với các mô hình trên.

5. Bố cục của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án, Tài liệu tham khảo và Phụ lục, luận án có ba chương.

Trong Chương 1, phần đầu tiên chúng tôi giới thiệu khái quát các mô hình quân sự và mô hình toán của trận đánh. Phần tiếp theo của chương, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về lý thuyết điều khiển tối ưu. Phần cuối của chương là một số kiến thức cơ bản về bài toán tối ưu đa mục tiêu và phương pháp vô hướng hóa WM để giải bài toán đó.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu các vấn đề liên quan đến Mô hình Lanchester phi tuyến bất đối xứng. Trong phần đầu, chúng tôi khảo sát và xây

dựng mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng, phát biểu bài toán tối ưu chi phí và sử dụng Nguyên lý cực đại Pontryagin để giải quyết bài toán. Trong phần tiếp theo, chúng tôi thực hiện một số tính toán số minh họa cho tính đúng đắn của các nghiên cứu đó.

Trong Chương 3, chúng tôi dành cho nghiên cứu liên quan đến các Mô hình trận đánh dạng NCW. Đầu tiên, chúng tôi sẽ xây dựng các Mô hình trận đánh này dưới dạng hệ phương trình vi phân. Tiếp theo chúng tôi phát biểu và giải quyết bài toán phân bố hỏa lực tối ưu nhằm tối ưu hóa quân số tại một thời điểm bất kỳ. Cuối cùng là một số tính toán số minh họa cho tính đúng đắn của các kết quả mà chúng tôi đưa ra.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, đầu tiên chúng tôi sẽ giới thiệu khái quát một số mô hình toán học động học của trận đánh. Phần tiếp theo của chương, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về lý thuyết điều khiển tối ưu. Những kiến thức cơ sở này được chúng tôi áp dụng nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu nhằm tối ưu hóa chi phí cho mô hình chống khủng bố được trình bày trong Chương 2. Phần cuối của chương là một số kiến thức cơ bản về bài toán tối ưu đa mục tiêu và phương pháp vô hướng hóa để giải bài toán đó. Trong Chương 3, chúng tôi sẽ sử dụng những kiến thức này để giải bài toán tối ưu đa mục tiêu có liên quan đến phân phối hỏa lực của các mô hình NCW kiểu Lanchester.

1.1 Một số mô hình toán học động học trận đánh

Dưới đây, chúng tôi trình bày một số mô hình trận đánh dưới dạng giải tích mà tiêu biểu là các mô hình của Lanchester và các mô hình kiểu Lanchester.

1.1.1 Mô hình Lanchester

Lanchester (1916) [7, 39] đề xuất sử dụng hệ phương trình vi phân với hệ số tốc độ tiêu hao không đổi để mô hình hóa một trận đánh. Các mô hình này mô tả sự thay đổi lực lượng của đối thủ theo thời gian dưới dạng một hệ phương trình vi phân. Mô hình Lanchester (LM: Lanchester Model) đã được sử dụng để thu thập thông tin về hành vi chung của các đơn vị và có thể áp dụng cho các đơn vị tổng hợp liên quan đến số lượng các chiến binh. Trong mô hình Lanchester, trận

đánh được giả định diễn ra giữa hai lực lượng đồng nhất (mỗi lực lượng chỉ bao gồm một loại chiến binh hoặc vũ khí), và hiệu ứng tiêu hao được phản ánh với hệ số tốc độ tiêu hao (ARC: Attrition Rate Coefficient) không đổi. Lanchester đưa ra hai loại mô hình: Mô hình hỏa lực định hướng và mô hình hỏa lực khu vực.

Mô hình hỏa lực định hướng

Trong mô hình hỏa lực định hướng, khi các chiến binh tiếp cận và bắn vào một mục tiêu xác định, sự tiêu hao chỉ phụ thuộc vào kích thước của lực lượng đối lập. Mô hình hỏa lực định hướng (DFM: Directed Fire Model) có dạng hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -aY, \\ \frac{dY}{dt} = -bX, \\ X(0) = X_0, Y(0) = Y_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Trong hệ phương trình trên, $X = X(t)$ và $Y = Y(t)$ biểu thị quân số (hoặc vũ khí) của các lực lượng X và Y tại thời điểm t , trong khi a và b là các hằng số dương, thể hiện cho tốc độ tiêu diệt hiệu quả của một đơn vị lực lượng Y và X tương ứng. Ví dụ, a đại diện cho quân số lực lượng X bị tiêu diệt bởi một đơn vị Y trên mỗi đơn vị thời gian. Quân số của lực lượng X và Y ban đầu, X_0 và Y_0 , là các điều kiện ban đầu cho hệ phương trình này. Hệ (1.1) có thể giải được như sau:

Lấy đạo hàm phương trình thứ nhất và thay Y' từ phương trình thứ hai ta được:

$$X'' - abX = 0.$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là: $X = C_1 e^{\sqrt{ab}t} + C_2 e^{-\sqrt{ab}t}$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Với điều kiện ban đầu $X(0) = X_0$ và $Y(0) = Y_0$ ta có thể tìm được nghiệm riêng của hệ (1.1) như sau:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{2} \left(\left(X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} Y_0 \right) e^{\sqrt{abt}} + \left(X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} Y_0 \right) e^{-\sqrt{abt}} \right), \\ Y(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \left(- \left(X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} Y_0 \right) e^{\sqrt{abt}} + \left(X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} Y_0 \right) e^{-\sqrt{abt}} \right), \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Với mọi $X(t), Y(t)$ là nghiệm của hệ (1.1), ta có:

$$(bX^2 - aY^2)' = 2bXX' - 2aYY' = 2bX(-aY) - 2aY(-bX) = 0,$$

do đó:

$$bX^2 - aY^2 = \text{constant} = bX_0^2 - aY_0^2 = K.$$

Biểu thức $\mathfrak{L}(X; Y) = bX^2 - aY^2 = K$ được gọi là luật bảo toàn của mô hình.

Vậy nên, mô hình (1.1) còn được gọi là mô hình tuân theo luật bình phương.

Ngoài ra, liên quan đến mô hình Lanchester (1.1), người ta còn quan tâm đến các vấn đề sau:

- Điều kiện để một bên nào đó chiến thắng trận đánh?
- Khi nào trận đánh kết thúc?
- Quân số còn lại của các bên khi trận đánh kết thúc?

Để nghiên cứu các vấn đề trên, Lanchester đã đưa ra các khái niệm sau:

- Lực lượng X thắng trận và lực lượng Y thua trận nếu tồn tại một thời điểm T nào đó sao cho $X(T) > 0$ và $Y(T) = 0$.
- Lực lượng X thua trận và lực lượng Y thắng trận nếu tồn tại một thời điểm T nào đó sao cho $X(T) = 0$ và $Y(T) > 0$.
- Trận đánh được coi như là hòa nếu tồn tại một thời điểm T nào đó sao cho $X(T) = Y(T) = 0$.

T được gọi là thời điểm kết thúc trận đánh.

Từ biểu thức nghiệm (1.2) ta có:

- Nếu $k = X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0 > 0$, thì $X(t) > 0, \forall t \geq 0$ và tồn tại một thời điểm $T > 0$ sao cho $Y(T) = 0$; giá trị T thu được từ phương trình:

$$-\left(X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0\right)e^{(\sqrt{abt})} + \left(X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0\right)e^{(-\sqrt{abt})} = 0,$$

$$\text{suy ra: } T = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left(\frac{X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0}{X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0} \right).$$

Trong trường hợp này thì X là bên thắng trận, Y là bên thua trận, thời gian kéo dài trận đánh là T , và thời gian kết thúc trận đánh là hữu hạn. Hơn nữa, khi đó: $bX^2(T) - aY^2(T) = bX^2(T) = K$, và do đó quân số còn lại của X khi trận đánh kết thúc là $X(T) = \sqrt{\frac{K}{b}}$.

- Nếu $k = X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0 < 0$, thì $Y(t) > 0, \forall t \geq 0$ và tồn tại một thời điểm $T > 0$ sao cho $X(T) = 0$; giá trị T thu được từ phương trình:

$$\left(X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0\right)e^{(\sqrt{abt})} + \left(X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0\right)e^{(-\sqrt{abt})} = 0,$$

$$\text{suy ra: } T = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left(-\frac{X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0}{X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0} \right).$$

Trong trường hợp này thì Y là bên thắng trận, X là bên thua trận, thời gian kéo dài trận đánh là T , và thời gian kết thúc trận đánh là hữu hạn. Hơn nữa, khi đó: $bY^2(T) - aX^2(T) = bY^2(T) = K$, và do đó quân số còn lại của Y khi trận đánh kết thúc là $Y(T) = \sqrt{\frac{K}{b}}$.

- Nếu $k = X_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0 = 0$, khi đó ta có:

$$X(t) = \frac{1}{2} \left(X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0 \right) e^{(-\sqrt{abt})}, \forall t \geq 0,$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \left(X_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}Y_0 \right) e^{(-\sqrt{abt})}, \forall t \geq 0.$$

Chú ý rằng trong trường hợp này thì $X(t) > 0, Y(t) > 0 \forall t \geq 0$. Tuy nhiên,

$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$; hơn nữa:

$$\frac{X(t)}{Y(t)} = \frac{X_0}{Y_0} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

điều này có nghĩa là tỷ lệ quân số của hai lực lượng không đổi theo thời gian. Do đó, trường hợp này trận đánh được gọi là "hòa", và thời gian của trận đánh là vô hạn.

Mô hình hỏa lực khu vực

Bên cạnh mô hình hỏa lực xác định, Lanchester còn đưa ra mô hình hỏa lực khu vực (AFM: Area Fire Model) dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -aXY, \\ \frac{dY}{dt} = -bXY, \\ X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

trong đó a, b là các hằng số dương.

Với mọi $X(t), Y(t)$ là nghiệm của hệ (1.3) thỏa mãn điều kiện ban đầu $X(0) = X_0, Y(0) = y_0$, ta có:

$$(bX - aY)' = bX' - aY' = b(-aXY) - a(-bXY) = 0,$$

do đó:

$$bX - aY = \text{constant} = bX_0 - aY_0 = K.$$

Biểu thức $\mathfrak{L}(X; Y) = bX - aY = K$ được gọi là luật bảo toàn của mô hình. Vậy nên, mô hình (1.3) còn được gọi là mô hình Lanchester tuân theo luật tuyến tính.

Hơn nữa, từ $bX(t) - aY(t) = bX_0 - aY_0 = K$ ta có:

$$Y = \frac{bX - K}{a} = \frac{bX - (bX_0 - aY_0)}{a},$$

và thay Y vào phương trình đầu của hệ (1.3) ta có phương trình vi phân đối với X như sau:

$$\frac{dX}{dt} = (bX_0 - aY_0)X - bX^2. \quad (1.4)$$

Đây là phương trình Bernoulli và nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$X(t) = \begin{cases} \frac{X_0}{1 + bX_0t} & \text{nếu } \frac{X_0}{Y_0} = \frac{a}{b}, \\ X_0 \frac{bX_0 - aY_0}{bX_0 - aY_0 e^{-(bX_0 - aY_0)t}} & \text{nếu } \frac{X_0}{Y_0} \neq \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Tương tự ta có:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{Y_0}{1 + aY_0t} & \text{nếu } \frac{X_0}{Y_0} = \frac{a}{b}, \\ -Y_0 \frac{bX_0 - aY_0}{aY_0 - bX_0 e^{(bX_0 - aY_0)t}} & \text{nếu } \frac{X_0}{Y_0} \neq \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Điều kiện thắng, thua đối với mô hình này như sau:

- Nếu $K = bX_0 - aY_0 > 0$, thì $X(t), Y(t)$ đều là các hàm dương, giảm thực sự với mọi $t \geq 0$ và ta có $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_0 - \frac{a}{b}Y_0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$. Trong trường hợp này thì X là bên thắng trận, Y là bên thua trận, thời gian của trận đánh là vô hạn.
- Nếu $K = bX_0 - aY_0 < 0$, thì $X(t), Y(t)$ đều là các hàm dương, giảm thực sự với mọi $t \geq 0$ và ta có $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = Y_0 - \frac{b}{a}X_0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$. Trong trường hợp này thì Y là bên thắng trận, X là bên thua trận, thời gian của trận đánh là vô hạn.
- Nếu $K = bX_0 - aY_0 = 0$, thì $X(t), Y(t)$ đều là các hàm dương, giảm thực sự với mọi $t \geq 0$ và ta có $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$ và

$$\frac{X(t)}{Y(t)} = \frac{X_0}{Y_0} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

điều này có nghĩa là tỷ lệ quân số của hai lực lượng không đổi theo thời gian. Do đó, trường hợp này trận đánh được gọi là "hòa", và thời gian của trận đánh là vô hạn.

1.1.2 Một số mô hình trận đánh bất đối xứng

Mô hình trộn

Mô hình trộn do Brackney đưa ra vào năm 1959 [10], dưới dạng hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -aXY, \\ \frac{dY}{dt} = -bX, \\ X(0) = X_0, Y(0) = Y_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Các giả thuyết chính của mô hình là:

- Trận đánh diễn ra giữa hai bên tham chiến X và Y là bất đối xứng, tức là giữa lực lượng có quân số nhỏ X và lực lượng Y có quân số vượt trội so với lực lượng X .
- Hiệu quả tiêu diệt của Y và X lần lượt là các hằng số dương a và b .
- Lực lượng X xác định rõ mục tiêu nên hỏa lực của X là hỏa lực xác định, còn lực lượng Y chưa xác định rõ mục tiêu nên hỏa lực của Y là hỏa lực khu vực.
- Trận đánh không xét đến quân tăng viện và sự tự tổn thất của cả hai bên.

Với mọi $X(t), Y(t)$ là nghiệm của hệ (1.5) thỏa mãn điều kiện ban đầu $X(0) = X_0, Y(0) = Y_0$, ta có $(-2bX + aY^2)' = -2bX' + 2aYY' = -2b(-aXY) + 2aY(-bX) = 0$, do đó:

$$-2bX(t) + aY^2(t) = \text{constant} = -2bX_0 + aY_0^2 = K.$$

Biểu thức $\mathfrak{L}(X; Y) = -2bX + aY^2 = K$ được gọi là luật bảo toàn của mô hình. Vậy nên, mô hình (1.5) còn được gọi là mô hình tuân theo luật parabol Lanchester.

Mô hình Deitchman

Mô hình trộn đã được Deitchman mở rộng vào năm 1962 [17] như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -a \frac{XY}{s_X}, \\ \frac{dY}{dt} = -bX, \\ X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

ở đây s_X là mật độ hỏa lực của X .

Mô hình Helmbold

Mô hình này phản ánh một số vấn đề hạn chế bắt nguồn từ sự bất đối xứng giữa các lực lượng. Ví dụ như, nếu tỷ lệ $\frac{X}{Y}$ quá lớn, lực lượng X sẽ không thể lấy toàn bộ lực lượng của nó để đánh lại Y do khả năng không thể quan sát, các hạn chế về chuyển đổi mục tiêu, v.v. Theo quan điểm này, năm 1965 Helmbold [28] đưa ra trận đánh dưới dạng hệ phương trình vi phân kiểu Lanchester sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -a \left(\frac{X}{Y}\right)^{1-\omega} Y, \\ \frac{dY}{dt} = -b \left(\frac{Y}{X}\right)^{1-\omega} X, \end{cases} \quad (1.7)$$

trong đó $\omega \in [0, 1]$ đại diện cho độ hiệu quả của lực lượng "lớn" so với lực lượng "nhỏ".

Trường hợp khi $\omega = 1$, ta có mô hình Lanchester với hỏa lực định hướng. Khi $\omega = \frac{1}{2}$, ta có mô hình Lanchester với hỏa lực khu vực. Khi $\omega = 0$, ta có mô hình sau gọi là mô hình tự suy giảm quân số (do đào ngũ, bệnh tật,...) [49]:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -aX, \\ \frac{dY}{dt} = -bY. \end{cases} \quad (1.8)$$

Mô hình Schreiber

Năm 1968, Schreiber [52] đã mở rộng mô hình của Deitchman bằng cách đưa vào yếu tố thông tin tình báo.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -a \frac{XY}{X_0 - e_Y(X_0 - X)}, \\ \frac{dY}{dt} = -b \frac{XY}{Y_0 - e_X(Y_0 - Y)}, \end{cases} \quad (1.9)$$

trong đó:

- X_0, Y_0 là quân số ban đầu tương ứng của X, Y ;
- a, b là các hằng số dương;
- $e_X, e_Y \in [0; 1]$ là thông tin tình báo tương ứng của X, Y . Nếu $e_X = e_Y = 1$ ta có mô hình Lanchester hỏa lực xác định. Nếu $e_X = e_Y = 0$ ta thu được mô hình Lanchester hỏa lực khu vực.

Mô hình KKS

Mô hình do Kaplan, Kress và Szechtman đưa ra trong các bài báo năm 2005 và 2009 [35, 37] nên còn được gọi là mô hình KKS. Đây là mô hình dưới dạng mô hình kiểu Lanchester có bao gồm thông tin tình báo giữa một bên là lực lượng quân đội chính quy X có lực lượng vượt trội so với bên còn lại là một nhóm có quân số nhỏ Y . Theo các tác giả, lần đầu tiên thuật ngữ hiệu ứng “con dao hai lưỡi” được đưa ra và trong các công trình nghiên cứu của mình các tác giả cũng giải thích vì sao lực lượng nhỏ Y không thể bị tiêu diệt hoàn toàn. Tác động của thông tin tình báo lên kết quả của một cuộc chiến giữa một lực lượng quân chính quy và một lực lượng nhỏ đã được Kaplan, Kress và Szechtman đưa ra trong một mô hình bất đối xứng. Mức độ tình báo càng cao thì hỏa lực tiêu diệt càng hiệu quả.

Xét hai biến trạng thái, X và Y , biểu thị quy mô của lực lượng chính quy và của lực lượng nhỏ đối lập. Giả sử Y là một nhóm nhỏ phân tán trong tổng dân

số P . Do P được giả thiết là hằng số, có thể coi $P = 1$, suy ra $0 \leq Y \leq 1$. Mô hình KKS được cho dưới dạng hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\alpha Y + \beta - \delta X, \\ \dot{Y} = -\gamma X(\mu + (1 - \mu)Y) + \theta(C), \end{cases} \quad (1.10)$$

trong đó:

- α và γ là các hằng số dương lần lượt là hiệu quả của các cuộc tấn công của lực lượng Y và của quân đội chính quy X .
- $\beta \in [0, 1]$ biểu thị tỷ lệ bổ sung của quân đội chính quy.
- $\theta(C)$ biểu thị hiệu ứng con dao hai lưỡi nói trên, với $C = \gamma X(1 - \mu)(1 - Y)$.

Lưu ý rằng trong một mô hình mà thông tin tình báo là hoàn hảo, $\mu = 1$, dẫn đến mô hình Lanchester với hỏa lực xác định, còn trong trường hợp không có thông tin tình báo, $\mu = 0$, chúng ta có mô hình trộn.

1.1.3 Mô hình tự suy giảm quân số và Mô hình bổ sung quân số

Mô hình tự suy giảm quân số - Mô hình Morse Kimball

Trong các mô hình Lanchester và mô hình trộn ở trên thì tốc độ suy giảm quân số của hai bên tham chiến đều do đối phương trực tiếp gây ra. Tuy nhiên, nhiều tổn thất của các bên tham chiến lại do chính bên đó gây ra (ví dụ như do tai nạn, do ốm đau,...). P. Morse và G. Kimball [7, 44] đưa ra giả thuyết rằng tổn thất từ cả chiến đấu và các hoạt động liên quan cùng gây ra tổn thất tổng thể. Trong mô hình này thì tổn thất do các hoạt động liên quan của mỗi bên tỷ lệ với quân số của chính bên đó, trong khi tổn thất do chiến đấu tỷ lệ với quy mô của kẻ thù.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -aY - \beta X, \\ \frac{dY}{dt} = -bX - \alpha Y, \end{cases} \quad (1.11)$$

trong đó $a, b, \alpha, \beta > 0$.

Mô hình bổ sung quân số - Mô hình Coleman

Mô hình này giới thiệu một khía cạnh khác của trận chiến: quân tiếp viện. Ngoài tổn thất liên quan đến chiến đấu và hoạt động, số lượng chiến binh tham gia vào một trận chiến cũng thay đổi khi quân tiếp viện được đưa đến hoặc khi các quân số bị rút đi. Như vậy, mô hình do Coleman [7, 16] trình bày có thêm một thành phần bổ sung cho sự biến thiên về quân số của mỗi lực lượng.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -aX - bY + \beta_X, \\ \frac{dY}{dt} = -cX - dY + \beta_Y, \end{cases} \quad (1.12)$$

trong đó $a, b, c, d > 0$, còn β_X, β_Y có thể âm, có thể dương.

1.1.4 Tác chiến mạng trung tâm - Mô hình trận đánh NCW

Tác chiến mạng trung tâm

Tác chiến mạng trung tâm (NCW: Network Centric Warfare) bắt đầu được định hình từ năm 1996 khi Đô đốc William Owens đưa ra khái niệm "hệ thống của các hệ thống" trong một bài báo khoa học xuất bản bởi Viện Nghiên cứu An ninh Quốc gia Hoa Kỳ [47]. Owens đã mô tả sự tiến hóa ngẫu nhiên của một hệ thống các thiết bị trinh sát, hệ thống chỉ huy và điều khiển, cùng các loại vũ khí chính xác cao cho phép nâng cao nhận thức tình hình chiến trường một cách kịp thời, đánh giá mục tiêu nhanh chóng và phân công khí tài. Tuy nhiên, phát biểu đầy đủ đầu tiên của khái niệm xuất hiện trong sách **Network Centric Warfare: Developing and Leveraging Information Superiority** do David S. Alberts, John Garstka and Frederick Stein viết và xuất bản bởi Command and Control Research Program (CCRP) [6]. Theo đó, Network Centric Warfare (NCW) là một cách tiếp cận để tiến hành chiến tranh có được sức mạnh từ sự liên kết hoặc kết nối hiệu quả của các đối tác tham chiến. Nó được đặc trưng bởi khả năng của các lực lượng phân tán về mặt địa lý để tạo ra mức độ cao về nhận thức không gian chiến đấu chung có thể được khai thác thông qua tự đồng bộ hóa và các hoạt động tập trung vào mạng khác để đạt được ý định của chỉ huy.

Một định nghĩa cụ thể và đầy đủ hơn về NCW được Cebrowski A. K đưa ra năm 2005 [15]: Tác chiến mạng trung tâm là một lý thuyết mới về chiến tranh trong Thời đại thông tin (IA: Information Age). NCW mô tả sự kết hợp của các chiến lược, chiến dịch, chiến thuật và kỹ thuật. Đó là sự kết hợp tất cả các hành vi của con người và tổ chức tham chiến. Nó cung cấp cho khung khái niệm mới để kiểm tra các nhiệm vụ, hoạt động và tổ chức quân sự. Nó tập trung vào sức mạnh chiến đấu có thể được tạo ra từ liên kết các mạng lưới của các thành phần tham chiến trong chiến tranh. Nó được minh họa bằng khả năng tạo ra mức độ nhận thức chung cao có thể được sử dụng thông qua tự đồng bộ hóa và hoạt động tập trung vào mạng để đạt được mục tiêu của chỉ huy. Nó hỗ trợ cho tốc độ của truyền đi của mệnh lệnh, hỗ trợ cho việc xác định vị trí thông tin và chất lượng của thông tin tốt hơn để hành động.

Mô hình trận đánh NCW

Thực tế, trong một trận đánh giữa hai lực lượng, ngoài quân chính quy tham chiến thì lực lượng hỗ trợ cũng rất quan trọng và ảnh hưởng trực tiếp đến diễn biến cũng như kết cục trận đánh. Xét một trận đánh mà một bên là lực lượng X đối đầu với bên là lực lượng Y mà Y có sự hỗ trợ của lực lượng A . Năm 2017, Donghyun Kim và nhóm tác giả đã xây dựng mô hình trận đánh kiểu này và gọi đó là mô hình NCW [36]. Trong mô hình trận đánh cổ điển sử dụng hệ phương trình vi phân mà Lanchester đưa ra, tốc độ giảm quân số của một phe tham chiến được tính bởi quân số phe đối lập nhân với một hệ số tiêu diệt. Trong mô hình NCW, hệ số tiêu diệt của Y được cho bởi một hàm của quân số của lực lượng hỗ trợ A và lực lượng hỗ trợ này cũng có thể bị tiêu diệt bởi X . Chú ý rằng trong các mô hình Lanchester cổ điển, người ta chưa xét tới lực lượng hỗ trợ mà mô hình chỉ gồm các lực lượng tác chiến độc lập.

Ký hiệu:

r_Y : tốc độ tiêu diệt của X đối với Y .

r_A : tốc độ tiêu diệt của X đối với A .

$f_\alpha(A)$: hàm bổ trợ của A cho Y đánh X .

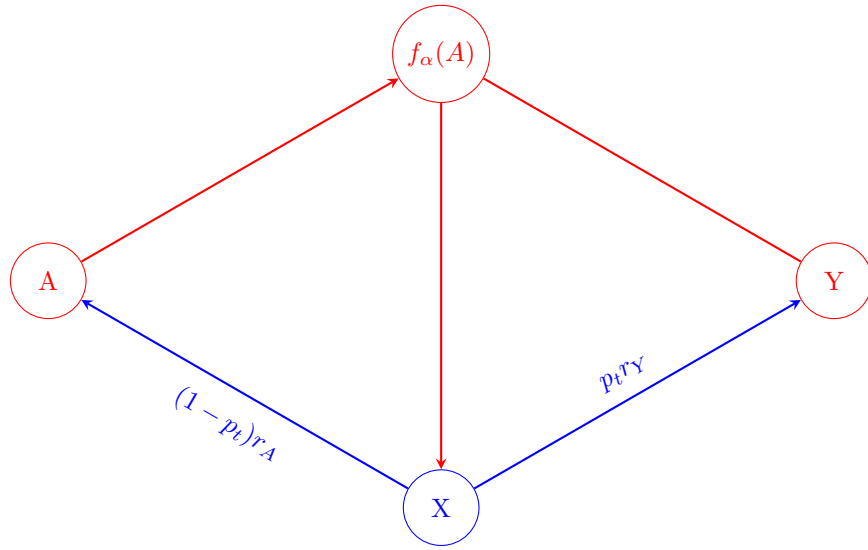
p_t : phân bố hỏa lực của X đối với Y tại thời điểm t .

α_c^A : tốc độ tiêu diệt của Y khi kết nối đầy đủ với A đối với X .

α_d^A : tốc độ tiêu diệt của Y khi không có kết nối với A đối với X .

$(\alpha_d^A \leq \alpha_c^A)$.

Sơ đồ của mô hình được mô tả trong Hình 1.1.



Hình 1.1: Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW.

Ta ký hiệu mô hình này là $(X \text{ vs } (Y, A))$. Mô hình toán dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -f_\alpha(A)Y, \\ \frac{dY}{dt} = -p_t r_Y X, \\ \frac{dA}{dt} = -(1-p_t)r_A X. \end{cases} \quad (1.13)$$

1.2 Một số kiến thức về lý thuyết điều khiển tối ưu

1.2.1 Bài toán điều khiển tối ưu

Xét phương trình vi phân thường (ODE):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), t > 0, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \end{cases} \quad (1.14)$$

ở đây $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ là biến trạng thái của hệ.

Tổng quát, giả sử $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ phụ thuộc vào tham số điều khiển a , $a \in A \subset \mathbb{R}^m$. Khi đó, với $a \in A$ ta có hệ động lực tương ứng:
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), a), t > 0, \\ \mathbf{x}(0) = x^0. \end{cases}$$

Tổng quát hơn, xét hàm $\boldsymbol{\alpha} : [0, \infty) \rightarrow A$ là một biến điều khiển phụ thuộc thời gian, ta xét ODE:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)), t > 0, \\ \mathbf{x}(0) = x^0, \end{cases} \quad (1.15)$$

và nghiên cứu quỹ đạo $\mathbf{x}(\cdot)$ của hệ ứng với mỗi điều khiển $\boldsymbol{\alpha}$.

Ta ký hiệu

$$\mathbf{f}(x, a) = \begin{pmatrix} f^1(x, a) \\ \vdots \\ f^n(x, a) \end{pmatrix}, \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha^1(t) \\ \vdots \\ \alpha^m(t) \end{pmatrix},$$

và $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\alpha} : [0, \infty) \rightarrow A \mid \boldsymbol{\alpha}(\cdot) \text{ đo được}\}$. Mục đích của chúng ta là xác định điều khiển tốt nhất cho hệ, do đó chúng ta định nghĩa phép hàm mục tiêu như sau

$$P[\boldsymbol{\alpha}(\cdot)] := \int_0^T r(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) dt + g(\mathbf{x}(T)), \quad (1.16)$$

ở đây $\mathbf{x}(\cdot)$ là nghiệm của (1.15) đối với điều khiển $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ và $r : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $T > 0$ là thời điểm cuối đã cho. Chúng ta gọi r là *running payoff* và g là *terminal payoff*.

Bài toán đặt ra là tìm điều khiển $\boldsymbol{\alpha}^*(\cdot)$ làm cực đại phép hàm mục tiêu. Khi đó, $\boldsymbol{\alpha}^*(\cdot)$ được gọi là *điều khiển tối ưu*. Ở các phần tiếp theo dưới đây chúng tôi sẽ chỉ ra khi nào tồn tại điều khiển tối ưu, đặc trưng của điều khiển tối ưu là gì và xây dựng điều khiển tối ưu như thế nào?

1.2.2 Nguyên lý cực đại Pontryagin

Việc tìm ra các điều kiện cần cho điều khiển tối ưu đóng vai trò hết sức quan trọng vì nó giúp cho ta định hướng được trong việc tìm điều khiển tối ưu. Năm 1956, nhà toán học người Nga Pontryagin đã đưa ra giả thiết về điều kiện cần

của cực trị, sau đó các học trò của ông đã chứng minh được các giả thiết này (Gamkrelidze 1957 [22] và Boltyanski 1958 [11]).

**Bài toán điểm cuối tự do, thời gian cố định*

Cho trước $A \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Ta ký hiệu tập điều khiển chấp nhận được là

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\alpha}(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow A \mid \boldsymbol{\alpha}(\cdot) \text{ đo được}\}$$

Khi đó, cho trước $\boldsymbol{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{A}$, chúng ta giải phương trình trạng thái

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)), t \geq 0, \\ \mathbf{x}(0) = x^0, \end{cases} \quad (1.17)$$

Chúng ta xét phiếm hàm mục tiêu như sau:

$$P[\boldsymbol{\alpha}(\cdot)] := \int_0^T r(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) dt + g(\mathbf{x}(T)), \quad (1.18)$$

ở đây thời điểm đầu cuối $T > 0$, hàm *running payoff* $r : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$ và hàm *terminal payoff* $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cho trước.

Bài toán đặt ra là: tìm điều khiển tối ưu $\boldsymbol{\alpha}^*(\cdot)$ làm cực đại phiếm hàm mục tiêu.

Để giải bài toán này chúng ta cần định nghĩa phiếm hàm Hamilton phù hợp.

Định nghĩa 1.2.1. [40] *Phiếm hàm Hamilton là hàm xác định bởi*

$$H(x, p, a) := \mathbf{f}(x, a) \cdot p + r(x, a), \quad x, p \in \mathbb{R}^n, a \in A.$$

Ký hiệu các đạo hàm riêng của H là

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = H_{x_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = H_{p_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

và

$$\nabla_x H := (H_{x_1}, \dots, H_{x_n}), \quad \nabla_p H := (H_{p_1}, \dots, H_{p_n}).$$

Nguyên lý cực đại Pontryagin dưới đây sẽ cho chúng ta lời giải bài toán trên.

Định lý 1.2.2. (Nguyên lý cực đại Pontryagin) ([40], Định lý 4.3). Giả sử $\alpha^*(\cdot)$ là điều khiển tối ưu đối với (1.17), (1.18) và $\mathbf{x}^*(\cdot)$ là quỹ đạo tối ưu tương ứng. Khi đó, tồn tại hàm $\mathbf{p}^* : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \nabla_p H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \alpha^*(t)), \quad (1.19)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\nabla_x H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \alpha^*(t)), \quad (1.20)$$

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \alpha^*(t)) = \max_{a \in A} H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), a), 0 \leq t \leq T. \quad (1.21)$$

Hơn nữa, ánh xạ $t \mapsto H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \alpha^*(t))$ là hằng số. Cuối cùng, ta có điều kiện thời điểm đầu cuối là

$$\mathbf{p}^*(T) = \nabla g(\mathbf{x}^*(T)). \quad (1.22)$$

**Bài toán điểm cuối cố định, thời gian tự do*

Tiếp theo chúng ta phát biểu nguyên lý cực đại cho bài toán điểm cuối cố định. Tương tự như phần trên, cho trước điều khiển $\alpha(\cdot) \in \mathcal{A}$, chúng ta giải phương trình trạng thái tương ứng

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \alpha(t)), t \geq 0, \\ \mathbf{x}(0) = x^0, \end{cases} \quad (1.23)$$

Giả sử điểm đích $x^1 \in \mathbb{R}^n$ đã cho, chúng ta xét phiếm hàm mục tiêu như sau

$$P[\alpha(\cdot)] := \int_0^\tau r(\mathbf{x}(t), \alpha(t)) dt, \quad (1.24)$$

ở đây $r : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm *running payoff* đã cho và $\tau = \tau[\alpha(\cdot)] \leq \infty$ ký hiệu là thời điểm đầu tiên nghiệm của (1.23) chạm vào điểm đích x^1 .

Bài toán đặt ra là tìm điều khiển tối ưu $\alpha^*(\cdot)$ làm cực đại phiếm hàm mục tiêu.

Định lý 1.2.3. (Nguyên lý cực đại Pontryagin) ([40], Định lý 4.4). Giả sử $\alpha^*(\cdot)$ là điều khiển tối ưu đối với (1.23), (1.24) và $\mathbf{x}^*(\cdot)$ là quỹ đạo tương ứng. Khi đó, tồn tại hàm $\mathbf{p}^* : [0; \tau^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \nabla_p H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \alpha^*(t)), \quad (1.25)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\nabla_x H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \boldsymbol{\alpha}^*(t)), \quad (1.26)$$

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \boldsymbol{\alpha}^*(t)) = \max_{a \in A} H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), a), 0 \leq t \leq \tau^* \quad (1.27)$$

và

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \boldsymbol{\alpha}^*(t)) \equiv 0, 0 \leq t \leq \tau^*,$$

ở đây τ^* kí hiệu là thời điểm đầu tiên quỹ đạo $\mathbf{x}^*(\cdot)$ chạm vào điểm đích x^1 . Chúng ta gọi $\mathbf{x}^*(\cdot)$ là trạng thái tối ưu và $\mathbf{p}^*(\cdot)$ là đồng trạng thái.

**Nguyên lý cực đại với các điều kiện hoành*

Xét hệ động lực

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)), t > 0. \quad (1.28)$$

Trong phần này chúng ta sẽ thảo luận một bài toán biến thể khác là: vị trí ban đầu được ràng buộc nằm trong tập $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ và vị trí điểm cuối cũng được ràng buộc nằm trong tập $X_1 \subset \mathbb{R}^n$.

Vì vậy, trong mô hình này ta cần chọn điểm bắt đầu $x_0 \in X_0$ để làm cực đại phiếm hàm

$$P[\boldsymbol{\alpha}(\cdot)] := \int_0^\tau r(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) dt, \quad (1.29)$$

ở đây $\tau = \tau[\boldsymbol{\alpha}(\cdot)]$ là thời điểm đầu tiên chúng chạm vào X_1 . Chúng ta sẽ giả thiết X_0, X_1 là các mặt trơn trong \mathbb{R}^n và ký hiệu mặt phẳng tiếp tuyến của X_0 tại x_0 là T_0 , mặt phẳng tiếp tuyến của X_1 tại x_1 là T_1 .

Định lý 1.2.4. (Các điều kiện hoành) ([40], Định lý 4.5). Cho $\boldsymbol{\alpha}^*(\cdot)$ và $\mathbf{x}^*(\cdot)$ là nghiệm của bài toán trên với

$$x^0 = \mathbf{x}^*(0), x^1 = \mathbf{x}^*(\tau^*).$$

Khi đó, tồn tại hàm $\mathbf{p}^*(\cdot) : [0; \tau^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho (1.28), (1.26) và (1.27) đúng với $0 \leq t \leq \tau^*$. Hơn nữa, ta có

$$\begin{cases} \mathbf{p}^*(\tau^*) \text{ trực giao với } T_1, \\ \mathbf{p}^*(0) \text{ trực giao với } T_0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Chúng ta gọi (1.30) là các điều kiện hoành.

**Nguyên lý cực đại với các ràng buộc trạng thái*

Xét hệ động lực

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)), t \geq 0, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \end{cases} \quad (1.31)$$

và xét phiếm hàm mục tiêu như sau

$$P[\boldsymbol{\alpha}(\cdot)] := \int_0^\tau r(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) dt, \quad (1.32)$$

ở đây $\tau = \tau[\boldsymbol{\alpha}(\cdot)]$ là thời điểm đầu tiên để $x(\tau) = x^1$. Đây là bài toán điểm cuối cố định.

Bây giờ ta xét bài toán phức tạp hơn: Ta muốn $\mathbf{x}(\cdot)$ phải luôn luôn nằm trong miền đã cho $R \subset \mathbb{R}^n$ và giả thiết rằng R có biểu diễn hiển

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq 0\},$$

với hàm $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi cho trước.

Đặt $c(x, a) := \nabla g(x) \cdot \mathbf{f}(x, a)$, ta có định lý sau:

Định lý 1.2.5. *(Nguyên lý cực đại cho các ràng buộc trạng thái) ([40], Định lý 4.6). Cho $\boldsymbol{\alpha}^*(\cdot)$ và $\mathbf{x}^*(\cdot)$ là nghiệm của bài toán trên. Giả sử $\mathbf{x}^*(t) \in \partial R$ với các thời điểm $s_0 \leq t \leq s_1$. Khi đó, tồn tại hàm đồng trạng thái $\mathbf{p}^*(\cdot) : [s_0; s_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho (1.31) đúng và tồn tại $\lambda^*(\cdot) : [s_0; s_1] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi $s_0 \leq t \leq s_1$ ta có*

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\nabla_x H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \boldsymbol{\alpha}^*(t)) + \lambda^*(t) \nabla_x c(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\alpha}^*(t)) \quad (1.33)$$

và

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), \boldsymbol{\alpha}^*(t)) = \max_{a \in A} \{H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{p}^*(t), a) | c(\mathbf{x}^*(t), a) = 0\}. \quad (1.34)$$

1.3 Một số kiến thức về tối ưu đa mục tiêu

Một số lượng lớn các bài toán nảy sinh trong nhiều lĩnh vực khác nhau như trong khoa học kỹ thuật, kinh tế, công nghiệp, v...v dẫn đến bài toán tối ưu đa mục tiêu. Trong nhiều trường hợp, các mục tiêu này xác định trên các đơn vị khác nhau và chúng thường có độ xung đột nhất định với nhau (tức là, một

mục tiêu sẽ không thể được cải thiện nếu không giảm ít nhất một trong số các mục tiêu khác). Chúng được gọi là *Bài toán Tối ưu Đa mục tiêu (Multiobjective Optimization Problems (MOP))*. Trong phần này đầu tiên chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức liên quan đến bài toán tối ưu đa mục tiêu, tiếp theo chúng tôi sẽ giới thiệu một phương pháp thường được sử dụng để giải bài toán tối ưu đa mục tiêu, đó là phương pháp vô hướng hóa WM (Weighting Method).

1.3.1 Bài toán tối ưu đa mục tiêu

Định nghĩa 1.3.1. ([43], Mục 2.1.1).

Bài toán tối ưu đa mục tiêu là bài toán có dạng:

$$\min\{f(x) : x \in X\}, \quad (MOP)$$

trong đó X là tập con khác rỗng của \mathbb{R}^n được gọi là tập các phương án của bài toán và

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), \quad f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad k \geq 2.$$

Nếu X là tập lồi đa diện và $f_i(x) = \langle c^i, x \rangle$, $c^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$ thì bài toán (MOP) được gọi là *bài toán tối ưu tuyến tính đa mục tiêu (Multiobjective Optimization Linear Problem: MOP)* và được viết dưới dạng

$$\text{Min } Cx \quad \text{với điều kiện } x \in X, \quad (MOLP)$$

trong đó C là ma trận cấp $p \times n$ có các hàng là c^1, c^2, \dots, c^k .

Nếu X là tập lồi trong \mathbb{R}^n và f_1, f_2, \dots, f_k là các hàm lồi trên X thì bài toán (MOP) được gọi là *bài toán tối ưu lồi đa mục tiêu (Convex Multiobjective Optimization Problem: CMOP)*.

Định nghĩa 1.3.2. ([43], Định nghĩa 2.2.1).

Phương án $x^ \in X$ được gọi là nghiệm hữu hiệu (hay nghiệm Pareto) của bài toán (MOP) nếu không tồn tại phương án $x \in X$ sao cho $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ và $f_j(x) < f_j(x^*)$ với ít nhất một chỉ số j .*

Định nghĩa 1.3.3. ([43], Định nghĩa 2.5.1).

Phương án $x^* \in X$ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu (hay nghiệm Pareto yếu) của bài toán (MOP) nếu không tồn tại phương án $x \in X$ sao cho $f_i(x) < f_i(x^*)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$.

Kí hiệu X_E , X_{WE} tương ứng là tập nghiệm hữu hiệu và hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu (MOP).

1.3.2 Phương pháp vô hướng hóa trọng số WM (Weighting Method) giải bài toán tối ưu đa mục tiêu

Phương pháp WM được giới thiệu bởi Gass, Saaty [23] và Zadeh [58]. Ý tưởng của phương pháp là kết hợp mỗi hàm mục tiêu với một hệ số gọi là trọng số và cực tiểu hóa tổng trọng số của các mục tiêu. Theo đó, các hàm mục tiêu được chuyển thành một hàm mục tiêu duy nhất. Giả sử rằng các trọng số ω_i là các số thực thỏa mãn $\omega_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k; \sum_{i=1}^k \omega_i = 1$. Nói chính xác hơn, bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu được đưa về bài toán sau, được gọi là bài toán trọng số:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^k \omega_i f_i(x) : x \in X \right\}, \quad (1.35)$$

ở đó $\omega_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k; \sum_{i=1}^k \omega_i = 1$.

Sau đây là một số kết quả lý thuyết liên quan đến phương pháp vô hướng hóa trọng số.

Định lý 1.3.4. ([43], Định lý 3.1.1).

Nghiệm của bài toán trọng số (1.35) là nghiệm hữu hiệu yếu.

Định lý 1.3.5. ([43], Định lý 3.1.2).

Nghiệm của bài toán trọng số (1.35) là nghiệm hữu hiệu nếu các hệ số trọng số là dương, nghĩa là $\omega_i > 0, \forall i = 1, \dots, k$.

Định lý 1.3.6. ([43], Định lý 3.1.3).

Nghiệm duy nhất của bài toán trọng số (1.35) là nghiệm hữu hiệu.

Kết luận Chương 1

Chương 1 của luận án trình bày một số mô hình động học trận đánh tiêu biểu, trong đó có một số mô hình chiến tranh bất đối xứng, một trong những xu hướng của chiến tranh hiện đại. Chương 1 cũng đề cập và phân tích mô hình tác chiến mạng trung tâm NCW, là một mô hình mới được nghiên cứu và phát triển trong thời gian gần đây. Hai mô hình này là cơ sở để Chương 2 và Chương 3 đi sâu vào phân tích, đánh giá các khía cạnh liên quan đến mô hình. Ngoài ra, Chương 1 còn trình bày các kiến thức về lý thuyết điều khiển tối ưu và bài toán tối ưu đa mục tiêu. Các kiến thức này bổ trợ về mặt toán học cho chúng tôi trong việc nghiên cứu các bài toán liên quan đến trận đánh đối với mô hình trận đánh bất đối xứng và mô hình tác chiến mạng trung tâm được trình bày ở những chương sau của luận án.

Chương 2

Mô hình trận đánh bất đối xứng

Trong nhiều cuộc xung đột quân sự gần đây (ví dụ, cuộc xung đột vũ trang tại Bắc Ireland từ năm 1960 đến năm 1998 [57]; xung đột vũ trang tại Colombia từ năm 1958 đến nay [50]; các cuộc nổi dậy ở Afghanistan [8] và Iraq [31] gần đây), các lực lượng quân đội chính quy đã phải đối mặt với các nhóm nhỏ lực lượng đối nghịch rải rác trong dân chúng. Thực tế, lực lượng đối nghịch không thể sánh được với quân đội chính quy, quân đội chính quy thường có quy mô lớn hơn lực lượng đối nghịch (tính đến năm 2007 có hơn 500.000 quân thuộc lực lượng Liên minh và An ninh Iraq ở Iraq, trong khi ước tính số quân của lực lượng đối nghịch dao động từ 15.000 đến 70.000 [46]). Ngoài ra, quân đội chính quy thường được trang bị và huấn luyện tốt hơn lực lượng đối nghịch. Ưu điểm chính của lực lượng đối nghịch là khả năng ẩn hiện và khó nắm bắt; quân chính quy có phương tiện và khả năng quân sự để tấn công hiệu quả các mục tiêu của lực lượng đối nghịch, nhưng họ gặp khó khăn trong việc tìm kiếm lực lượng này. Do đó, thông tin tình báo là thành phần quan trọng trong bất kỳ tình huống xung đột nào, đặc biệt nó rất quan trọng trong các hoạt động chống lực lượng đối nghịch. Không có thông tin tình báo, không chỉ lực lượng đối nghịch có thể tiếp tục các hành động chống phá của họ, mà thiệt hại gây ra cho quân đội chính quy hay dân chúng do quân đội chính quy nhầm mục tiêu kém có thể tạo ra phản ứng bất lợi chống lại chính phủ, do đó tạo ra sự ủng hộ rộng rãi cho lực lượng đối nghịch. Sự ủng hộ này biến dân chúng chuyển thành những lực lượng mới tham gia lực lượng đối nghịch (xem [42], và [26]). Nhằm nghiên cứu các tính chất của

các cuộc chiến này, mô hình toán học Lanchester bất đối xứng được Deitchman đưa ra đầu tiên vào năm 1962 [17] mô tả một cuộc chiến tranh du kích. Sau đó, để phản ánh một số vấn đề hạn chế bắt nguồn từ sự bất đối xứng giữa các lực lượng, mô hình Deitchman được phát triển bởi Helmbold [28] năm 1965. Năm 1968, Schreiber [52] đã mở rộng mô hình của Deitchman bằng cách đưa vào yếu tố thông tin tình báo. Trong các công trình nghiên cứu năm 2005 và 2009 của mình [35, 37], Kaplan, Kress và Szechtman đã xây dựng mô hình Lanchester (1,1) bất đối xứng hay còn được gọi là mô hình KKS. Đây là mô hình dưới dạng mô hình kiểu Lanchester có bao gồm thông tin tình báo và lần đầu tiên thuật ngữ hiệu ứng “con dao hai lưỡi” được đưa vào. Các mô hình này đã được chúng tôi trình bày trong Chương 1.

Trong Chương này, chúng tôi sẽ xây dựng mô hình tổng quát Lanchester(n,1) bất đối xứng và nghiên cứu bài toán tối ưu chi phí liên quan đến mô hình. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng tiến hành khảo sát tính ổn định của các trạng thái, trạng thái ổn định trong của các bên tham chiến. Phần cuối của Chương, luận án trình bày một số tính toán số nhằm minh họa cho tính đúng đắn của các nghiên cứu mà chúng tôi đưa ra.

Kết quả nghiên cứu của Chương 2 được được công bố trong 02 công trình dưới đây:

[CT1] Manh D. Hy, Nam H. Nguyen, , Anh N. Ta, Dinh V. Bui and My A. Vu (2017), Optimizing in an Asymmetric Lanchester Model (2,1), *Kỷ yếu Hội nghị quốc tế về ứng dụng toán học lần thứ II - VIAMC 2017*, pp 102-111.

[CT2] Manh D. Hy, My A. Vu, Nam H. Nguyen, Anh N. Ta and Dinh V. Bui (2020), Optimization in an asymmetric Lanchester (n,1) model, *Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology*, 17 (1), pp 117–122, Scopus.

2.1 Mô hình và bài toán tối ưu chi phí

Giả sử có n lực lượng với quân số lớn cùng tham gia chống lại một lực lượng với quân số nhỏ. Tại thời điểm t bất kỳ, n lực lượng này có quân số là $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, ($X_i \geq 0, i = 1, \dots, n$), lực lượng đối nghịch có quân số là $Y(t)$ (nằm trong tổng dân số P , không mất tính tổng quát có thể coi $P = 1, 0 \leq Y \leq 1$). Ngoài ra, chúng tôi ký hiệu:

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: hiệu quả tấn công của lực lượng Y lên X_1, \dots, X_n tương ứng.
- $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$: hiệu quả tấn công của các lực lượng X_1, \dots, X_n đối với Y .
- μ : mức độ thông tin tình báo của n lực lượng X_1, \dots, X_n , có nghĩa là n lực lượng X_1, \dots, X_n có sự chia sẻ thông tin tình báo giúp xác định vị trí chính xác của lực lượng Y , trong khi đó phần $1 - \mu$ là không xác định được vị trí của Y . Ở đây $0 \leq \mu \leq 1$; với $\mu = 0$ có nghĩa là n lực lượng X_1, \dots, X_n không có thông tin gì về lực lượng Y , còn $\mu = 1$ có nghĩa là n lực lượng X_1, \dots, X_n có đầy đủ thông tin về lực lượng Y (thực tế thì điều này không thể xảy ra ([37]) nên ta luôn coi $\mu < 1$).
- $\delta_1, \dots, \delta_n$: hệ số tự tiêu hao của X_1, \dots, X_n (đào ngũ, bệnh tật ...); $0 \leq \delta_1, \dots, \delta_n \leq 1$.
- β_1, \dots, β_n : tốc độ bổ sung quân số của n lực lượng X_1, \dots, X_n .

Khi đó, chúng ta có mô hình trận đánh dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = -\alpha_1 Y - \delta_1 X_1 + \beta_1, \\ \dot{X}_2 = -\alpha_2 Y - \delta_2 X_2 + \beta_2, \\ \dots \\ \dot{X}_n = -\alpha_n Y - \delta_n X_n + \beta_n, \\ \dot{Y} = - \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i \right) (\mu + (1 - \mu) Y) + \theta(C), \end{array} \right. \quad (2.1)$$

trong đó, $\theta(C)$ là "hiệu ứng con dao hai lưỡi" với:

$$C = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i X_i \right) (1 - \mu)(1 - Y). \quad (2.2)$$

Để nghiên cứu và giải quyết bài toán tối ưu chi phí, chúng tôi sử dụng các giả thiết như trong các tài liệu [13, 14, 20, 45], cụ thể là:

- Chi phí thu thập thông tin tình báo là một hàm lồi nào đó của μ thỏa mãn:

$$I(0) = 0, \quad I'(\mu) > 0, \quad I''(\mu) > 0, \quad I(1) = +\infty. \quad (2.3)$$

- Thiệt hại do lực lượng Y gây ra cũng là một hàm lồi $D(Y)$ nào đó của biến Y thỏa mãn:

$$D(0) = 0, \quad D'(Y) > 0, \quad D''(Y) > 0. \quad (2.4)$$

- Chi phí để duy trì quân đội, ký hiệu $A_1(X_1), \dots, A_n(X_n)$, có thể giả thiết là hàm tuyến tính của các biến X_1, \dots, X_n thỏa mãn:

$$A_1(0) = 0, \dots, A_n(0) = 0, \quad (2.5)$$

hoặc là hàm lõm của các biến X_1, \dots, X_n thỏa mãn:

$$\begin{aligned} A_1(0) &= 0, \dots, A_n(0) = 0, \\ A'_1(X_1) &> 0, \dots, A'_n(X_n) > 0, \\ A''_1(X_1) &\leq 0, \dots, A''_n(X_n) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

- Chi phí để bổ sung quân số, ký hiệu $K_1(\beta_1), \dots, K_n(\beta_n)$, giống như trong các bài toán về quy hoạch nguồn nhân lực, chi phí này thường được giả thiết là các hàm bình phương của các biến β_1, \dots, β_n .

Nhiệm vụ của n lực lượng X_1, \dots, X_n là giải quyết bài toán:

$$\min_{\mu, \beta} \int_0^{\infty} e^{-rt} (D(Y) + I(\mu) + A(X) + K(\beta)) dt, \quad (2.7)$$

trong đó

$$A(X) = \sum_{i=1}^n A_i(X_i); \quad K(\beta) = \sum_{i=1}^n K_i(\beta_i).$$

Ở đây, chúng tôi lựa chọn thiệt hại do lực lượng Y gây ra là hàm bình phương $\frac{fY^2}{2}$ (với $f > 0$), chi phí để duy trì quân đội là các hàm tuyến tính: c_1X_1, \dots, c_nX_n , ($c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$), chi phí để thu thập thông tin tình báo là hàm logarit: $-\log(1 - \mu)$ và chi phí để bổ sung quân số là $\frac{\beta_1^2}{2}, \dots, \frac{\beta_n^2}{2}$ tương ứng, và $\theta(C) = \theta C^2$.

Trong các tài liệu [35, 37], với mô hình KKS, các tác giả chỉ ra rằng lực lượng Y không thể bị tiêu diệt hoàn toàn do có hiệu ứng "con dao hai lưỡi". Do đó, cũng như các nghiên cứu trước đó [20, 35, 37], nghiên cứu chính xung quanh mô hình này là tìm trạng thái ổn định trong của hệ (2.1), tức là trạng thái mà tại đó quân số của các lực lượng tham chiến X_i , ($i = 1, \dots, n$) và Y được duy trì. Ngoài ra, các nghiên cứu về quỹ đạo của các biến trạng thái như tính ổn định, trạng thái ổn định biên cũng được quan tâm [20, 45].

Đối với mô hình bất đối xứng tổng quát Lanchester (n,1), chúng tôi cũng đi tìm trạng thái ổn định trong, chi phí tối ưu để duy trì trạng thái này và nghiên cứu tính ổn định của các trạng thái.

2.2 Trạng thái ổn định trong và tính ổn định của các trạng thái

Định lý 2.2.1. Với các giả thiết nêu trên, điều kiện để hệ (2.1) tồn tại trạng thái ổn định trong là $c_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó thông tin tình báo tối ưu được tính bởi $\mu = 1 - \frac{x}{(\gamma X)(1 - Y)}$, trong đó $\gamma X = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i$, $x = (\gamma X)(1 - \mu)(1 - Y)$.

Chứng minh. Sử dụng nguyên lý cực đại Pontryagin, ta có hàm Hamilton:

$$\begin{aligned} H = & \left[-\frac{fY^2}{2} - \sum_{i=1}^n c_i X_i + \log(1 - \mu) - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{2} \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_i (-\alpha_i Y - \delta_i X_i + \beta_i) + \\ & + \lambda_{n+1} \left(-\gamma X (\mu + (1 - \mu) Y) + \theta (\gamma X)^2 (1 - \mu)^2 (1 - Y)^2 \right), \end{aligned}$$

với $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ là các biến liên hợp và $\gamma X = \sum_{i=1}^n \gamma_i X_i$.

Tốc độ bổ sung quân số tối ưu của các lực lượng X_1, X_2, \dots, X_n được xác định từ điều kiện:

$$\frac{\partial H}{\partial \beta_i} = -\beta_i + \lambda_i = 0,$$

suy ra $\beta_i = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Thông tin tình báo tối ưu của các lực lượng X_1, X_2, \dots, X_n được xác định từ điều kiện:

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{-1}{1-\mu} + \lambda_{n+1} \left[-(\gamma X)(1-Y) - 2\theta(\gamma X)^2(1-\mu)(1-Y)^2 \right] = 0.$$

Nếu $\lambda_{n+1} > 0$ thì hàm Hamilton đơn điệu giảm. Khi đó thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0$, điều này là vô lý. Do đó $\lambda_{n+1} < 0$,

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow 2\theta x^2 + x + \frac{1}{\lambda_{n+1}} = 0, \quad (2.8)$$

ở đây $x = (\gamma X)(1-\mu)(1-Y)$. Nghiệm của phương trình này là:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{8\theta}{\lambda_{n+1}}}}{4\theta}.$$

Vì $x \leq 1$ suy ra

$$\lambda_{n+1} = -\frac{1}{x(1+2\theta x)} \leq -\frac{1}{1+2\theta}$$

và thông tin tình báo là

$$\mu = 1 - \frac{x}{(\gamma X)(1-Y)}. \quad (2.9)$$

Các biến liên hợp thỏa mãn các phương trình vi phân:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = r\lambda_i - \frac{\partial H}{\partial X_i}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{\lambda}_{n+1} = r\lambda_{n+1} - \frac{\partial H}{\partial Y}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ta có các phương trình liên hợp:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= (r + \delta_1) \lambda_1 + c_1 - \lambda_{n+1}[-\gamma_1 (\mu + (1 - \mu) Y) + 2\theta\gamma_1 (\gamma X) (1 - \mu)^2 (1 - Y)^2], \\ \dot{\lambda}_2 &= (r + \delta_2) \lambda_2 + c_2 - \lambda_{n+1}[-\gamma_2 (\mu + (1 - \mu) Y) + 2\theta\gamma_2 (\gamma X) (1 - \mu)^2 (1 - Y)^2], \\ &\dots \\ \dot{\lambda}_n &= (r + \delta_n) \lambda_n + c_n - \lambda_{n+1}[-\gamma_n (\mu + (1 - \mu) Y) + 2\theta\gamma_n (\gamma X) (1 - \mu)^2 (1 - Y)^2], \\ \dot{\lambda}_{n+1} &= r\lambda_{n+1} + fY + \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i - \lambda_{n+1}[-(\gamma X) (1 - \mu) - 2\theta(\gamma X)^2 (1 - \mu)^2 (1 - Y)].\end{aligned}$$

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned}-\gamma_i (\mu + (1 - \mu) Y) + 2\theta\gamma_i (\gamma X) (1 - \mu)^2 (1 - Y)^2 &= -\gamma_i \left[1 + \frac{1}{\lambda_{n+1} (\gamma X)} \right], \\ -(\gamma X) (1 - \mu) - 2\theta(\gamma X)^2 (1 - \mu)^2 (1 - Y) &= \frac{1}{\lambda_{n+1} (1 - Y)}, \\ -(\gamma X) (\mu + (1 - \mu) Y) + \theta(\gamma X)^2 (1 - \mu)^2 (1 - Y)^2 &= -(\gamma X) + x(1 + \theta x).\end{aligned}$$

Cuối cùng chúng ta có hệ bao gồm các phương trình trạng thái và phương trình liên hợp:

$$\dot{X}_i = -\alpha_i Y - \delta_i X_i + \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

$$\dot{Y}_i = -(\gamma X) + x(1 + \theta x), \quad (2.12)$$

$$\dot{\lambda}_i = (r + \delta_i) \lambda_i + c_i + \gamma_i \lambda_{n+1} + \frac{\gamma_i}{\gamma X}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

$$\dot{\lambda}_{n+1} = r\lambda_{n+1} + fY + \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i - \frac{1}{1 - Y}. \quad (2.14)$$

Trạng thái ổn định trong của hệ thỏa mãn các phương trình sau (bằng cách cho vế trái của các phương trình (2.11), (2.12), (2.13) bằng 0):

$$\gamma X = x(1 + \theta x), \quad (2.15)$$

$$\lambda_i = -\frac{1}{r + \delta_i} \left(c_i + \frac{\theta\gamma_i}{(1 + \theta x)(1 + 2\theta x)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

$$\alpha_n \delta_i X_i - \alpha_i \delta_n X_n = \alpha_i \lambda_n - \alpha_n \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2.17)$$

Từ đó ta có hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \dots + \gamma_n X_n = x(1 + \theta x), \\ \alpha_n \delta_1 X_1 - \alpha_1 \delta_n X_n = \alpha_1 \lambda_n - \alpha_n \lambda_1, \\ \alpha_n \delta_2 X_2 - \alpha_2 \delta_n X_n = \alpha_2 \lambda_n - \alpha_n \lambda_2, \\ \dots \\ \alpha_n \delta_{n-1} X_{n-1} - \alpha_{n-1} \delta_n X_n = \alpha_{n-1} \lambda_n - \alpha_n \lambda_{n-1}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Định thức của ma trận hệ số của hệ (2.18) là

$$D = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \alpha_n \delta_1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \delta_n \\ 0 & \alpha_n \delta_2 & \dots & 0 & -\alpha_2 \delta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \delta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \delta_n \end{vmatrix}.$$

Khai triển theo hàng thứ nhất của định thức ta được

$$D = \gamma_1 \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \delta_n \\ \alpha_n \delta_2 & \dots & 0 & -\alpha_2 \delta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_n \delta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \delta_n \end{vmatrix} - \gamma_2 \begin{vmatrix} \alpha_n \delta_1 & \dots & 0 & -\alpha_1 \delta_n \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \delta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_n \delta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \delta_n \end{vmatrix} \\ + \dots + (-1)^{n+1} \gamma_n \begin{vmatrix} \alpha_n \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_n \delta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \delta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Trong biểu thức trên, khai triển theo hàng thứ nhất của định thức thứ nhất, khai triển theo hàng thứ hai đối với định thức thứ hai, v...v. Cuối cùng ta có

$$D = (-1)^{n+3} \gamma_1 \alpha_1 \alpha_n^{n-2} \delta_2 \dots \delta_n + (-1)^{n+5} \gamma_2 \alpha_2 \alpha_n^{n-2} \delta_1 \delta_3 \dots \delta_n + \dots + (-1)^{3n-1} \gamma_n \alpha_1 \alpha_n^{n-1} \delta_1 \dots \delta_{n-1} \\ = (-\alpha_n)^{n-2} \left[-\delta_n \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \alpha_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \delta_j - \gamma_n \alpha_n \prod_{j=1}^{n-1} \delta_j \right].$$

Dễ thấy, $D > 0$ nếu n lẻ và $D < 0$ nếu n chẵn, vì vậy hệ có nghiệm duy nhất (X_1, X_2, \dots, X_n) . Từ (2.11) suy ra:

$$Y = \frac{\lambda_i - \delta_i X_i}{\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Vì $Y \in [0, 1]$, $\delta_i, X_i, \alpha_i > 0$, suy ra $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Từ (2.16), để tồn tại trạng thái ổn định trong cần có điều kiện $c_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Thay λ_i, X_i, Y vào phương trình $r\lambda_{n+1} + fY + \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i - \frac{1}{1-Y} = 0$, ta thu được phương trình 1 biến $F(x) = 0$. Giải phương trình biến x này, ta có thể tính toán được trạng thái ổn định trong tương ứng. \square

Tính ổn định của các trạng thái

Với điều kiện rằng trạng thái ổn định trong được tìm thấy, ma trận Jacobian tương ứng là:

$$\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

trong đó,

$$G_1 = \begin{bmatrix} -\delta_1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & -\delta_2 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\delta_n & -\alpha_n \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \dots & -\gamma_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (1 + 2\theta x) \frac{\partial x}{\partial \lambda_{n+1}} \end{bmatrix},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_1^2}{(\gamma X)^2} & -\frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma X)^2} & \cdots & -\frac{\gamma_1 \gamma_n}{(\gamma X)^2} & 0 \\ -\frac{\gamma_2 \gamma_1}{(\gamma X)^2} & -\frac{\gamma_2^2}{(\gamma X)^2} & \cdots & -\frac{\gamma_2 \gamma_n}{(\gamma X)^2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\gamma_n \gamma_1}{(\gamma X)^2} & -\frac{\gamma_n \gamma_1}{(\gamma X)^2} & \cdots & -\frac{\gamma_n^2}{(\gamma X)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{f(1-Y)^2 - 1}{(1-Y)^2} \end{bmatrix},$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} r + \delta_1 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 \\ 0 & r + \delta_2 & \cdots & 0 & \gamma_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r + \delta_n & \gamma_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & r \end{bmatrix},$$

với

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_{n+1}} = -\frac{1}{\lambda_{n+1} \sqrt{\lambda_{n+1}^2 - 8\theta \lambda_{n+1}}}.$$

Bằng cách nghiên cứu các phần thực của các giá trị riêng của ma trận (2.19), ta có thể suy ra tính ổn định của các trạng thái.

2.3 Một vài minh họa số

Để có cái nhìn sâu hơn về mô hình Lanchester (n,1), chúng tôi đưa ra các tính toán số cho các mô hình Lanchester (2,1) và Lanchester (3,1). Trong các mô hình này, với một số bộ tham số đầu vào cho trước, chúng tôi sẽ tính toán để đưa ra các trạng thái ổn định trong và thông tin tình báo tối ưu cho từng trường hợp đồng thời so sánh kết quả đạt được với kết quả của Feichtinger và nhóm tác giả đưa ra trong tài liệu [20].

2.3.1 Mô hình Lanchester (2,1)

Trong tài liệu [20] các tác giả chọn các tham số:

$$r = 2.2; \alpha = 2.23; \delta = 0.34; \gamma = 1.19; \theta = 1.86; c = -2.3734; f = 1.12.$$

Kết quả tính toán số như sau:

- Trạng thái ổn định trong là $X = 1.39523; Y = 0.16034$.
- Tốc độ bổ sung quân số tối ưu là $\lambda = \beta = 0.83193$.
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0.48822$.

Trường hợp 1:

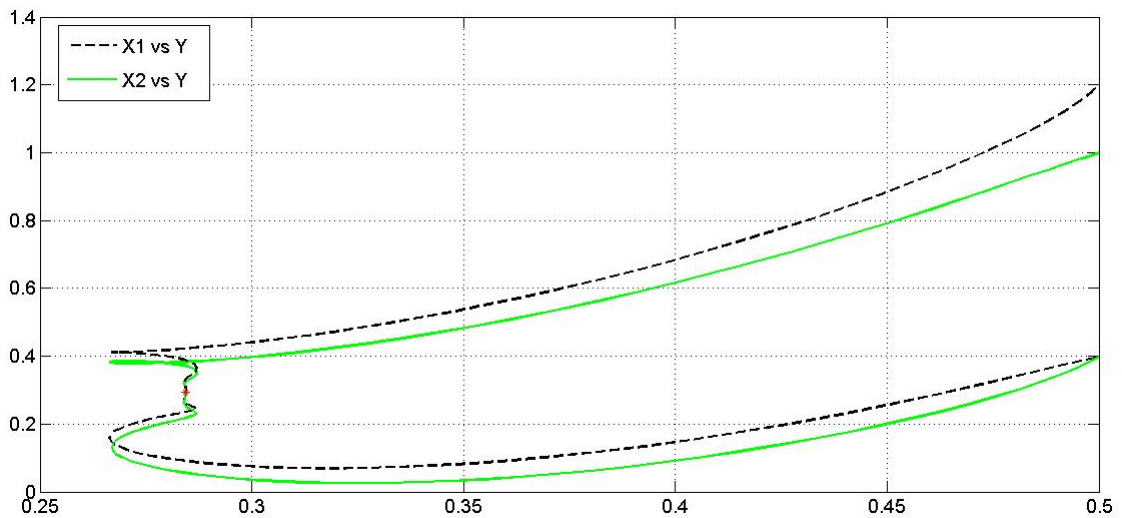
Để so sánh, đầu tiên chúng tôi sử dụng lại các tham số trong tài liệu [20] cho mô hình của chúng tôi.

$$r = 2.2, \alpha_1 = \alpha_2 = 2.23; \delta_1 = \delta_2 = 0.34; \gamma_1 = \gamma_2 = 1.19; \theta = 1.86.$$

Với các tham số này, chúng tôi có kết quả số như sau:

- Trạng thái ổn định trong là $X_1 = X_2 = 0.294785; Y = 0.284383$.
- Tốc độ bổ sung quân số tối ưu là $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7344; \lambda_3 = -0.998427$.
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0.200107$.

Kết quả được chỉ ra dưới Hình 2.1.



Hình 2.1: Mô hình Lanchester(2,1): Kết quả cho trường hợp 1.

Theo kết quả của nhóm tác giả trong tài liệu [20] thì:

- Trạng thái ổn định trong là $X = 1.39523, Y = 0.16034$.
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0.48822$.

So sánh kết quả tính toán của chúng tôi với kết quả của nhóm tác giả trong tài liệu [20] ta thấy để duy trì trạng thái ổn định trong thì kết quả của chúng tôi rõ ràng tối ưu hơn:

- Quân số để duy trì trạng thái ổn định trong đối với bên X giảm, trong khi Y tăng, như vậy chi phí để duy trì quân đội trong mô hình của chúng tôi thấp hơn kết quả trong bài báo [20].
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu theo kết quả của chúng tôi nhỏ hơn so với trong bài báo [20], điều này có nghĩa là chi phí cho việc thu thập thông tin tình báo trong mô hình của chúng tôi là thấp hơn so với kết quả trong bài báo [20].

Trường hợp 2:

Chọn một bộ tham số tùy ý: $r = 2.5; \alpha_1 = 2.0; \alpha_2 = 1.9; \delta_1 = 0.34; \delta_2 = 0.37; \gamma_1 = \gamma_2 = 1.3; c_1 = c_2 = -2.5; f = 1.2; \theta = 1.86$.

Với các tham số này, chúng tôi có kết quả số như sau:

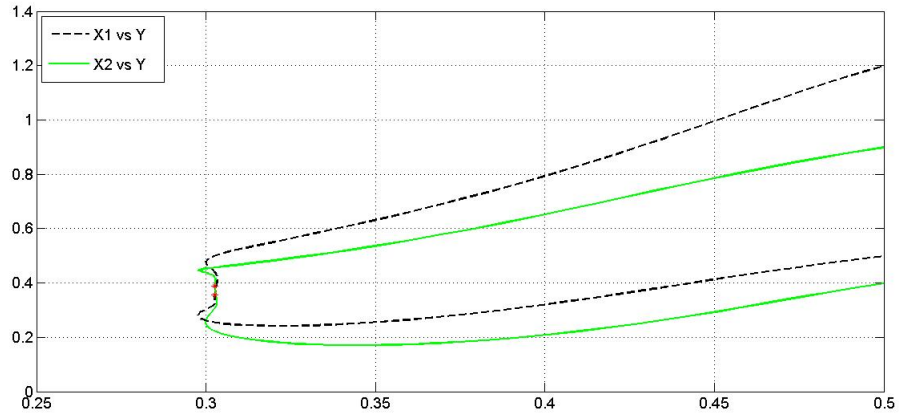
- Trạng thái ổn định trong là $X_1 = 0.355214; X_2 = 0.387704; Y = 0.302679; .$
- Tốc độ bổ sung quân số tối ưu là $\lambda_1 = 0.726132; \lambda_2 = 0.718542; \lambda_3 = -0.698659$.
- Mức độ thông tin tình báo tối ưu là $\mu = 0.257162$.

Kết quả được chỉ ra dưới Hình 2.2.

2.3.2 Mô hình Lanchester (3,1)

Trường hợp 1:

$r = 2.5; \alpha_1 = 2.0, \alpha_2 = 1.9, \alpha_3 = 2.0;$



Hình 2.2: Mô hình Lanchester(2,1): Kết quả cho trường hợp 2.

$$\delta_1 = 0.34; \delta_2 = 0.37, \delta_3 = 0.32;$$

$$\gamma_1 = 1.0, \gamma_2 = 1.3, \gamma_3 = 1.1;$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = -2.5; f = 1.2; \theta = 1.86.$$

Kết quả tính toán như sau:

Trạng thái ổn định trong:

$$X_1 = 0.14635; X_2 = 0.18627; X_3 = 0.19253; Y = 0.33134.$$

Thông tin tình báo tối ưu: $\mu = 0.10393$.

Trường hợp 2: $r = 2.3; \alpha_1 = 2.2, \alpha_2 = 2.1, \alpha_3 = 2.3;$

$$\delta_1 = 0.34; \delta_2 = 0.37, \delta_3 = 0.32; \gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 1.4,$$

$$\gamma_3 = 1.2; c_1 = -2.6, c_2 = -2.4, c_3 = -2.5; f = 1.2; \theta = 1.86.$$

Kết quả tính toán cho Trường hợp 2 như sau:

Trạng thái ổn định trong:

$$X_1 = 0.09208; X_2 = 0.16590; X_3 = 0.10893; Y = 0.29424.$$

Thông tin tình báo tối ưu: $\mu = 0.10729$.

Các trạng thái ổn định trong là các trạng thái mà các lực lượng X_1, X_2, \dots, X_n và lực lượng Y kìm hãm lẫn nhau. Ở những trạng thái này, lực lượng Y không thể mở rộng hoạt động, còn các lực lượng X_1, X_2, \dots, X_n thì giữ nguyên. Sau khi tính toán cho hai trường hợp với hai trạng thái ổn định trong cho mô hình

Lanchester(3,1) này và so sánh với các tính toán cho các trường hợp của mô hình KKS mà Feichtinger và nhóm tác giả đưa ra [20], rõ ràng là tổng của X_i giảm và Y tăng khi n tăng. Thực tế này là một lập luận cho ý tưởng hợp tác của các lực lượng X_1, X_2, \dots, X_n . Tổng của các lực lượng này không cần quá nhiều trong khi lực lượng Y không cần phải bị tiêu diệt hoàn toàn khi mà quy mô của chúng nhỏ. Hơn nữa, μ giảm, có nghĩa là chi phí cho việc thu thập thông tin tình báo có thể được cắt giảm. Những thực tế này cho thấy rằng càng có nhiều bên liên minh tham gia vào cuộc chiến, thì tổng chi phí sẽ càng thấp.

Kết luận Chương 2

Trong chương này, luận án đã đề xuất mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng. Đưa ra bài toán tối ưu hóa chi phí cho mô hình này và sử dụng nguyên lý tối ưu Pontryagin để giải quyết bài toán. Theo đó, tại trạng thái ổn định trong, chi phí cho bài toán được đưa ra là nhỏ nhất. Ngoài ra luận án cũng tiến hành thực hiện một số tính toán số để minh họa cho tính đúng đắn của các nghiên cứu chúng tôi đã đưa ra.

Để kết thúc phần này, chúng tôi sẽ đưa ra một vài bình luận về các bài báo viết về hướng nghiên cứu trên. Đầu tiên là các bài [35], [37], ở đây các tác giả đã xây dựng mô hình Lanchester $(1,1)$ bất đối xứng hay còn gọi là mô hình KKS, trong mô hình này các tác giả đã đưa ra khái niệm "hiệu ứng con dao hai lưỡi" và dựa vào khái niệm này đã chỉ ra trận chiến giữa lực lượng quân chính quy X và một lực lượng nhỏ Y nằm trong dân chúng không bao giờ kết thúc mà có thể chỉ duy trì trạng thái cân bằng. Tiếp theo, trong [20] các tác giả nghiên cứu bài toán tối ưu hóa chi phí cho mô hình KKS, do lực lượng Y không bao giờ bị tiêu diệt hoàn toàn nên các tác giả chỉ đưa ra được chi phí tối ưu cho trạng thái ổn định trong, tức là trạng thái mà lực lượng X và lực lượng Y kìm hãm lẫn nhau, không có sự gia tăng hay giảm đi về quân số của các bên. So sánh các kết quả tính toán số do Feichtinger cùng nhóm tác giả đưa ra với các kết quả tính toán số chúng tôi đã thực hiện có thể nhận thấy rằng nếu có sự tham gia của nhiều lực lượng thì chi phí bỏ ra để duy trì trạng thái cân bằng của các bên giảm đi nhiều so với nếu chỉ có một lực lượng tham gia chống lại Y .

Chương 3

Mô hình trận đánh kiểu NCW

Gần đây, tác chiến mạng trung tâm (NCW: Network Centric Warfare) được đẩy mạnh nghiên cứu, trong đó thông tin đóng vai trò quan trọng hơn trong chiến tranh truyền thống. Thực tế, trong một trận đánh giữa hai hay nhiều lực lượng, ngoài quân chính quy tham chiến thì lực lượng hỗ trợ cũng đóng vai trò rất quan trọng và ảnh hưởng trực tiếp đến diễn biến cũng như kết cục trận đánh. Trong mô hình trận đánh sử dụng hệ phương trình vi phân mà Lanchester đưa ra, tốc độ giảm quân số của một phe tham chiến được tính bởi quân số phe đối lập nhân với một hệ số tiêu diệt. Chú ý rằng trong các mô hình Lanchester phi tuyến cổ điển, người ta chưa xét tới lực lượng hỗ trợ mà mô hình chỉ gồm các lực lượng tác chiến độc lập. Trong chương này, luận án xây dựng ba mô hình trận đánh kiểu NCW mà trong đó lực lượng X chống lại một hay nhiều lực lượng đối lập, các lực lượng đối lập này lại được hỗ trợ bởi một hay nhiều lực lượng hỗ trợ. Các lực lượng hỗ trợ này tuy rằng không trực tiếp tham gia chiến đấu với X nhưng tùy thuộc vào mức độ hỗ trợ cho các lực lượng đối lập mà có ảnh hưởng trực tiếp đến diễn biến cũng như kết cục trận đánh. Ngoài ra, trong các mô hình này, một phân bố hỏa lực được thêm vào cho lực lượng X , dùng để thể hiện chiến thuật của X trong trận đánh. Rõ ràng phân bố hỏa lực này cũng ảnh hưởng tới diễn biến và kết quả trận đánh.

Kết quả nghiên cứu của Chương 3 được công bố trong 03 công trình dưới đây:

[CT3] Nam H. Nguyen, My A. Vu, Anh N. Ta, Manh D. Hy, Tuan A. Do

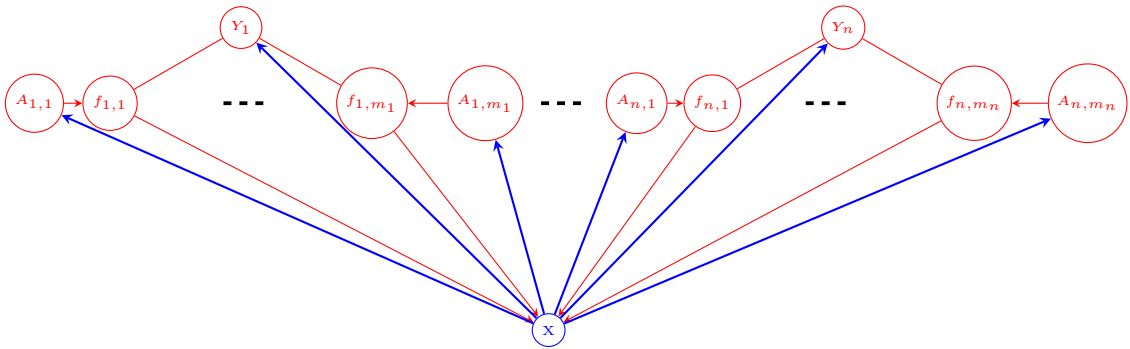
(2021), Optimization in a non-linear Lanchester-type model involving supply units, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **15** (2), pp 315–325, Scopus.

[CT4] Nam H. Nguyen, My A. Vu, Anh N. Ta, Manh D. Hy, Dinh V. Bui (2021), Optimizing fire allocation in a NCW-type model, *Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology*, Scopus, <https://doi.org/10.1177/15485129211022861>.

[CT5] My A. Vu, Nam H. Nguyen, Hanh Le T. Nguyen, Anh N. Ta, Mong H. Nguyen (2021), Optimal fire allocation in a combat model of mixed - NCW type, *Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, Submitted.

3.1 Mô hình trận đánh kiểu NCW tổng quát

Xét một trận đánh mà một bên là lực lượng X chống lại một bên gồm n lực lượng Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, trong đó mỗi lực lượng Y_i được hỗ trợ bởi m_i ($m_i \in \mathbb{N}$) lực lượng $A_{i,m_1}, \dots, A_{i,m_i}$. Sơ đồ của trận đánh được mô tả dưới Hình 3.1.



Hình 3.1: Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW tổng quát.

Ta ký hiệu:

r_{Y_i} , ($i = 1, \dots, n$) : tốc độ tiêu diệt của X đối với Y_i , ($0 \leq r_{Y_i} \leq 1$).

$r_{A_{i,j}}$, ($j = 1, \dots, m_i$) : tốc độ tiêu diệt của X đối với $A_{i,j}$, ($0 \leq r_{A_{i,j}} \leq 1$).

$\alpha_c^{A_{i,j}}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi kết nối đầy đủ với $A_{i,j}$ đối với X .

$\alpha_d^{A_{i,j}}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi không có kết nối với $A_{i,j}$ đối với X .

$$(0 \leq \alpha_d^{A_{i,j}} \leq \alpha_c^{A_{i,j}} \leq 1).$$

$X(0), A_{i,j}(0), Y_i(0)$: quân số ban đầu của $X, A_{i,j}, Y_i$ tương ứng, ($X(0), A_{i,j}(0), Y_i(0) \geq 0$).

$f_{i,j}$: hàm hỗ trợ của $A_{i,j}$ cho Y_i đánh X . Ở đây chúng tôi xét hàm hỗ trợ của $A_{i,j}$ cho Y_i đánh X là một hàm tuyến tính có dạng $f_{i,j} = \alpha_d^{A_{i,j}} + \left(\alpha_c^{A_{i,j}} - \alpha_d^{A_{i,j}} \right) \frac{A_{i,j}}{A_{i,j}(0)}$. Trong trường hợp $A_{i,j}(0) = 0$, tức là lực lượng Y_i không nhận được sự hỗ trợ của lực lượng $A_{i,j}$, hay Y_i khi không có kết nối với $A_{i,j}$, khi đó $f_{i,j} = \alpha_d^{A_{i,j}}$. Trường hợp Y_i kết nối đầy đủ với $A_{i,j}$ thì $f_{i,j} = \alpha_c^{A_{i,j}}$.

Để nghiên cứu mô hình này, đầu tiên chúng tôi giả thiết rằng lực lượng X là đủ lớn sao cho khi kết thúc trận đánh thì $X \geq 0$ và đưa ra một số khái niệm sau.

Định nghĩa 3.1.1. *Một trận đánh ứng với mô hình trên có thể có nhiều giai đoạn, giai đoạn 1 của trận đánh là giai đoạn tính từ thời điểm bắt đầu trận đánh cho đến khi một trong các lực lượng $Y_i, A_{i,j}$ bị tiêu diệt hoàn toàn, giai đoạn 2 của trận đánh là giai đoạn tính từ thời điểm kết thúc giai đoạn 1 cho đến khi một trong các lực lượng còn lại trong số các lực lượng $Y_i, A_{i,j}$ bị tiêu diệt hoàn toàn,...*

Như vậy một trận đánh đối với mô hình trên có thể diễn ra trong nhiều nhất là $n + m_1 + m_2 + \dots + m_n$ giai đoạn, và ít nhất n giai đoạn (chúng tôi sẽ giải thích điều này ở phần sau của chương này).

Định nghĩa 3.1.2. *Một phân bố hỏa lực của lực lượng X đối với các lực lượng $Y_i, A_{i,j}$ tương ứng là một bộ số $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m_1}, \dots, p_{n+m_1+m_2+\dots+m_n})$ sao cho*

$$0 \leq p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+m_1}, \dots, p_{n+m_1+m_2+\dots+m_n} \leq 1$$

và

$$p_1 + \dots + p_n + p_{n+1} + \dots + p_{n+m_1} + \dots + p_{n+m_1+m_2+\dots+m_n} = 1.$$

Ký hiệu $\mathcal{P} = \left\{ (p_1, \dots, p_N) : \sum_{i=1}^N p_i = 1, 0 \leq p_i \leq 1 \right\}$, với $N = n + m_1 + \dots + m_n$, là tập tất cả các phân bố hỏa lực của X .

Đối với mô hình này chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán phân bố hỏa lực tối ưu, tức là bài toán tìm phân bố hỏa lực của X trong một giai đoạn của trận đánh sao cho tại mọi thời điểm của giai đoạn đó lực lượng X còn lại là lớn nhất.

Trong các phần dưới đây, chúng tôi sẽ xây dựng và khảo sát ba mô hình cụ thể cho mô hình NCW trên.

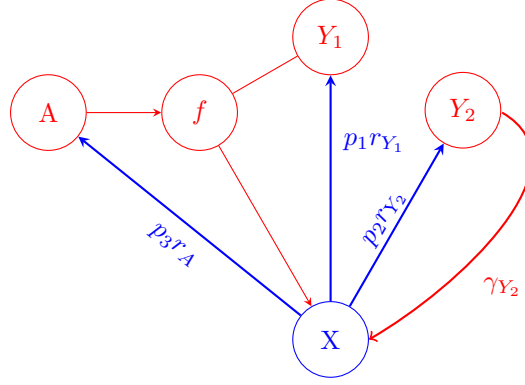
3.2 Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ nhất

Trong mục này, chúng tôi xây dựng mô hình trận đánh giữa hai bên tham chiến X đối đầu với Y_1 và Y_2 , trong đó Y_2 là một lực lượng tác chiến độc lập (tức là Y_2 không có lực lượng hỗ trợ, Y_1 có sự hỗ trợ của lực lượng A mà lực lượng này tuy rằng không trực tiếp đánh X tuy nhiên tùy vào mức độ hỗ trợ cho Y_1 mà có ảnh hưởng trực tiếp đến diễn biến cũng như kết cục trận đánh. Mô hình này là một trường hợp riêng của mô hình tổng quát ở trên và là một mô hình mở rộng hơn so với mô hình mà Donghyun Kim và nhóm tác giả đề xuất trong tài liệu [36]. Chúng tôi giả sử mức độ hỗ trợ của lực lượng A là một hàm tuyến tính, và gọi mô hình trận đánh là mô hình trận đánh kiểu NCW - trộn. Sau đó chúng tôi nghiên cứu và đưa ra phân bố hỏa lực của X sao cho quân số còn lại của X tại thời điểm bất kỳ trong giai đoạn đầu tiên của trận đánh là lớn nhất. Ngoài ra, chúng tôi cũng tiến hành một số kết quả tính toán cho thấy các kết quả nghiên cứu trong trường hợp phân bố hỏa lực tối ưu là hiệu quả hơn so với các trường hợp khác.

3.2.1 Mô hình

Xét một trận đánh mà một bên là lực lượng X , đối đầu với bên còn lại gồm hai lực lượng Y_1 và Y_2 , trong đó Y_2 tác chiến độc lập còn Y_1 có sự hỗ trợ của lực lượng A . Ký hiệu mô hình này là $(X \text{ vs } (Y_1, A), Y_2)$. Sơ đồ trận đánh của mô hình được mô tả trong Hình 3.2.

Trong đó:



Hình 3.2: Sơ đồ trận đánh của mô hình NCW - trộn.

+ Tốc độ tiêu diệt của Y_1 đối với X phụ thuộc vào hàm hỗ trợ của A cho Y_1 đánh X , hàm này có dạng $f = \alpha_d^A + (\alpha_c^A - \alpha_d^A) \frac{A}{A(0)}$.

+ Y_2 là đơn vị tác chiến độc lập không có lực lượng hỗ trợ, chúng tôi ký hiệu tốc độ tiêu diệt của Y_2 đối với X là γ_{Y_2} .

+ (p_1, p_2, p_3) là một phân bố hỏa lực của X đối với Y_1, Y_2, A tương ứng.

Ta có mô hình dưới dạng hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -[\alpha_d^A + (\alpha_c^A - \alpha_d^A) \frac{A}{A(0)}]Y_1 - \gamma_{Y_2}Y_2, \\ \frac{dY_1}{dt} = -p_1r_{Y_1}X, \\ \frac{dY_2}{dt} = -p_2r_{Y_2}X, \\ \frac{dA}{dt} = -p_3r_A X. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2.2 Phân bố hỏa lực tối ưu

Sau đây, chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán tìm phân bố hỏa lực tối ưu đối với mô hình NCW - trộn ở trên, tức là tìm phân bố hỏa lực của lực lượng X sao cho tại thời điểm t bất kỳ trong giai đoạn 1 của trận đánh thì quân số của X còn lại là lớn nhất (giai đoạn 1 của trận đánh được tính từ thời điểm bắt đầu trận đánh cho đến khi một trong ba lực lượng A, Y_1, Y_2 bị tiêu diệt hoàn toàn).

Đặt $\mathcal{P} = \{(p_1, p_2, p_3) : p_1, p_2, p_3 \in [0; 1], p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$ là tập các phân bố hỏa lực của X trong giai đoạn 1.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra khái niệm “hệ số đe dọa”, là các hệ số b_1, b_2, b_3

được tính theo các công thức sau:

$$b_1 = \alpha_c^A r_{Y_1}, \quad b_2 = \gamma_{Y_2} r_{Y_2}, \quad b_3 = \frac{r_A (\alpha_c^A - \alpha_d^A) Y_1(0)}{A(0)}.$$

Các hệ số này có thể hiểu là các hệ số thể hiện "mức độ nguy hiểm" mà các lực lượng Y_1, Y_2, A tương ứng có thể gây ra đối với lực lượng X . Phân bố hỏa lực tối ưu của X được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 3.2.1. Với p_1, p_2, p_3 không đổi tại mọi thời điểm t tùy ý trong giai đoạn 1 của trận đánh, trong đó $p_1, p_2, p_3 \in [0, 1] : (p_1 + p_2 + p_3 = 1)$, khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X trong giai đoạn 1 là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{khi } b_1 = \max\{b_1, b_2, b_3\}, \\ (0, 1, 0) & \text{khi } b_2 = \max\{b_1, b_2, b_3\}, \\ (0, 0, 1) & \text{khi } b_3 = \max\{b_1, b_2, b_3\}. \end{cases}$$

Chứng minh. Đặt $S(t) = \int_0^t X(s) ds \Rightarrow S'(t) = X(t)$

$$\Rightarrow S''(t) = X'(t) = - \left[\alpha_d^A + (\alpha_c^A - \alpha_d^A) \frac{A}{A(0)} \right] Y_1 - \gamma_{Y_2} Y_2. \quad (3.2)$$

Có

$$\begin{aligned} \int_0^t dY_1 &= - \int_0^t p_1 r_{Y_1} X(s) ds \Rightarrow Y_1(t) - Y_1(0) = -p_1 r_{Y_1} S(t) \\ \Rightarrow Y_1 &= -p_1 r_{Y_1} S(t) + Y_1(0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tương tự:

$$Y_2 = -p_2 r_{Y_2} S(t) + Y_2(0), \quad (3.4)$$

$$A = -p_3 r_A S(t) + A(0). \quad (3.5)$$

Thay Y_1, Y_2, A trong (3.3), (3.4), (3.5) vào (3.2) ta được:

$$S''(t) = -C_1 S^2(t) + C_2 S(t) - C_3, \quad (3.6)$$

trong đó

$$C_1 = \frac{p_1 p_3 r_{Y_1} r_A (\alpha_c^A - \alpha_d^A)}{A(0)},$$

$$C_2 = \frac{p_3 r_A (\alpha_c^A - \alpha_d^A) Y_1(0) + p_1 r_{Y_1} \alpha_c^A A(0)}{A(0)} + \gamma_{Y_2} p_2 r_{Y_2},$$

$$C_3 = \alpha_c^A Y_1(0) + \gamma_{Y_2} Y_2(0).$$

Nhân hai vế của (3.6) với $dS(t)$ rồi lấy tích phân 2 vế ta được:

$$S'(t) = X(t)$$

$$= \sqrt{-\frac{2}{3}C_1 S^3(t) + C_2 S^2(t) - 2C_3 S(t) + C_4},$$

ở đây, C_1, C_2, C_3 là các giá trị không âm, C_4 là một hằng số tích phân. Do C_3 không đổi nên để tìm điều kiện sao cho $X(t)$ lớn nhất ta sẽ tìm điều kiện để C_1 nhỏ nhất đồng thời C_2 lớn nhất (nếu xảy ra).

Như vậy ta có bài toán:

$$\min_{\mathcal{P}} \{C_1, -C_2\}.$$

Đặt:

$$a = \frac{r_{Y_1} r_A (\alpha_c^A - \alpha_d^A)}{A(0)},$$

bài toán trở thành:

$$\min_{\mathcal{P}} \{axy, -(b_1x + b_2y + b_3z)\},$$

với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq x, y, z \leq 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Sử dụng phương pháp vô hướng hóa WM (xem [43]) và đặt:

$$F_\lambda(x, y, z) = \lambda(axy) - (1 - \lambda)(b_1x + b_2y + b_3z),$$

ta đưa về bài toán:

$$\min F_\lambda(x, y, z),$$

với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq x, y, z \leq 1, \\ x + y + z = 1, \\ 0 \leq \lambda \leq 1. \end{cases}$

hay:

$$\min\{\lambda(1-y-z)ay - (1-\lambda)(b_1 + (b_2 - b_1)y + (b_3 - b_1)z)\},$$

với điều kiện
$$\begin{cases} 0 \leq x, y, z \leq 1, \\ x + y + z = 1, \\ 0 \leq \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $b_2 \geq b_3 \geq b_1$.

Do $\lambda(1-y-z)ay \geq 0$

Suy ra

$$\begin{aligned} \min F_\lambda &\geq -(1-\lambda)(b_1 + (b_2 - b_1)y + (b_3 - b_1)z) \\ &\geq -(1-\lambda)(b_1 + (b_2 - b_1)(y+z)) \\ &\geq -(1-\lambda)b_2 = F_\lambda(0, 1, 0). \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $b_2 \geq b_1 \geq b_3$.

Bài toán trở thành:

$$\min\{\lambda(1-y-z)ay + (1-\lambda)(b_1 - b_3)z - (1-\lambda)(b_1 + (b_2 - b_1)y)\}.$$

Từ đó, $\min F_\lambda \geq -(1-\lambda)b_2 = F_\lambda(0, 1, 0)$.

Trường hợp 3: $b_3 \geq b_2 \geq b_1$.

Ta có

$$\begin{aligned} \min F_\lambda &\geq -(1-\lambda)(b_1 + (b_3 - b_1)(y+z)) \\ &\geq -(1-\lambda)b_3 = F_\lambda(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Trường hợp 4: $b_3 \geq b_1 \geq b_2$.

Bài toán trở thành:

$$\min\{\lambda(1-y-z)ay + (1-\lambda)(b_1 - b_2)y - (1-\lambda)(b_1 + (b_3 - b_1)z)\}.$$

Suy ra $\min F_\lambda \geq -(1-\lambda)b_3 = F_\lambda(0, 0, 1)$.

Trường hợp 5: $\begin{cases} b_2 \leq b_1, \\ b_3 \leq b_1. \end{cases}$

Bài toán trở thành:

$$\min\{\lambda(1-y-z)ay + (1-\lambda)((b_1-b_2)y + (b_1-b_3)z) - (1-\lambda)b_1\}.$$

Suy ra $\min F_\lambda \geq -(1-\lambda)b = F_\lambda(1, 0, 0)$. \square

Hệ quả 3.2.2. Nếu $Y_2 = 0$, ta có mô hình trận đánh (X vs (Y_1, A)), mô hình này mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -[\alpha_d^A + (\alpha_c^A - \alpha_d^A) \frac{A}{A(0)}]Y_1, \\ \frac{dY_1}{dt} = -pr_{Y_1}X, \\ \frac{dA}{dt} = -(1-p)r_AX. \end{cases} \quad (3.7)$$

Phân bố hỏa lực tối ưu của X đối với mô hình (3.7) là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0) \text{ khi } \frac{r_A(\alpha_c^A - \alpha_d^A)Y_1(0)}{A(0)} \leq r_{Y_1}\alpha_c^A, \\ (0, 1) \text{ khi } \frac{r_A(\alpha_c^A - \alpha_d^A)Y_1(0)}{A(0)} \geq r_{Y_1}\alpha_c^A. \end{cases}$$

Đây là kết quả của Donghyun Kim và nhóm tác giả [36].

Hệ quả 3.2.3. Nếu $A = 0$, ta có mô hình trận đánh (X vs (Y_1, Y_2)), mô hình này mô tả dưới dạng hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\alpha_d^A Y_1 - \gamma_{Y_2} Y_2, \\ \frac{dY_1}{dt} = -pr_{Y_1} X, \\ \frac{dY_2}{dt} = -(1-p)r_{Y_2} X. \end{cases} \quad (3.8)$$

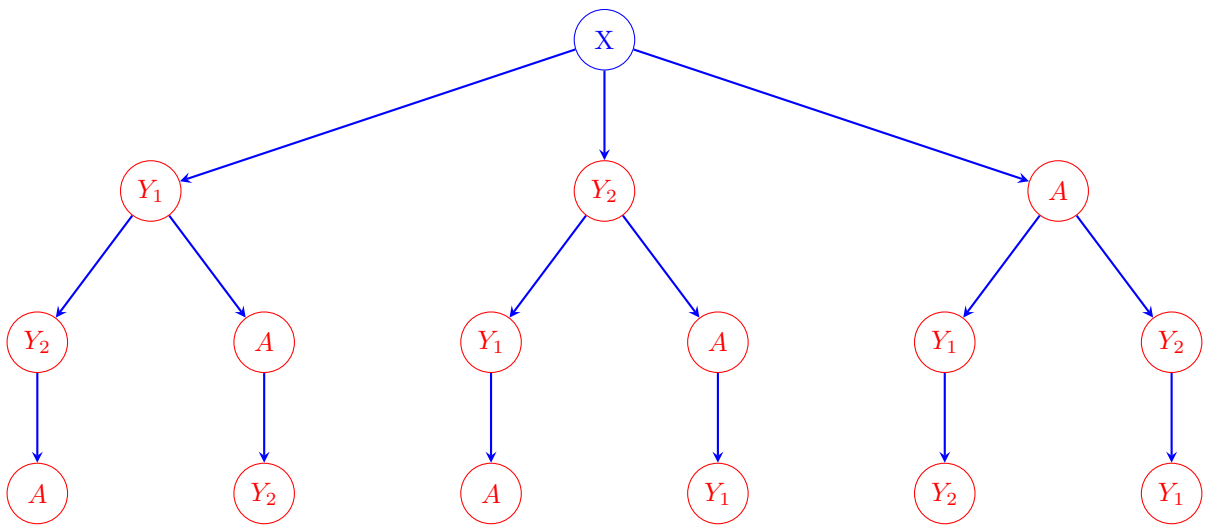
Phân bố hỏa lực tối ưu của X đối với mô hình (3.8) là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0) \text{ khi } \alpha_d^A r_{Y_1} \geq \gamma_{Y_2} r_{Y_2}, \\ (0, 1) \text{ khi } \alpha_d^A r_{Y_1} \leq \gamma_{Y_2} r_{Y_2}. \end{cases}$$

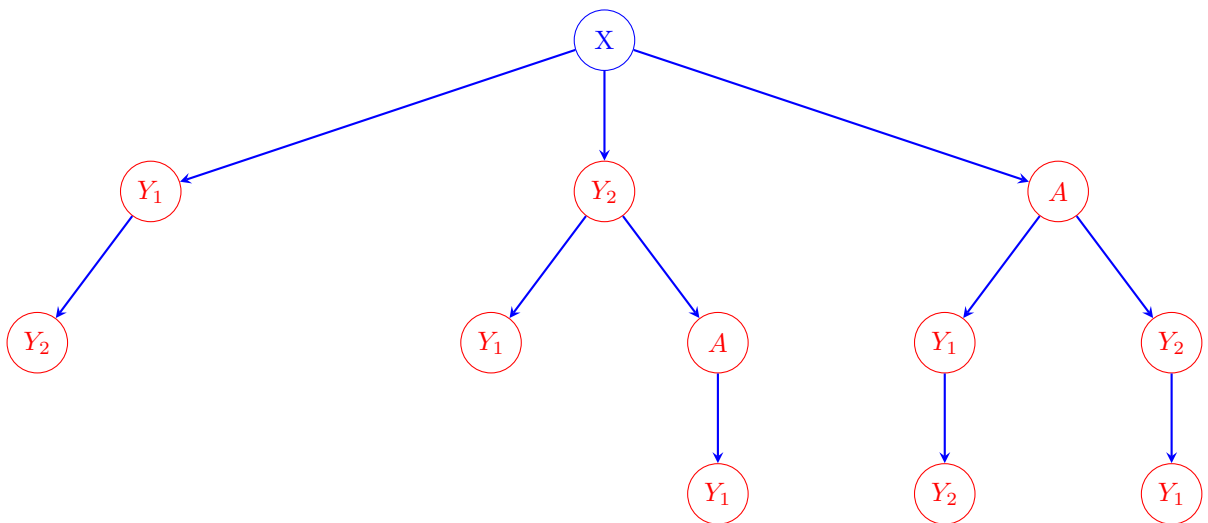
Đây là kết quả của Lin và Mackay được trình bày trong tài liệu [41].

Về cơ bản, trận đánh có thể chia thành 3 giai đoạn. Giai đoạn 1, X tập trung toàn bộ hỏa lực đánh một trong ba lực lượng Y_1, A, Y_2 . Khi một trong ba lực

lượng bị tiêu diệt hoàn toàn X tập trung hỏa lực đánh vào một trong hai lực lượng còn lại. Đến khi lực lượng thứ hai bị tiêu diệt thì tập trung đánh lực lượng cuối cùng. Các trường hợp của trận đánh theo 3 giai đoạn có thể mô tả dưới dạng một cây như Hình 3.3. Tuy nhiên, trên thực tế, nếu Y_1 bị tiêu diệt hoàn toàn trước A thì X không cần đánh A nữa, và nếu ngay khi kết thúc giai đoạn 2 của trận đánh mà lực lượng Y_1 và Y_2 bị tiêu diệt hoàn toàn thì lực lượng X không giảm nữa, nên ta có thể coi trận đánh kết thúc tại đây. Các trường hợp trên thực tế có thể xảy ra của trận đánh được mô tả trong Hình 3.4.



Hình 3.3: Diễn tiến trận đánh của mô hình NCW - trộn trên lý thuyết.



Hình 3.4: Diễn tiến trận đánh của mô hình NCW - trộn trên thực tế.

Với kết quả của chúng tôi thì phân bố hỏa lực tối ưu được áp dụng trong giai đoạn đầu tiên của trận đánh. Từ giai đoạn thứ hai của trận đánh trở đi ta có thể áp dụng kết quả của Donghyun Kim và nhóm tác giả [36] hoặc kết quả của Lin và Mackay [41]. Trong trường hợp 1, về mặt chiến thuật, để $B(t)$ lớn nhất thì trong giai đoạn 1 ta tập trung toàn bộ hỏa lực đánh A . Sau khi A bị tiêu diệt hoàn toàn thì khi đó ta chuyển sang đánh Y_1 hoặc Y_2 theo Lin và Mackay. Trường hợp 2 chiến thuật được phân tích tương tự như trường hợp 1.

Trong trường hợp 3, trong giai đoạn 1 ta sẽ tập trung toàn bộ hỏa lực đánh Y_2 . Sau khi Y_2 bị tiêu diệt hoàn toàn thì khi đó ta chuyển sang đánh Y_1 hoặc A theo dựa vào kết quả nghiên cứu của Donghyun Kim và nhóm tác giả. Trường hợp 4 chiến thuật được phân tích tương tự như trường hợp 3. Trong trường hợp 5, để $X(t)$ lớn nhất thì trong giai đoạn 1 ta tập trung toàn bộ hỏa lực đánh Y_1 . Đến khi Y_1 bị tiêu diệt hoàn toàn thì tập trung đánh Y_2 , và khi Y_2 bị tiêu diệt hoàn toàn thì quân số của X không giảm nữa và chính là quân số lớn nhất còn lại.

3.2.3 Một vài minh họa số

Để minh họa, chúng tôi sẽ giới thiệu một vài kết quả tính toán số cho ba trường hợp của Định lý 3.2.1, cụ thể là các trường hợp: lực lượng hỗ trợ A bị đánh trong giai đoạn 1, Y_1 bị đánh trước trong giai đoạn 1 và Y_2 bị đánh trước trong giai đoạn 1. Trong mỗi trường hợp, chúng tôi sẽ phân tích kết quả và diễn tiến của trận đánh trong trường hợp phân bố hỏa lực tối ưu, đồng thời đưa ra một số phân bố hỏa lực khác để so sánh. Để củng cố khẳng định của mình, đối với mỗi trường hợp, chúng tôi cũng tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và khảo sát diễn biến của các trận đánh cho đến khi giai đoạn đầu tiên của trận đánh kết thúc.

Trường hợp 1: A bị đánh trước

Ta xét các tham số đầu vào cho dưới dạng bảng sau đây:

α_c^A	α_d^A	γ_{Y_2}	r_{Y_1}	r_A	r_{Y_2}
0.4	0.15	0.2	0.5	0.3	0.2

Bảng 3.1: Các tham số cho Trường hợp 1.

cùng với các điều kiện đầu: $X(0) = 170$; $Y_1(0) = 120$; $A(0) = 20$; $Y_2(0) = 50$, thì các “hệ số đe dọa” tính được là: $b_1 = 0,2$; $b_2 = 0,04$; $b_3 = 0,45$. Do $b_3 > b_1 > b_2$ nên phân bố hỏa lực tối ưu trong từng giai đoạn của trận đánh được cho lần lượt là

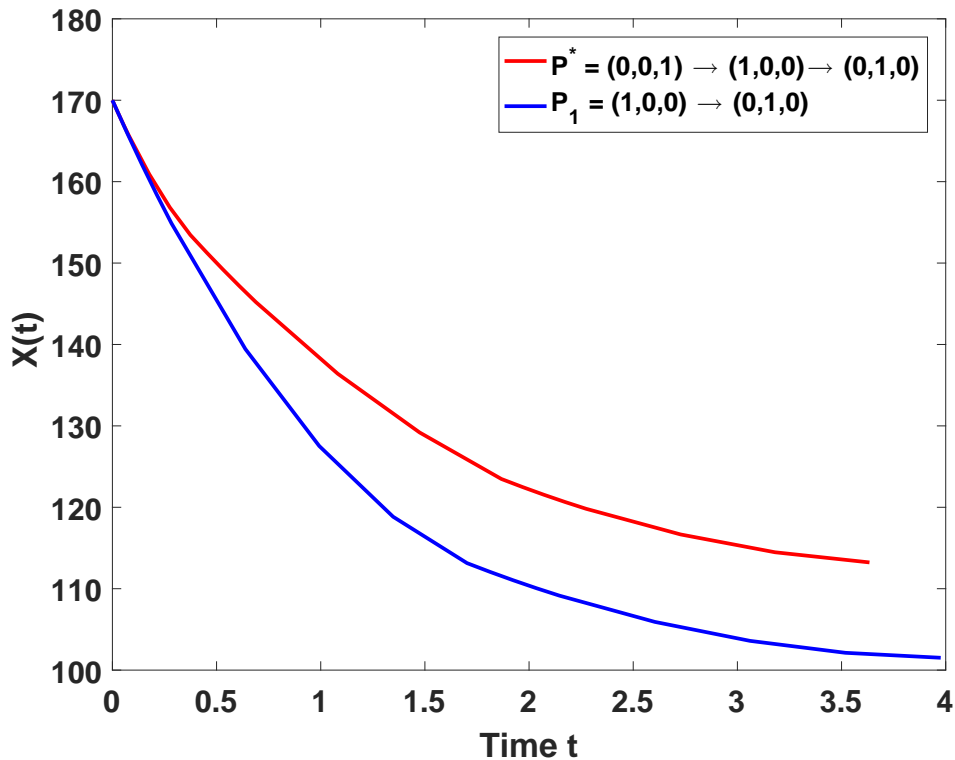
$$P^* = (0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0).$$

Nói một cách khác, chiến thuật tối ưu của X là tập trung hỏa lực đánh A , sau khi A bị tiêu diệt hoàn toàn thì tập trung hỏa lực đánh Y_1 vì $b_1 > b_2$ và sau khi Y_1 bị tiêu diệt thì tập trung đánh Y_2 để kết thúc cuộc chiến. Để so sánh chúng tôi sử dụng một phương án chiến thuật là $P_1 = (1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$. Tức là X tập trung hỏa lực đánh Y_1 trước sau đó thì đánh Y_2 . Kết quả tính toán cho thấy dù X vẫn chiến thắng nhưng rõ ràng quân số của X tại mọi thời điểm đều thấp hơn so với khi sử dụng chiến thuật tối ưu. Quân số của X trong các trường hợp mô phỏng có thể xem trên Hình 3.5.

Để minh họa rõ hơn cho khẳng định của Định lý 3.2.1, tiếp theo, chúng tôi tiến hành thử nghiệm bằng cách tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và nghiên cứu ảnh hưởng của chúng đến kết quả của trận đánh. Theo tính toán, số quân còn lại của X khi kết thúc giai đoạn một được trình bày trong bảng sau:

X	≤ 0	$(0, 20]$	$(20, 50]$	$(50, 80]$	$(80, 170]$
Số trường hợp	306	225	80	127	262

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 132 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P^{max} = (0.0126, 0.9478, 0.0396)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_1 \approx 0.3949$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $P^* = (0; 0; 1)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_1^{tu} \approx 2.3014$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 95. Tuy nhiên, tại thời điểm $t_1 \approx 0.3949$, số quân còn lại của X nếu sử dụng phân bố hỏa lực tối ưu là xấp xỉ



Hình 3.5: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 1: A bị đánh trước.

136. Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_1 được mô tả trong Hình 3.6.

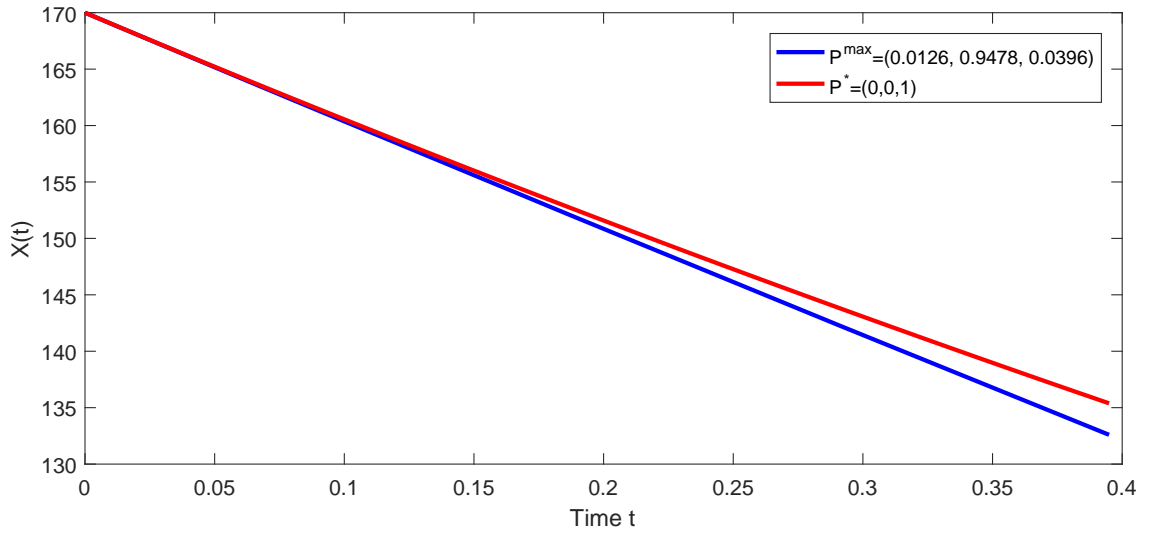
Trường hợp 2: Y_1 bị đánh trước

Giả sử ta có trận đánh tương ứng với mô hình NCW - trộn mà quân số ban đầu các bên là: $X(0) = 170; Y_1(0) = 120, A(0) = 50; Y_2(0) = 50$, cùng với các tham số đầu vào như sau:

α_c^A	α_d^A	γ_{Y_2}	r_{Y_1}	r_A	r_{Y_2}
0.4	0.15	0.2	0.5	0.2	0.2

Bảng 3.2: Các tham số cho Trường hợp 2.

Khi đó các “hệ số đe dọa” tính được là: $b_1 = 0,2; b_2 = 0,04; b_3 = 0,12$. Do $b_1 > b_3 > b_2$ nên phân bố hỏa lực tối ưu của lực lượng X trong trận đánh

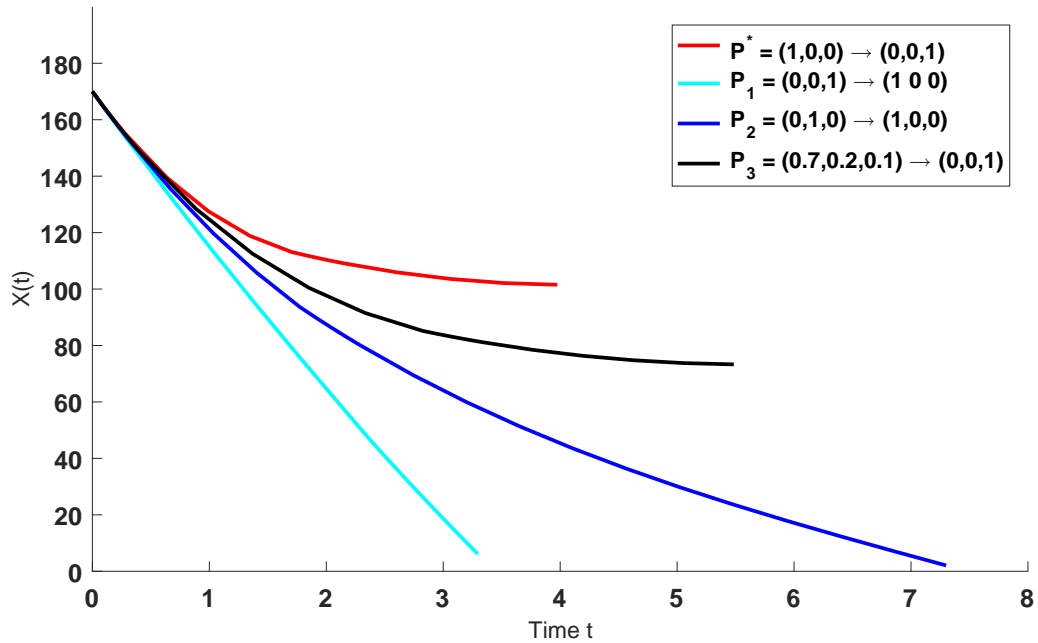


Hình 3.6: Trường hợp 1: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_1]$.

là $P^* = (1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$, (sau khi kết thúc giai đoạn 1, Y_1 bị tiêu diệt hoàn toàn, lực lượng X chuyển sang đánh Y_2 luôn vì A không làm lực lượng X suy giảm quân số). Với 3 phương án chúng tôi chọn để so sánh thì chỉ có phương án $P_3 = (0.7, 0.1, 0.2) \rightarrow (0, 0, 1)$ cho kết quả X chiến thắng, dù vậy quân số của X vẫn thấp hơn trong trường hợp phân bố là tối ưu. Với hai phương án còn lại thì X thậm chí còn thua trận. Như vậy có thể thấy là phương án P_3 khác biệt một chút so với phương án tối ưu trong giai đoạn đầu và giống phương án tối ưu trong giai đoạn sau đã làm quân Xanh chiến thắng. Trong khi hai phương án còn lại không có sự tương đồng với phương án tối ưu và dẫn tới kết cục thất bại. Diễn biến và kết cục của trận đánh tương ứng với phương án tối ưu và các phương án thử nghiệm có thể xem trên Hình 3.7.

Tiếp theo, chúng tôi tiến hành thử nghiệm bằng cách tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và nghiên cứu ảnh hưởng của chúng đến kết quả của trận đánh. Theo tính toán, số quân còn lại của X khi kết thúc giai đoạn một được trình bày trong bảng sau:

X	≤ 0	$(0, 20]$	$(20, 50]$	$(50, 80]$	$(80, 170]$
Số trường hợp	622	132	109	105	32

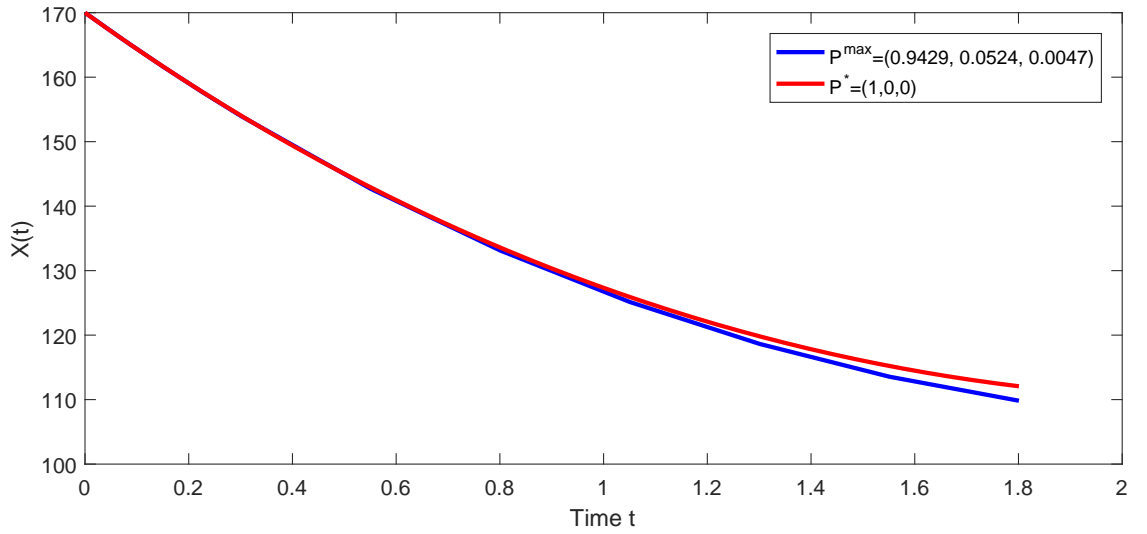


Hình 3.7: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 2: Y_1 bị đánh trước.

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 110 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P^{max} = (0.9429, 0.0524, 0.0047)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_2 \approx 1.8009$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $P^* = (1; 0; 0)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_2^{tu} \approx 2.8255$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 85. Tuy nhiên, tại thời điểm $t_2 \approx 1.8009$, số quân còn lại của X nếu sử dụng phân bố hỏa lực tối ưu là khoảng 118. Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_2 được mô tả trong Hình 3.8.

Trường hợp 3: Y_2 bị đánh trước

Ta xét mô hình với các tham số đầu vào như sau:
 cùng với các điều kiện đầu $X(0) = 170; Y_1(0) = 120; A(0) = 60; Y_2(0) = 50$, khi đó các hệ số đe dọa tính được là $b_1 = 0,2; b_2 = 0,3; b_3 = 0,08$. Từ đây ta có phương án phân bố hỏa lực tối ưu là $P^* = (0,1,0) \rightarrow (1,0,0)$. Với hai phân bố



Hình 3.8: Trường hợp 2: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_2]$.

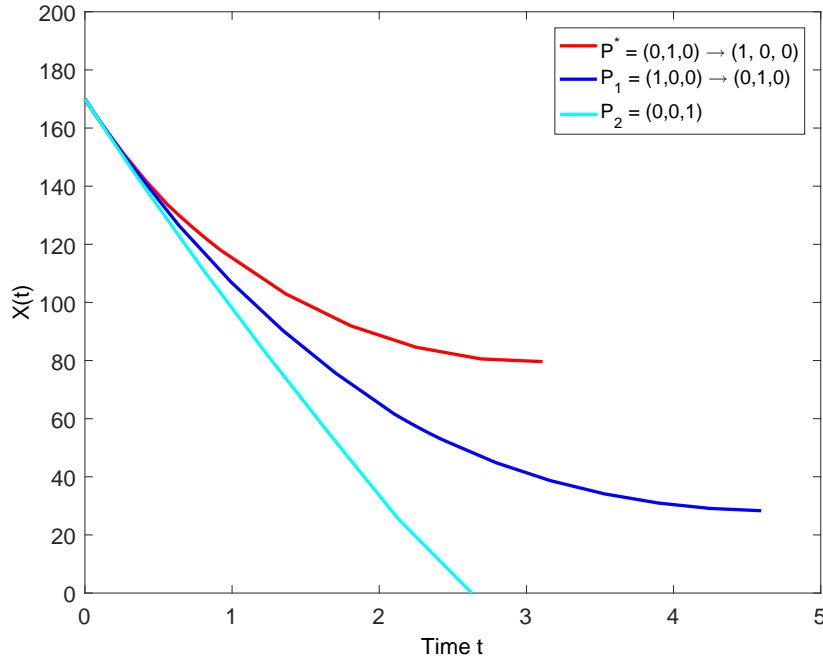
α_c^A	α_d^A	γ_{Y_2}	r_{Y_1}	r_A	r_{Y_2}
0.4	0.2	0.6	0.5	0.2	0.5

Bảng 3.3: Các tham số cho Trường hợp 3.

hỏa lực dùng để so sánh là $P_1 = (1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$; $P_2 = (0, 0, 1)$ thì đối với phương án P_1 , X chiến thắng nhưng quân số ít hơn so với phương án tối ưu trong suốt quá trình diễn ra trận đánh. Còn với phương án P_2 thì khi chưa tiêu diệt hết quân số của lực lượng hỗ trợ A thì quân số của lực lượng X đã bị tiêu diệt hết và thua trận. Đối với trường hợp thứ ba này, trong phần tiếp theo, chúng tôi cũng tiến hành thử nghiệm bằng cách tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và nghiên cứu ảnh hưởng của chúng đến kết quả của trận đánh. Theo tính toán, số quân còn lại của X khi kết thúc giai đoạn một được trình bày trong bảng sau:

X	≤ 0	$(0, 20]$	$(20, 50]$	$(50, 80]$	$(80, 170]$
Số trường hợp	296	227	103	170	204

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 131 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P^{max} = (0.0114, 0.9267, 0.0619)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_3 \approx 0.6059$. Với phân



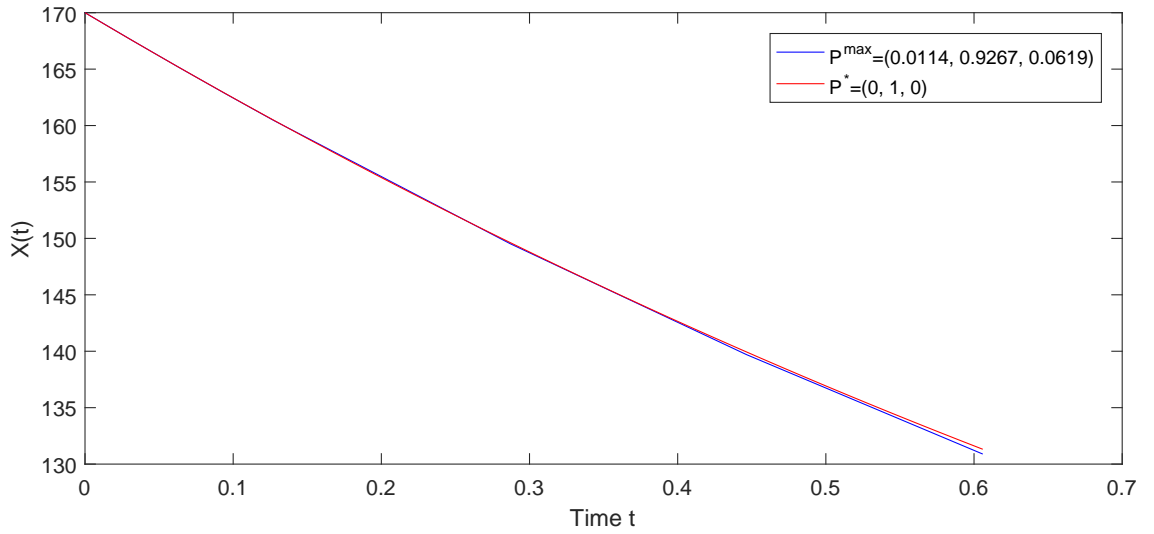
Hình 3.9: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 3: Y_2 bị đánh trước.

bố hỏa lực tối ưu $P^* = (0; 1; 0)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_3^{tu} \approx 0.5615$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 134. Như vậy, với phân bố hỏa lực tối ưu thì giai đoạn 1 của trận đánh sẽ kết thúc nhanh hơn, quân số của X còn lại khi kết thúc giai đoạn 1 là lớn hơn so với sử dụng phương án hỏa lực P^{max} . Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_3 được mô tả trong Hình 3.10.

3.3 Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ hai

3.3.1 Mô hình

Tiếp theo, chúng tôi xét mô hình trận đánh mà một bên là lực lượng X đối đầu với n lực lượng Y_1, Y_2, \dots, Y_n trong đó mỗi lực lượng Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lại có một đơn vị hỗ trợ A_i tương ứng. Rõ ràng là các đơn vị hỗ trợ A_1, \dots, A_n tác động đến kết quả của trận chiến bằng cách ảnh hưởng đến tốc độ tiêu diệt của Y_1, \dots, Y_n đối với X . Khi quân số của nó bị tiêu diệt hoàn toàn thì các tác động này cũng không còn nữa. Chúng tôi ký hiệu mô hình này là $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n)))$.



Hình 3.10: Trường hợp 3: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_3]$.

Sơ đồ trận đánh của mô hình được mô tả trong Hình 3.11.

Đối với mô hình này chúng tôi sử dụng các ký hiệu:

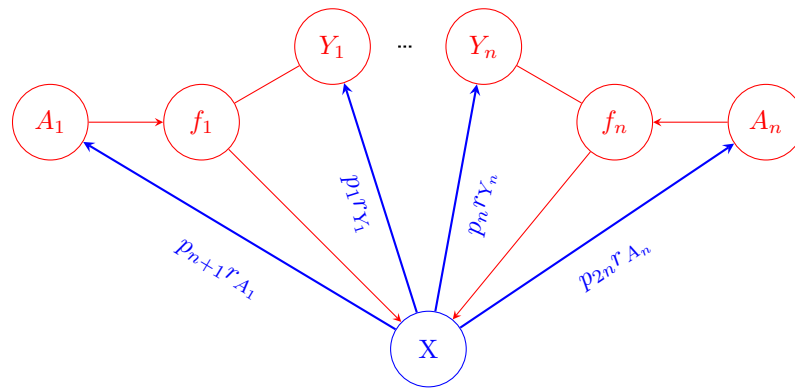
+ r_{A_i} , ($i = 1, \dots, n$) : tốc độ tiêu diệt của X đối với A_i .

+ $\alpha_c^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi kết nối đầy đủ với A_i đối với X .

+ $\alpha_d^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y_i khi không có kết nối với A_i đối với X .

+ Tốc độ tiêu diệt của Y_i đối với X phụ thuộc vào hàm hỗ trợ của A_i cho Y_i đánh X , hàm này có dạng $f_i = \alpha_d^{A_i} + (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) \frac{A_i}{A_i(0)}$.

+ $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_{2n})$ là một phân bố hỏa lực của X đối với $Y_1, \dots, Y_n, A_1, \dots, A_n$ tương ứng.



Hình 3.11: Sơ đồ trận đánh của mô hình (X vs $((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n))$).

Tốc độ suy giảm quân số của tất cả các bên tham chiến được cho dưới dạng hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left[\alpha_d^{A_i} + (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) \frac{A_i}{A_i(0)} \right] Y_i, \\ \frac{dY_i}{dt} = -p_i r_{Y_i} X, \quad (i = 1, \dots, n), \\ \frac{dA_j}{dt} = -p_{n+j} r_{A_j} X, \quad (j = 1, \dots, n). \end{cases} \quad (3.9)$$

3.3.2 Phân bố hỏa lực tối ưu

Với mô hình (3.9), chúng tôi xét bài toán tối ưu quân số của lực lượng X tại mọi thời điểm t trong giai đoạn 1 của trận đánh (giai đoạn 1 của trận đánh được tính từ thời điểm bắt đầu trận đánh cho đến khi một trong các lực lượng $Y_1, \dots, Y_n, A_1, \dots, A_n$ bị tiêu diệt hoàn toàn).

Đặt:

$$\begin{aligned} b_i &= \alpha_c^{A_i} r_{Y_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \\ b_{n+j} &= \frac{r_{A_j} \left(\alpha_c^{A_j} - \alpha_d^{A_j} \right) Y_j(0)}{A_j(0)}, \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Chúng tôi gọi các hằng số này là các "hệ số đe dọa". Chúng đại diện cho mức độ "đe dọa" của các lực lượng Y_1, \dots, Y_n cùng với các đơn vị hỗ trợ cho chúng đối với lực lượng X . Phân bố hỏa lực tối ưu của X được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 3.3.1. *Giả sử rằng phân bố hỏa lực của X là tập*

$$\mathcal{P} = \{(p_1, \dots, p_n, \dots, p_{2n}) : p_k \in [0, 1] \text{ là các hằng số, } k = 1, \dots, 2n; \sum_{k=1}^{2n} p_k = 1\}$$

. Khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là :

$$P^* = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0 \right) \text{ trong đó } k = \arg \max_{l=1, \dots, 2n} \{b_l\}.$$

Chứng minh. Đặt $S(t) = \int_0^t X(s) ds$. Ta có $S'(t) = X(t)$ và

$$S''(t) = X'(t) = - \sum_{i=1}^n \left[\alpha_d^{A_i} + (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) \frac{A_i}{A_i(0)} \right] Y_i. \quad (3.11)$$

Mặt khác

$$\int_0^t dY_1 = - \int_0^t p_1 r_{Y_1} X(s) ds \Rightarrow Y_1(t) - Y_1(0) = -p_1 r_{Y_1} S(t).$$

Suy ra

$$Y_1(t) = -p_1 r_{Y_1} S(t) + Y_1(0). \quad (3.12)$$

Tính toán tương tự, ta nhận được

$$Y_i(t) = -p_i r_{Y_i} S(t) + Y_i(0), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.13)$$

$$A_j(t) = -p_{n+j} r_{A_j} S(t) + A_j(0), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.14)$$

Thay (3.13), (3.14) vào (3.11) ta có

$$S''(t) = -C_1 S^2(t) + C_2 S(t) - C_3, \quad (3.15)$$

trong đó

$$C_1 = \sum_{i=1}^n \frac{p_i p_{n+i} r_{Y_i} r_{A_i} (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i})}{A_i(0)},$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^n \frac{p_{n+i} r_{A_i} (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) Y_i(0) + p_i r_{Y_i} \alpha_c^{A_i} A_i(0)}{A_i(0)},$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^n \alpha_c^{A_i} Y_i(0).$$

Nhân hai vế của (3.15) với $dS(t)$ và tích phân hai vế ta thu được

$$\begin{aligned} S'(t) &= X(t) \\ &= \sqrt{-\frac{2}{3} C_1 S^3(t) + C_2 S^2(t) - 2C_3 S(t) + C_4}, \end{aligned}$$

ở đó C_4 là hằng số tích phân. Vì C_3 không đổi, trong khi $C_1, C_2 \geq 0$, do đó để $B(t)$ lớn nhất, chúng ta sẽ tìm điều kiện để C_1 nhỏ nhất đồng thời C_2 lớn nhất (nếu xảy ra). Từ đó, ta có bài toán tối ưu đa mục tiêu sau:

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \{C_1, -C_2\}. \quad (3.16)$$

Ký hiệu

$$a_i = \frac{r_{Y_i} r_{A_i} (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i})}{A_i(0)}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.17)$$

Bài toán (3.16) trở thành

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i, - \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j=1}^n b_{n+j} y_j \right) \right\} \\ & \text{với điều kiện } \begin{cases} 0 \leq x_i, y_j \leq 1 : i, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^n y_j = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Để giải bài toán (3.18), chúng tôi sử dụng phương pháp vô hướng hóa WM ([43]).

Theo đó, với $\gamma \in [0,1]$ ta định nghĩa hàm

$$F_\gamma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \gamma \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i - (1 - \gamma) \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j=1}^n b_{n+j} y_j \right),$$

và xét bài toán sau

$$\begin{aligned} & \min F_\gamma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \\ & \text{với điều kiện } \begin{cases} 0 \leq x_i, y_j \leq 1 : i, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^n y_j = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Thay $x_1 = 1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j$ vào (3.19) ta thu được bài toán:

$$\begin{aligned} & \min F_\gamma \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \right) \\ & \text{với điều kiện } \begin{cases} 0 \leq x_i, y_j \leq 1 : i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=2}^n x_i + \sum_{j=1}^n y_j \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng: $b_2 \geq \dots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \dots \geq b_{2n}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $b_1 = \min_{i=1, \dots, 2n} \{b_i\}$.

Ta có

$$\begin{aligned} F_\gamma &= \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ & - (1 - \gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - b_1) x_i + \sum_{j=1}^n (b_{n+j} - b_1) y_j \right). \end{aligned}$$

$$\forall \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \geq 0 \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} \min F_\gamma &\geq - (1 - \gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - b_1) x_i + \sum_{j=1}^n (b_{n+j} - b_1) y_j \right) \\ &\geq - (1 - \gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^n (b_2 - b_1) x_i + \sum_{j=1}^n (b_2 - b_1) y_j \right) \\ &= - (1 - \gamma) \left(b_1 + (b_2 - b_1) \left(\sum_{i=2}^n x_i + \sum_{j=1}^n y_j \right) \right) \\ &\geq - (1 - \gamma)(b_1 + b_2 - b_1) = -(1 - \gamma)b_2 = F_\gamma(0, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $b_1 = \max_{i=1, \dots, 2n} \{b_i\}$.

Ta có

$$\begin{aligned} F_\gamma &= \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ &\quad - (1 - \gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - b_1) x_i + \sum_{j=1}^n (b_{n+j} - b_1) y_j \right) \\ &= \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ &\quad + (1 - \gamma) \left(\sum_{i=2}^n (b_1 - b_i) x_i + \sum_{j=1}^n (b_1 - b_{n+j}) y_j \right) - (1 - \gamma)b_1. \end{aligned}$$

\forall

$$\begin{aligned} &\gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ &\quad + (1 - \gamma) \left(\sum_{i=2}^n (b_1 - b_i) x_i + \sum_{j=1}^n (b_1 - b_{n+j}) y_j \right) \geq 0, \end{aligned}$$

suy ra $\min F_\gamma \geq -(1 - \gamma)b_1 = F_\gamma(1, 0, 0, \dots, 0)$.

Trường hợp 3: $b_2 \geq \dots \geq b_k \geq b_1 \geq b_{k+1} \geq \dots \geq b_{2n}$.

3.1. Nếu $2 \leq k < n$, ta có

$$\begin{aligned} F_\gamma = & \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ & + (1 - \gamma) \left(\sum_{i=k+1}^n (b_1 - b_i) x_i + \sum_{j=1}^n (b_1 - b_{n+j}) y_j \right) \\ & - (1 - \gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^k (b_i - b_1) x_i \right). \end{aligned}$$

Vi

$$\begin{aligned} & \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ & + (1 - \gamma) \left(\sum_{i=k+1}^n (b_1 - b_i) x_i + \sum_{j=1}^n (b_1 - b_{n+j}) y_j \right) \geq 0, \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} \min F_\gamma & \geq - (1 - \gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^k (b_i - b_1) x_i \right) \\ & \geq - (1 - \gamma) (b_1 + b_2 - b_1) \\ & = - (1 - \gamma) b_2 = F_\gamma(0, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

3.2. Nếu $n \leq k \leq 2n$, ta có:

$$\begin{aligned} F_\gamma = & \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ & + (1 - \gamma) \left(\sum_{j=k+1}^n (b_1 - b_j) y_j \right) \\ & - (1 - \gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - b_1) x_i + \sum_{j=1}^k (b_{n+j} - b_1) y_j \right). \end{aligned}$$

Vi

$$\begin{aligned} & \gamma \left(a_1 y_1 \left(1 - \sum_{i=2}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right) + \sum_{i=2}^n a_i x_i y_i \right) \\ & + (1 - \gamma) \left(\sum_{j=k+1}^n (b_1 - b_j) y_j \right) \geq 0, \end{aligned}$$

nên

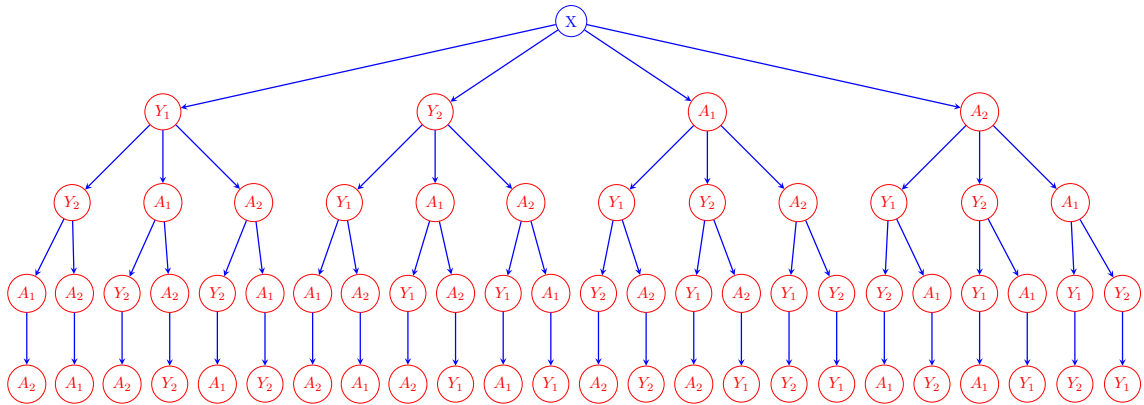
$$\begin{aligned} \min F_\gamma &\geq -(1-\gamma) \left(b_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - b_1) x_i + \sum_{j=1}^k (b_{n+j} - b_1) y_j \right) \\ &\geq -(1-\gamma) (b_1 + b_2 - b_1) \\ &= -(1-\gamma) b_2 = F_\gamma(0, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

□

Hệ quả 3.3.2. Với $n = 2$, ta có mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), (Y_2, A_2)))$, phân bố hỏa lực tối ưu của X khi đó là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0, 0, 0) & \text{nếu } b_1 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \\ (0, 1, 0, 0) & \text{nếu } b_2 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \\ (0, 0, 1, 0) & \text{nếu } b_3 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \\ (0, 0, 0, 1) & \text{nếu } b_4 = \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}. \end{cases} \quad (3.21)$$

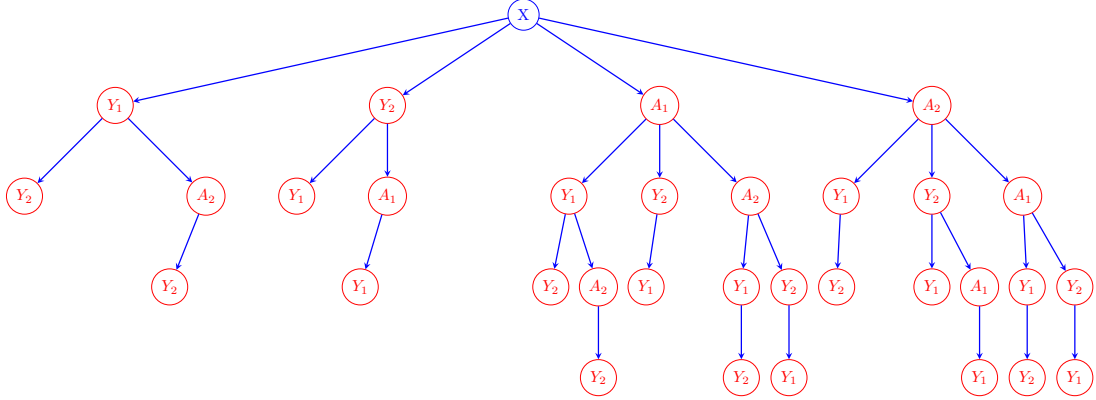
Thực tế, lực lượng X đồng thời chống lại 4 lực lượng Y_1, Y_2, A_1, A_2 nên về cơ bản trận đánh được chia thành 4 giai đoạn. Các trường hợp của trận đánh theo 4 giai đoạn có thể mô tả dưới dạng 1 cây như Hình 3.12.



Hình 3.12: Diễn tiến trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), (Y_2, A_2)))$ trên lý thuyết.

Tùy thuộc vào độ lớn của các "hệ số đe dọa" mà lực lượng X lựa chọn đánh lực lượng nào trước. Tuy nhiên, chú ý rằng nếu Y_1 hoặc Y_2 bị tiêu diệt hoàn toàn

thì X sẽ không cần đánh A_1 hoặc A_2 nữa. Hơn nữa, nếu cả Y_1 và Y_2 bị tiêu diệt hoàn toàn thì trận đánh sẽ kết thúc (do lúc này lực lượng X không bị giảm về quân số). Do đó, trên thực tế trận đánh có thể chỉ gồm 2 hoặc 3 giai đoạn. Ta có thể mô tả rút gọn các trường hợp thực tế của trận đánh như Hình 3.13.



Hình 3.13: Diễn tiến trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), (Y_2, A_2)))$ trên thực tế.

Đặc biệt, đối với mô hình $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), (Y_2, A_2)))$ mà A_2 bị tiêu diệt hoàn toàn đầu tiên, hoặc ngay từ đầu Y_2 không có sự hỗ trợ của A_2 thì Hệ quả 3.3.2 này chính là Định lý 3.2.1 đã trình bày ở trên.

Hệ quả 3.3.3. Với $n = 1$, ta có mô hình $(X \text{ vs } (Y_1, A_1))$, khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0) & \text{nếu } b_1 \geq b_2, \\ (0, 1) & \text{nếu } b_1 \leq b_2. \end{cases} \quad (3.22)$$

Kết quả này đã được Donghyun Kim và nhóm tác giả trình bày trong [36].

3.3.3 Một vài minh họa số

Trong phần này, chúng tôi sẽ đưa ra các tính toán số cho ba trường hợp tiêu biểu của Hệ quả 3.3.2.

Trường hợp 1: Y_1 và Y_2 lần lượt bị đánh trước

Chúng ta xét mô hình (X vs $((Y_1, A_1), (Y_2, A_2))$) với các tham số đầu vào như sau:

$(\alpha_d^{A_1}, \alpha_c^{A_1})$	$(\alpha_d^{A_2}, \alpha_c^{A_2})$	$(r_{Y_1}, r_{Y_2}, r_{A_1}, r_{A_2})$
(0.4, 0.8)	(0.5, 0.7)	(0.4, 0.35, 0.3, 0.4)

Bảng 3.4: Các tham số cho Trường hợp 1.

cùng với quân số ban đầu của các bên:

$$X(0) = 350; Y_1(0) = 120; Y_2(0) = 100; A_1(0) = 50; A_2(0) = 60.$$

Với các tham số này, các "hệ số đe dọa" được tính toán như sau:

$$b_1 = 0.32; b_2 = 0.245; b_3 = 0.288; b_4 = 0.133.$$

Áp dụng Hệ quả 3.3.2, lực lượng X sẽ tập trung hỏa lực để đánh Y_1 trong giai đoạn 1 của trận đánh. Sau giai đoạn 1, khi mà Y_1 bị tiêu diệt hoàn toàn thì không cần đánh A_1 . Trong giai đoạn 2, áp dụng Hệ quả 3.3.3, lực lượng X sẽ tấn công Y_2 . Nếu Y_2 bị tiêu diệt hoàn toàn, trận đánh sẽ kết thúc. Tổng hợp cả hai giai đoạn, phân bố hỏa lực tối ưu của X là:

$$P^* = (1, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0).$$

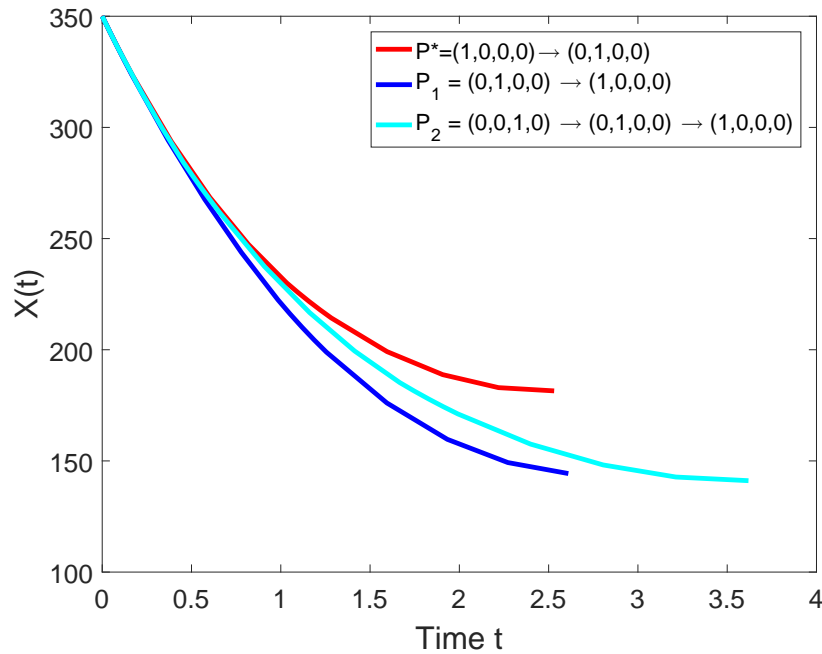
Chúng tôi so sánh chiến thuật sử dụng phân bố hỏa lực tối ưu với hai chiến thuật sau:

$$P_1 = (0, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0),$$

$$P_2 = (0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0),$$

trong đó, chiến thuật P_1 là ngược lại với P^* .

Kết quả của trận đánh và quân số còn lại của X với 3 phân bố hỏa lực trên được mô tả trong Hình 3.14. Ta thấy, với chiến thuật trên thì lực lượng X luôn thắng trận. Tuy nhiên, nếu dùng phân bố hỏa lực tối ưu P^* thì trận đánh nhanh



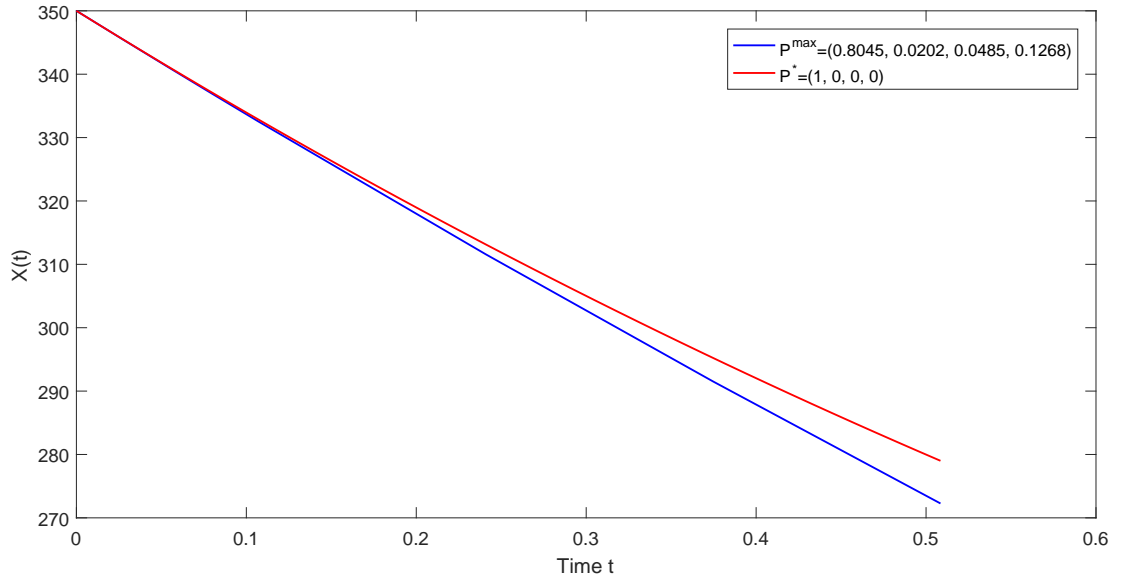
Hình 3.14: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 1: Y_1 và Y_2 lần lượt bị đánh trước.

chóng kết thúc, và quân số còn lại của bên X tại mọi thời điểm của trận đánh luôn luôn lớn nhất.

Tiếp theo, với bộ tham số đầu vào như trên, chúng tôi tiến hành thử nghiệm đối với 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên. Quân số của lực lượng X còn lại khi kết thúc giai đoạn 1 được tính toán và thống kê trong bảng sau:

X	≤ 0	$(0, 50]$	$(50, 150]$	$(150, 250]$	$(250, 350]$
Số trường hợp	43	86	489	375	7

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 272 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P^{max} = (0.8045, 0.0202, 0.0485, 0.1268)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_1 \approx 0.5085$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $P^* = (1, 0, 0, 0)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_1^{tu} \approx 1.0335$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 230. Tuy nhiên, tại thời điểm $t_1 \approx 0.5085$, số quân còn lại của X nếu sử dụng phân bố hỏa lực tối ưu là xấp xỉ 283. Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_1 được mô tả trong Hình 3.15.



Hình 3.15: Trường hợp 1: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_1]$.

Trường hợp 2: Một trong các đơn vị hỗ trợ bị đánh trước

Xét mô hình (X vs $((Y_1, A_1), (Y_2, A_2))$) với tham số đầu vào:

$(\alpha_d^{A_1}, \alpha_c^{A_1})$	$(\alpha_d^{A_2}, \alpha_c^{A_2})$	$(r_{Y_1}, r_{Y_2}, r_{A_1}, r_{A_2})$
(0.4, 0.8)	(0.3, 0.7)	(0.4, 0.5, 0.3, 0.4)

Bảng 3.5: Các tham số cho Trường hợp 2.

cùng với quân số ban đầu của các bên:

$$X(0) = 350; Y_1(0) = 120; Y_2(0) = 150; A_1(0) = 50; A_2(0) = 40.$$

Với các tham số này, các "hệ số đe dọa" được tính toán như sau:

$$b_1 = 0.32; b_2 = 0.35; b_3 = 0.288; b_4 = 0.6.$$

Theo Hệ quả 3.3.2, trong giai đoạn 1 của trận đánh, lực lượng X sẽ tấn công A_2 trước. Sau giai đoạn 1, khi A_2 bị tiêu diệt hoàn toàn, các "hệ số đe dọa" được tính lại như sau:

$$b_1 = 0.32; b_2 = 0.15; b_3 = 0.288.$$

Từ đó, trong giai đoạn 2, lực lượng X sẽ tập trung hỏa lực đánh Y_1 . Khi Y_1 bị tiêu diệt hoàn toàn thì X không cần đánh A_1 và hiển nhiên là trong giai đoạn 3 lực lượng X sẽ đánh Y_2 . Tổng kết lại, phân bố hỏa lực tối ưu của X là:

$$P^* = (0, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0).$$

Chúng tôi sẽ dùng hai chiến thuật phân bố hỏa lực sau để so sánh với chiến thuật P^* :

$$P_1 = (1, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0)$$

và

$$P_2 = (0, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0).$$

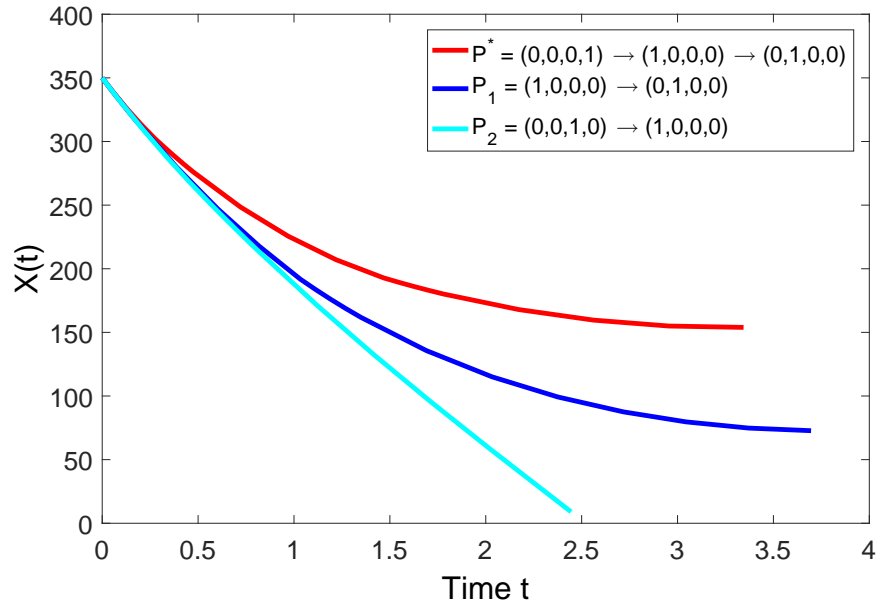
Chiến thuật P_1 gần giống với P^* nhưng không có giai đoạn đánh A_2 . Trong khi đó, với chiến thuật P_2 thì lực lượng X tập trung đánh A_1 trong giai đoạn 1 rồi đánh Y_1 trong giai đoạn tiếp theo. Kết quả của trận đánh được mô tả trong Hình 3.16. Trong hình ta thấy với chiến thuật P^* và P_1 thì bên X sẽ chiến thắng khi trận đánh kết thúc, tuy nhiên quân số của X khi sử dụng phân bố hỏa lực tối ưu luôn là lớn nhất tại mọi thời điểm, nếu sử dụng chiến thuật P_2 thì bên X thua cuộc.

Tiến hành thử nghiệm đối với 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên, chúng tôi thu được kết quả như sau:

Quân số của lực lượng X còn lại khi kết thúc giai đoạn 1 được tính toán và thống kê trong bảng

X	≤ 0	(0, 50]	(50, 150]	(150, 250]	(250, 350]
Số trường hợp	60	153	239	494	54

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 297 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P^{max} = (0.0465, 0.0508, 0.0241, 0.8786)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_2 \approx 0.3104$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $P^* = (0, 0, 0, 1)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_2^{tu} \approx 0.2727$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 303. Như vậy, so



Hình 3.16: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 2: Một trong các đơn vị hỗ trợ bị đánh trước.

sánh phương án tối ưu P^* và phương án P^{max} ta thấy nếu sử dụng phương án P^* thì khi kết thúc giai đoạn 1 quân số của lực lượng X còn lại lớn hơn, ngoài ra thời gian để kết thúc giai đoạn 1 của trận đánh ngắn hơn. Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_2 được mô tả trong Hình 3.17.

Trường hợp 3: Các đơn vị hỗ trợ lần lượt bị đánh trước

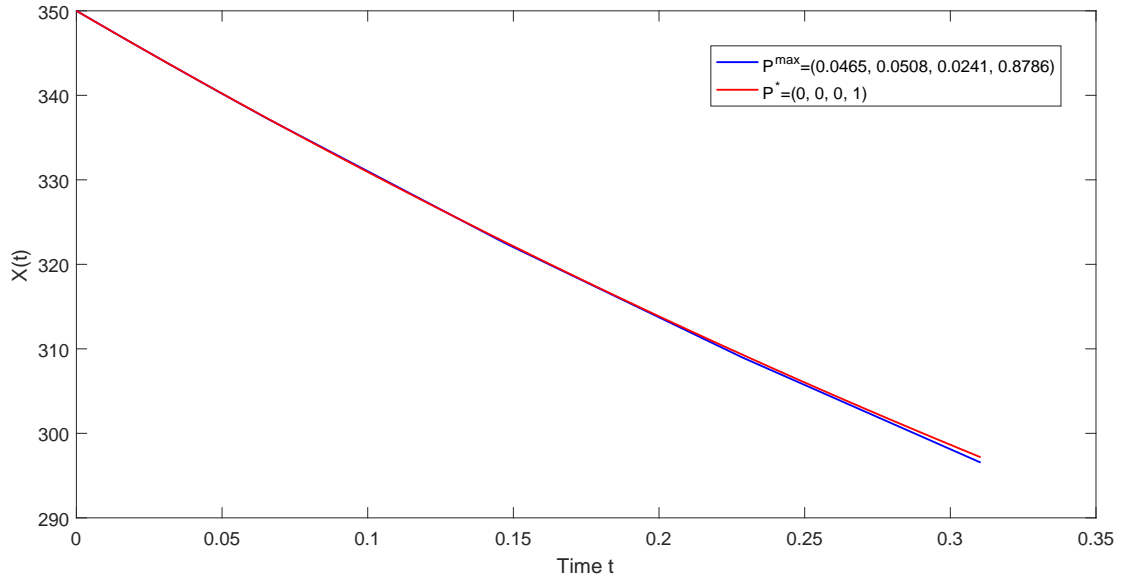
Xét mô hình (X vs $((Y_1, A_1), (Y_2, A_2))$) với tham số đầu vào:

$(\alpha_d^{A_1}, \alpha_c^{A_1})$	$(\alpha_d^{A_2}, \alpha_c^{A_2})$	$(r_{Y_1}, r_{Y_2}, r_{A_1}, r_{A_2})$
(0.4, 0.8)	(0.3, 0.7)	(0.2, 0.5, 0.3, 0.4)

Bảng 3.6: Các tham số cho Trường hợp 3.

cùng với quân số ban đầu của các bên:

$$X(0) = 400; Y_1(0) = 120; Y_2(0) = 150; A_1(0) = 50; A_2(0) = 40.$$



Hình 3.17: Trường hợp 2: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_2]$.

Từ (3.24), với các tham số này, các "hệ số đe dọa" được tính toán như sau:

$$b_1 = 0.16; b_2 = 0.35; b_3 = 0.288; b_4 = 0.6.$$

Trong giai đoạn 1, lực lượng X sẽ tập trung đánh A_2 trước. Kết thúc giai đoạn 1, khi A_2 bị tiêu diệt hoàn toàn thì các "hệ số đe dọa" được tính toán lại như sau:

$$b_1 = 0.16; b_2 = 0.15; b_3 = 0.288.$$

Như vậy, trong giai đoạn 2, lực lượng X sẽ tập trung đánh A_1 . Sau giai đoạn 2, lực lượng X sẽ tập trung hỏa lực vào Y_1 vì "hệ số đe dọa" của Y_1 lớn hơn của Y_2 . Tổng kết lại, phân bố hỏa lực tối ưu của X là:

$$P^* = (0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0).$$

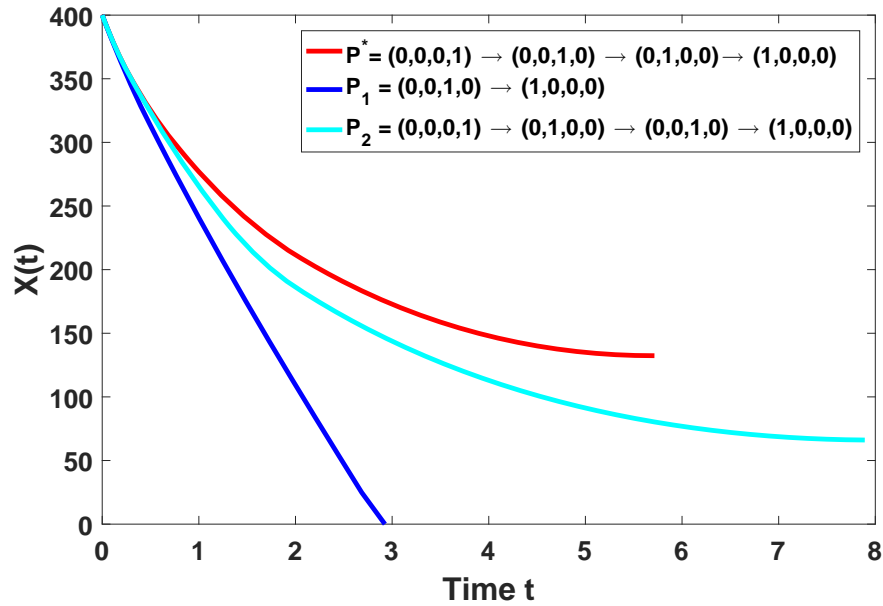
Để so sánh với chiến thuật dùng phân bố hỏa lực tối ưu P^* , chúng tôi đưa ra hai chiến thuật sử dụng phân bố hỏa lực như sau:

$$P_1 = (0, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0)$$

và

$$P_2 = (0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0).$$

Kết quả của các chiến thuật trong Trường hợp 3 này được mô tả trong Hình 3.18. Với chiến thuật P_1 , đầu tiên bên X sẽ tập trung đánh A_1 trong giai đoạn 1, trong giai đoạn 2 bên X sẽ tập trung đánh Y_1 . Trên hình vẽ ta thấy bên X sẽ nhanh chóng thua cuộc nếu sử dụng chiến thuật này. Trong chiến thuật P_2 , giai đoạn 1 giống như giai đoạn 1 của P^* , bên X tập trung đánh A_2 . Trong các giai đoạn sau, chiến thuật P_2 khác với P^* , lực lượng X sẽ tấn công lần lượt Y_2, A_1, Y_1 . Trên hình ta thấy nếu bên X sử dụng chiến thuật P^2 hay P^* thì X là bên thắng trận nhưng rõ ràng quân số còn lại của bên X tại thời điểm bất kỳ nếu sử dụng chiến thuật P^* luôn lớn hơn.



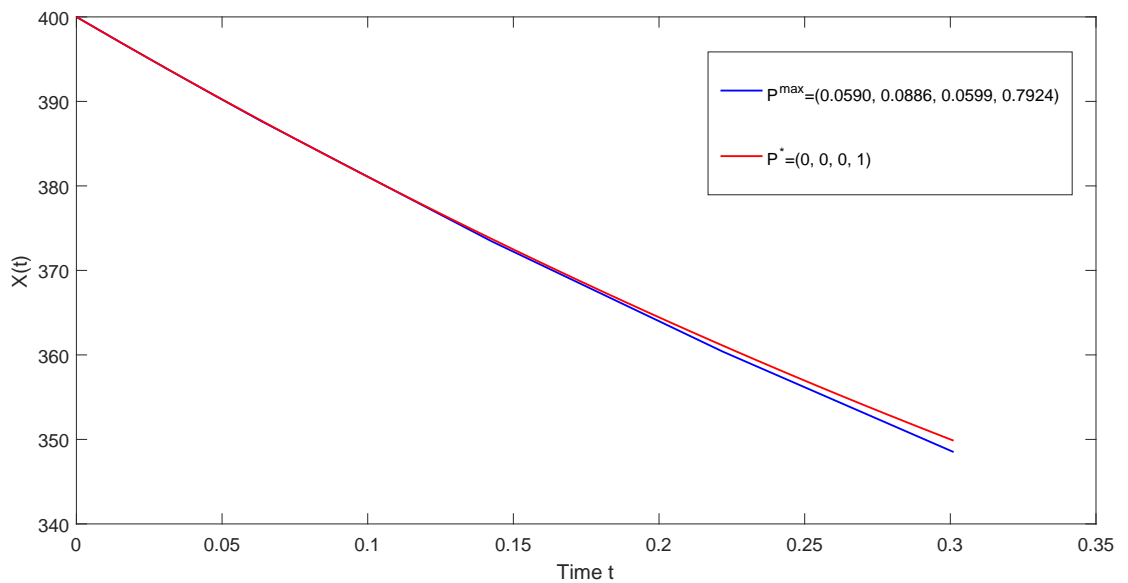
Hình 3.18: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 3: Các đơn vị hỗ trợ lần lượt bị đánh trước.

Dưới đây là kết quả thử nghiệm của chúng tôi khi tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên nhằm minh họa thêm cho sự đúng đắn của định lý.

Quân số của lực lượng X còn lại khi kết thúc giai đoạn 1 được tính toán và thống kê trong bảng

X	≤ 0	$(0, 50]$	$(50, 150]$	$(150, 250]$	$(250, 400]$
Số trường hợp	27	49	97	379	448

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 349 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P^{max} = (0.0590, 0.0886, 0.0599, 0.7924)$. Với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận đánh kết thúc tại thời điểm $t_3 \approx 0.3011$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $P^* = (0, 0, 0, 1)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_3^{tu} \approx 0.2386$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 357. Cũng giống như Trường hợp 2, so sánh phương án tối ưu P^* và phương án P^{max} ta thấy nếu sử dụng phương án P^* thì khi kết thúc giai đoạn 1 quân số của lực lượng X còn lại lớn hơn, ngoài ra thời gian để kết thúc giai đoạn 1 của trận đánh ngắn hơn. Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_3 được mô tả trong Hình 3.19.



Hình 3.19: Trường hợp 3: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_3]$.

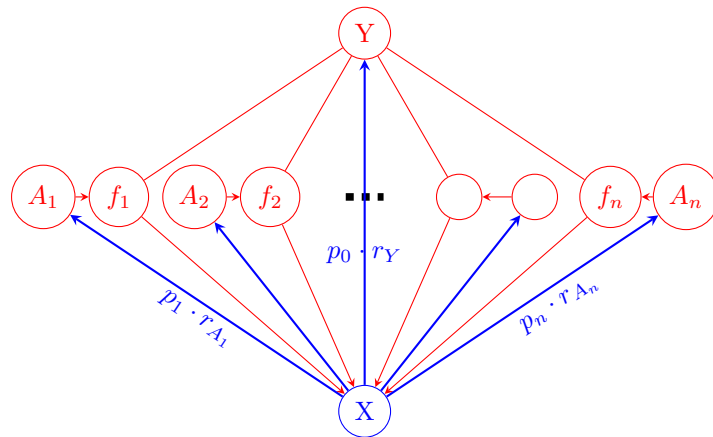
3.4 Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ ba

3.4.1 Mô hình

Trong phần này, chúng tôi xét mô hình trận đánh mà một bên là lực lượng X đối đầu với một bên là lực lượng Y , trong đó lực lượng Y được hỗ trợ bởi n đơn vị A_1, \dots, A_n . Rõ ràng là các đơn vị hỗ trợ A_1, \dots, A_n tác động đến kết quả của trận chiến bằng cách ảnh hưởng đến tốc độ tiêu diệt của Y đối với X . Khi quân số của các lực lượng hỗ trợ bị tiêu diệt hoàn toàn thì các tác động này cũng không còn nữa. Chúng tôi ký hiệu mô hình này là $(X \text{ vs } (Y, A_1, \dots, A_n))$. Sơ đồ trận đánh của mô hình được mô tả trong Hình 3.20.

Đối với mô hình này chúng tôi sử dụng các ký hiệu:

- + r_{A_i} , ($i = 1, \dots, n$) : tốc độ tiêu diệt của X đối với A_i .
- + $\alpha_c^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y khi kết nối đầy đủ với A_i đối với X .
- + $\alpha_d^{A_i}$: tốc độ tiêu diệt của Y khi không có kết nối với A_i đối với X .
- + Hàm hỗ trợ của A_i cho Y đánh X là $f_i = \alpha_d^{A_i} + (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) \frac{A_i}{A_i(0)}$.
- + Tốc độ tiêu diệt của Y đối với X phụ thuộc vào tổng của các hàm hỗ trợ của A_i cho Y đánh X , tổng này có dạng $\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n \left(\alpha_d^{A_i} + (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) \frac{A_i}{A_i(0)} \right)$.
- + (p_0, p_1, \dots, p_n) là một phân bố hỏa lực của X đối với Y, A_1, \dots, A_n tương ứng.



Hình 3.20: Sơ đồ trận đánh của mô hình $(X \text{ vs } (Y, A_1, \dots, A_n))$.

Mô hình được mô tả dưới hệ phương trình vi phân như sau:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left[\alpha_d^{A_i} + (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) \frac{A_i}{A_i(0)} \right] Y, \\ \frac{dY}{dt} = -p_0 r_Y X, \\ \frac{dA_i}{dt} = -p_i r_{A_i} X, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (3.23)$$

3.4.2 Phân bố hỏa lực tối ưu

Đặt :

$$\begin{aligned} b_0 &= (\alpha_c^{A_1} + \dots + \alpha_c^{A_n}) r_Y \\ b_i &= \frac{r_{A_i} (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) Y(0)}{A_i(0)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Cũng như trên, chúng tôi gọi các hằng số này là các "hệ số đe dọa". Chúng đại diện cho mức độ "đe dọa" của các lực lượng Y, A_1, \dots, A_n đối với lực lượng X . Phân bố hỏa lực tối ưu của X được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 3.4.1. *Giả sử rằng tập các phân bố hỏa lực của X là $\mathcal{P} = \{(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \in [0, 1] \text{ là các hằng số, } i = 1, \dots, n; \sum_{i=0}^n p_i = 1\}$, khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là trong giai đoạn 1 của trận đánh là:*

$$P^* = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0 \right) \text{ ở đó } i = \arg \max_{j=0,1,\dots,n} \{b_j\}.$$

Chứng minh. Đặt $S(t) = \int_0^t X(s) ds$. Suy ra $S'(t) = X(t)$ và

$$\begin{aligned} S''(t) &= X'(t) \\ &= - (f^1 + \dots + f^n) Y. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ta cũng có:

$$\int_0^t dY = - \int_0^t p_0 r_Y X(s) ds \rightarrow Y(t) - Y(0) = -p_0 r_Y S(t).$$

Suy ra:

$$Y(t) = -p_0 r_Y S(t) + Y(0). \quad (3.26)$$

Tính toán tương tự, ta nhận được

$$A_i(t) = -p_i r_{A_i} S(t) + A_i(0), \quad i = 1 \dots n. \quad (3.27)$$

Thay (3.26), (3.27) vào (3.25) ta nhận được:

$$S''(t) = -C_1 S^2(t) + C_2 S(t) - C_3, \quad (3.28)$$

trong đó

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{i=1}^n \frac{p_0 p_i r_Y r_{A_i} (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i})}{A_i(0)}, \\ C_2 &= \sum_{i=1}^n \frac{p_i r_{A_i} (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i}) Y(0) + p_0 r_Y \alpha_c^{A_i} A_i(0)}{A_i(0)}, \\ C_3 &= Y(0) \sum_{i=1}^n \alpha_c^{A_i}. \end{aligned}$$

Nhân hai vế của (3.28) với $dS(t)$ rồi lấy tích phân 2 vế ta được:

$$\begin{aligned} S'(t) &= X(t) \\ &= \sqrt{-\frac{2}{3} C_1 S^3(t) + C_2 S^2(t) - 2C_3 S(t) + C_4}, \end{aligned}$$

ở đây, C_1, C_2, C_3 là các giá trị không âm, C_4 là một hằng số tích phân. Do C_3 không đổi nên để tìm điều kiện sao cho $X(t)$ lớn nhất ta sẽ tìm điều kiện để C_1 nhỏ nhất đồng thời C_2 lớn nhất (nếu xảy ra).

Ta có bài toán tối ưu đa mục tiêu: $\min_{P \in \mathcal{P}} \{C_1, -C_2\}$.

Đặt

$$a_i = \frac{r_Y r_{A_i} (\alpha_c^{A_i} - \alpha_d^{A_i})}{A_i(0)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.29)$$

Áp dụng các công thức (3.24) và (3.29), bài toán trở thành:

$$\begin{aligned} &\min\{(a_1 x x_1 + \dots + a_n x x_n), -(b_0 x + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)\} \\ &\text{với điều kiện } \begin{cases} 0 \leq x, x_i \leq 1, (i = 1, \dots, n), \\ x + x_1 + \dots + x_n = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sử dụng phương pháp vô hướng hóa WM ([43]) và đặt:

$$\begin{aligned} F_\gamma(x, x_1, \dots, x_n) &= \{\gamma(a_1 x x_1 + \dots + a_n x x_n) \\ &\quad - (1 - \gamma)(b_0 x + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n)\}, \end{aligned}$$

ta nhận được bài toán:

$$\begin{aligned} & \min F_\gamma(x, x_1, \dots, x_n) \\ & \text{với điều kiện: } \begin{cases} 0 \leq x, x_i \leq 1, (i = 1, \dots, n), \\ x + x_1 + \dots + x_n = 1, \\ 0 \leq \gamma \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Thay $x = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$ vào bài toán (3.31) ta đưa về bài toán:

$$\begin{aligned} & \min F_\gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i, x_1, \dots, x_n \right) \\ & \text{với điều kiện: } \begin{cases} 0 \leq x_i \leq 1, (i = 1, \dots, n), \\ x_1 + \dots + x_n = 1, \\ 0 \leq \gamma \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $b_1 \geq b_2 \dots \geq b_n$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $b_0 = \min_{i=0, \dots, n} \{b_i\}$.

Ta có

$$F_\gamma = \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i - (1 - \gamma) \left(b_0 + \sum_{i=1}^n (b_i - b_0) x_i \right).$$

Vì $\gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} \min F_\gamma & \geq - (1 - \gamma) \left(b_0 + \sum_{i=1}^n (b_i - b_0) x_i \right) \\ & \geq - (1 - \gamma) \left(b_0 + \sum_{i=1}^n (b_1 - b_0) x_i \right) \\ & = - (1 - \gamma) \left(b_0 + (b_1 - b_0) \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ & \geq - (1 - \gamma)(b_0 + b_1 - b_0) = -(1 - \gamma)b_1 = F_\gamma(0, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $b_0 = \max_{i=0, \dots, n} \{b_i\}$.

Ta có

$$\begin{aligned} F_\gamma &= \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i - (1 - \gamma) \left(b_0 + \sum_{i=1}^n (b_i - b_0) x_i \right) \\ &= \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^n (b_0 - b_i) x_i - (1 - \gamma) b_0. \end{aligned}$$

Vì

$$\gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1 - \gamma) \sum_{i=1}^n (b_0 - b_i) x_i \geq 0,$$

suy ra $\min F_\gamma \geq -(1 - \gamma)b_0 = F_\gamma(1, 0, 0, \dots, 0)$.

Trường hợp 3: $b_1 \geq \dots \geq b_k \geq b_0 \geq b_{k+1} \geq \dots \geq b_n$.

Ta có

$$\begin{aligned} F_\gamma &= \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i - (1 - \gamma) \left(b_0 + \sum_{i=1}^n (b_i - b_0) x_i \right) \\ &= \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1 - \gamma) \sum_{i=k+1}^n (b_0 - b_i) x_i \\ &\quad - (1 - \gamma) \left(b_0 + \sum_{i=1}^k (b_i - b_0) x_i \right). \end{aligned}$$

Vì

$$\gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n a_i x_i + (1 - \gamma) \sum_{i=k+1}^n (b_0 - b_i) x_i \geq 0,$$

suy ra

$$\begin{aligned} \min F_\gamma &\geq -(1 - \gamma) \left(b_0 + \sum_{i=1}^k (b_i - b_0) x_i \right) \\ &\geq -(1 - \gamma) (b_0 + b_1 - b_0) \\ &= -(1 - \gamma) b_1 = F_\gamma(0, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

□

Hệ quả 3.4.2. Với $n = 1$, ta có mô hình $(X$ vs $(Y, A_1))$, khi đó phân bố hỏa lực tối ưu của X là:

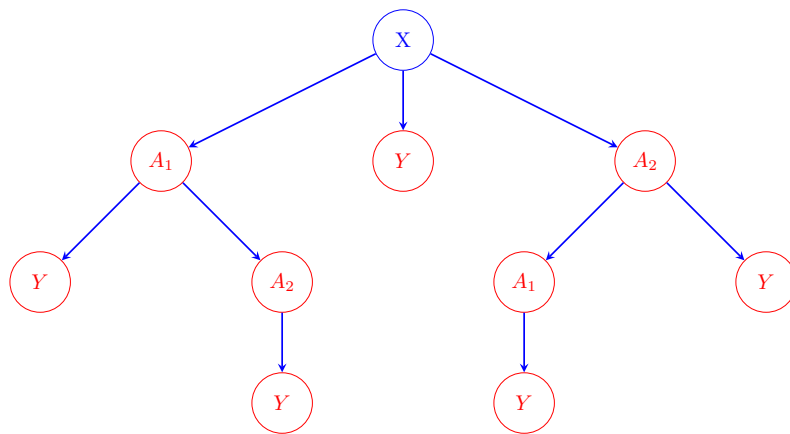
$$P^* = \begin{cases} (1, 0) & \text{nếu } b_0 \geq b_1, \\ (0, 1) & \text{nếu } b_0 \leq b_1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Kết quả này đã được trình bày trong [36].

Hệ quả 3.4.3. Với $n = 2$, ta có mô hình $(X$ vs $(Y, A_1, A_2))$, phân bố hỏa lực tối ưu của X đối với mô hình này là:

$$P^* = \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{nếu } b_0 \geq b_1 \text{ và } b_0 \geq b_2, \\ (0, 1, 0) & \text{nếu } b_1 \geq b_2 \text{ và } b_1 \geq b_0, \\ (0, 0, 1) & \text{nếu } b_2 \geq b_1 \text{ và } b_2 \geq b_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Trên thực tế, với mô hình này thì trận đánh diễn ra ba giai đoạn. Trong giai đoạn đầu, lực lượng X sẽ tập trung hỏa lực đánh một trong ba lực lượng đối lập: Y, A_1, A_2 . Ngay sau khi một trong ba lực lượng bị tiêu diệt hoàn toàn, trong giai đoạn 2, lực lượng X sẽ tập trung đánh một trong hai lực lượng còn lại. Giai đoạn cuối, lực lượng X tập trung đánh lực lượng còn lại. Tuy nhiên, tùy vào các "hệ số đe dọa", chiến thuật của lực lượng X sẽ được lựa chọn, và trận đánh có thể không cần trải qua cả ba giai đoạn. Nếu như lực lượng Y bị tiêu diệt hoàn toàn sau giai đoạn nào đó thì trận đánh sẽ kết thúc ngay vì lúc này quân số của lực lượng X không bị giảm nữa. Các trường hợp có thể xảy ra của trận đánh được mô tả trong Hình 3.21.



Hình 3.21: Các trường hợp trận đánh có thể diễn ra theo Hệ quả 3.4.3.

3.4.3 Một vài minh họa số

Trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu một vài kết quả tính toán số cho ba trường hợp của Hệ quả 3.4.3, trong đó Y bị đánh trong giai đoạn 1, giai đoạn 2 và giai đoạn 3 tương ứng. Để củng cố khẳng định của mình, đối với mỗi trường hợp, chúng tôi cũng tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và khảo sát diễn biến của các trận đánh cho đến khi giai đoạn đầu tiên của trận đánh kết thúc. Hơn nữa, chúng tôi cũng tiến hành một thử nghiệm cho trường hợp ba "hệ số đe dọa" bằng nhau.

Trường hợp 1: Y bị tấn công trong giai đoạn 1

Giả sử các tham số đầu vào như sau:

$(\alpha_d^{A_1}, \alpha_c^{A_1})$	$(\alpha_d^{A_2}, \alpha_c^{A_2})$	(r_Y, r_{A_1}, r_{A_2})
(0.15, 0.4)	(0.1, 0.3)	(0.5, 0.3, 0.2)

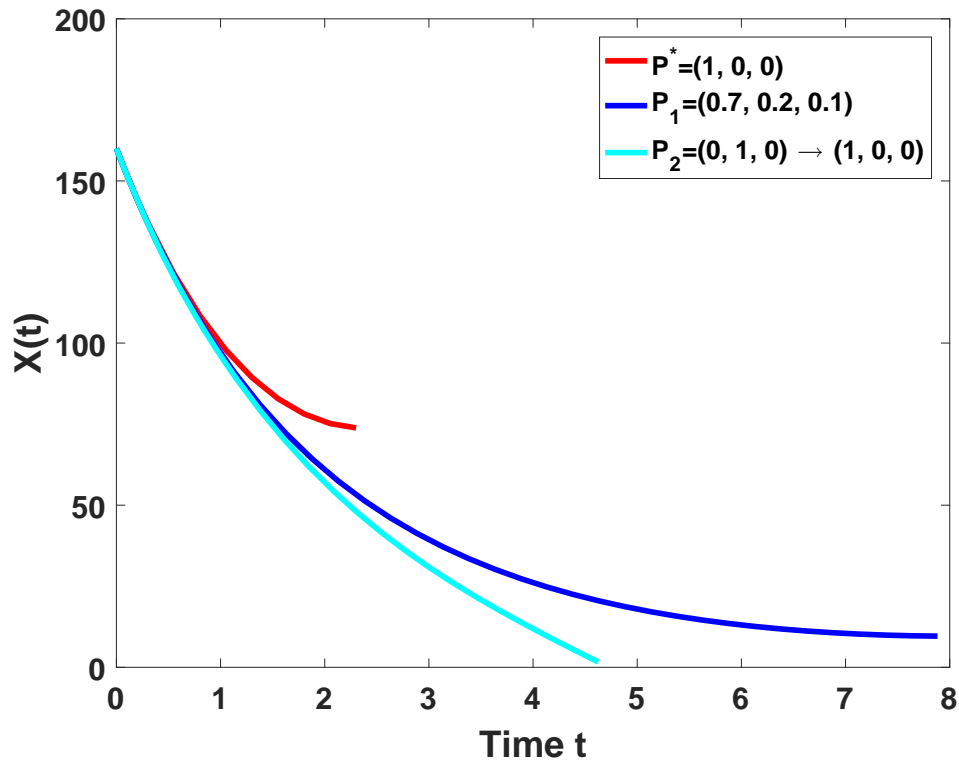
Cùng với quân số ban đầu của các bên:

$$Y(0) = 120; A_1(0) = 30; A_2(0) = 20; X(0) = 160,$$

các "hệ số đe dọa" được tính toán là:

$$b_0 = 0.35; b_1 = 0.3; b_2 = 0.24.$$

Do đó, phân bố hỏa lực tối ưu của lực lượng X trong giai đoạn 1 là $P^* = (1, 0, 0)$, nghĩa là, lực lượng X tập trung hỏa lực vào Y , mà không đánh các đơn vị hỗ trợ. Bên cạnh phân bố hỏa lực tối ưu, chúng tôi đưa ra hai phân bố hỏa lực khác để so sánh, đó là: $P_1 = (0.7, 0.2, 0.1)$ và $P_2 = (0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$. Phân bố hỏa lực P_2 được hiểu như sau: trong giai đoạn 1 lực lượng X tập trung hỏa lực đánh A_1 , sau khi A_1 bị tiêu diệt hoàn toàn, lực lượng X sẽ tập trung hỏa lực đánh Y . Kết quả tính toán được mô tả trong Hình 3.22. Theo đó, với phân bố hỏa lực tối ưu P^* thì trận đánh sẽ nhanh chóng kết thúc, và quân số còn lại của X tại mọi thời điểm luôn luôn là lớn nhất. Nếu X sử dụng phân bố hỏa lực P_1



Hình 3.22: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 1: tấn công Y trong giai đoạn 1.

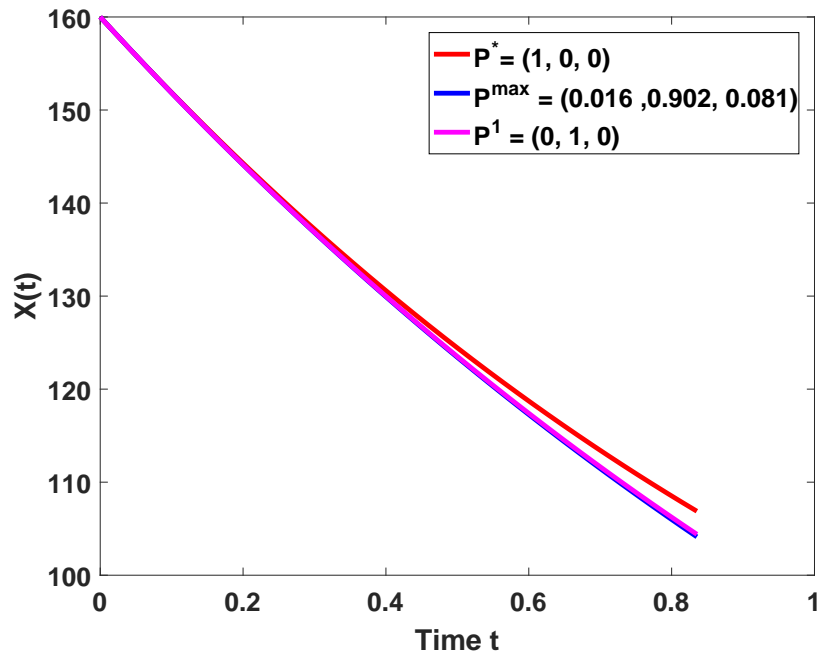
thì tuy rằng X vẫn thắng trận nhưng quân số còn lại của X không phải lớn nhất. Còn nếu X sử dụng phân bố hỏa lực P_2 thì thậm chí X còn thua trận.

Tiếp theo, chúng tôi tiến hành thử nghiệm bằng cách tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và nghiên cứu ảnh hưởng của chúng đến kết quả của trận chiến. Theo tính toán, số quân còn lại của X khi kết thúc giai đoạn một được trình bày trong bảng sau:

X	≤ 0	$(0, 20]$	$(20, 50]$	$(50, 80]$	$(80, 160]$
Số trường hợp	306	104	203	263	124

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 104 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P_1^{max} = (0.0163, 0.9021, 0.0815)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_1 \approx 0.8353$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $(1; 0; 0)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_1^{tu} \approx 2.3014$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 74. Tuy nhiên, tại thời điểm $t_1 \approx 0.8353$, số quân còn lại của X nếu sử dụng phân bố hỏa lực tối ưu là xấp xỉ 107. Để việc

minh họa được rõ ràng hơn, chúng tôi cũng mô tả diễn biến trận đánh với phân bố hỏa lực $P^1 = (0, 1, 0)$, kết quả của trận đánh với ba phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_1 được mô tả trong Hình 3.23.



Hình 3.23: Trường hợp 1: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_1]$.

Trường hợp 2: Y bị tấn công trong giai đoạn 2

Các tham số đầu vào giả sử như sau:

$(\alpha_d^{A_1}, \alpha_c^{A_1})$	$(\alpha_d^{A_2}, \alpha_c^{A_2})$	(r_Y, r_{A_1}, r_{A_2})
(0.15, 0.4)	(0.1, 0.3)	(0.5, 0.15, 0.4)

Quân số ban đầu của các bên như Trường hợp 1 và các "hệ số đe dọa" được tính toán như sau:

$$b_0 = 0.35; b_1 = 0.15; b_2 = 0.48.$$

Dựa theo các hệ số này, phân bố hỏa lực tối ưu của X trong giai đoạn 1 là $P^* = (0, 0, 1)$, tức là X sẽ tập trung hỏa lực đánh A_2 . Khi giai đoạn 1 của trận đánh kết thúc tại thời điểm $t_1 = 0.7536$, quân số còn lại của R và đơn vị hỗ trợ

A_1 không đổi, trong khi quân số còn lại của lực lượng X là $X(t_1) = 106.3$. Tốc độ tiêu diệt của Y khi không có kết nối và khi có kết nối với đầy đủ với A_1 đối với X được tính toán lại như sau:

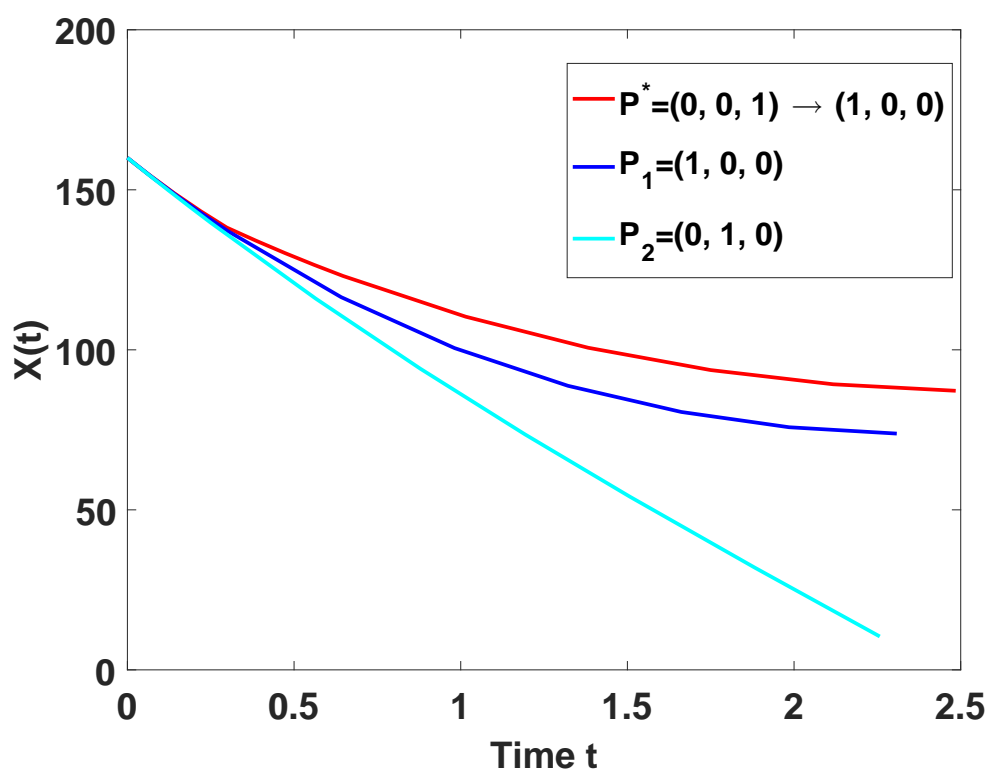
$$(\tilde{\alpha}_d^{A_1}, \tilde{\alpha}_c^{A_1}) = (0.25, 0.5).$$

Các hệ số đe dọa của Y lúc này là: $\tilde{b}_0 = \tilde{\alpha}_c^{A_1} r_Y = 0.25$, trong khi hệ số đe dọa của A_1 là không đổi $b_1 = 0.15$. Như vậy, trong giai đoạn 2 lực lượng X sẽ tập trung hỏa lực đánh Y . Sau khi Y bị tiêu diệt hoàn toàn, trận đánh sẽ kết thúc. Do đó, phân bố hỏa lực tối ưu trong Trường hợp 2 này sẽ là:

$$P^* = (0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0).$$

Để so sánh, chúng tôi đưa ra hai phân bố hỏa lực sau:

$$P_1 = (1, 0, 0) \text{ và } P_2 = (0, 1, 0).$$



Hình 3.24: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 2: tấn công Y trong giai đoạn 2.

Hình 3.24 mô tả kết quả của ba chiến thuật trên. Trong ba phân bố hỏa lực, nếu sử dụng P^* và P_1 thì lực lượng X sẽ chiến thắng, tuy nhiên quân số còn lại của lực lượng X nếu sử dụng P^* tại mọi thời điểm luôn lớn hơn. Lực lượng X sẽ bị thua cuộc nếu sử dụng phân bố hỏa lực P_2 .

Tiếp theo, chúng tôi tiến hành thử nghiệm bằng cách tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và nghiên cứu ảnh hưởng của chúng đến kết quả của trận chiến. Theo tính toán, số quân còn lại của X khi kết thúc giai đoạn một được thu thập trong bảng sau:

X	≤ 0	$(0, 40]$	$(40, 80]$	$(80, 120]$	$(120, 160]$
Số trường hợp	145	121	172	424	138

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 136 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P_2^{max} = (0.0142, 0.0667, 0.9191)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_2 \approx 0.3245$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $(0; 0; 1)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_2^{tu} \approx 0.2983$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 138. Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_2 được mô tả trong Hình 3.25.

Trường hợp 3: Y bị tấn công trong giai đoạn 3

Các tham số đầu vào được thay đổi như sau

$(\alpha_d^{A_1}, \alpha_c^{A_1})$	$(\alpha_d^{A_2}, \alpha_c^{A_2})$	(r_Y, r_{A_1}, r_{A_2})
$(0.15, 0.4)$	$(0.1, 0.3)$	$(0.5, 0.3, 0.4)$

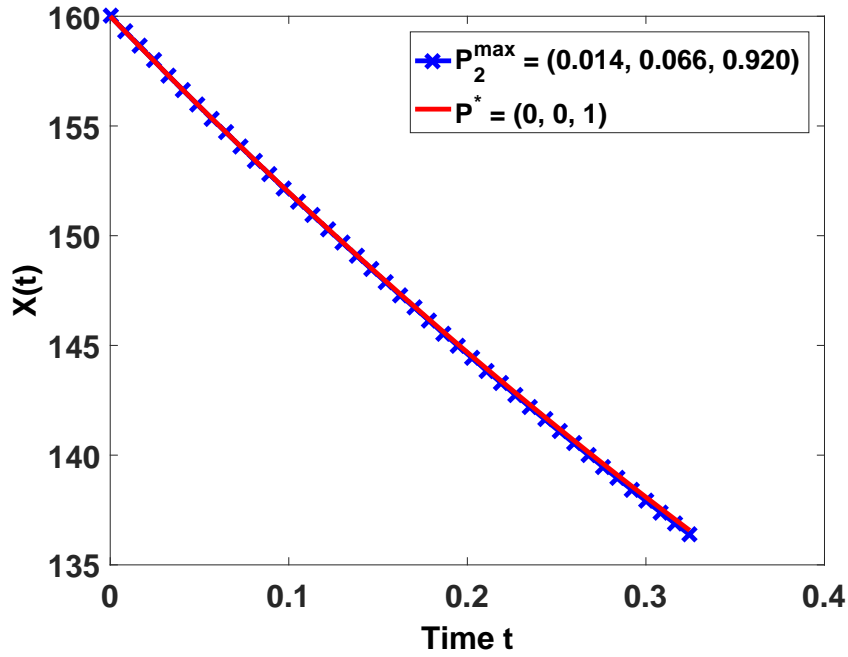
và quân số ban đầu các bên là

$$Y(0) = 120; A_1(0) = 30; A_2(0) = 20; X(0) = 200.$$

Do các "hệ số đe dọa" tính toán được là

$$b_0 = 0.35, b_1 = 0.3, b_2 = 0.48,$$

nên trong giai đoạn 1 lực lượng X sẽ tập trung hỏa lực đánh A_2 . Khi giai đoạn 1 kết thúc, quân số còn lại của lực lượng X là 182. Tốc độ tiêu diệt của Y khi



Hình 3.25: Trường hợp 2: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_2]$.

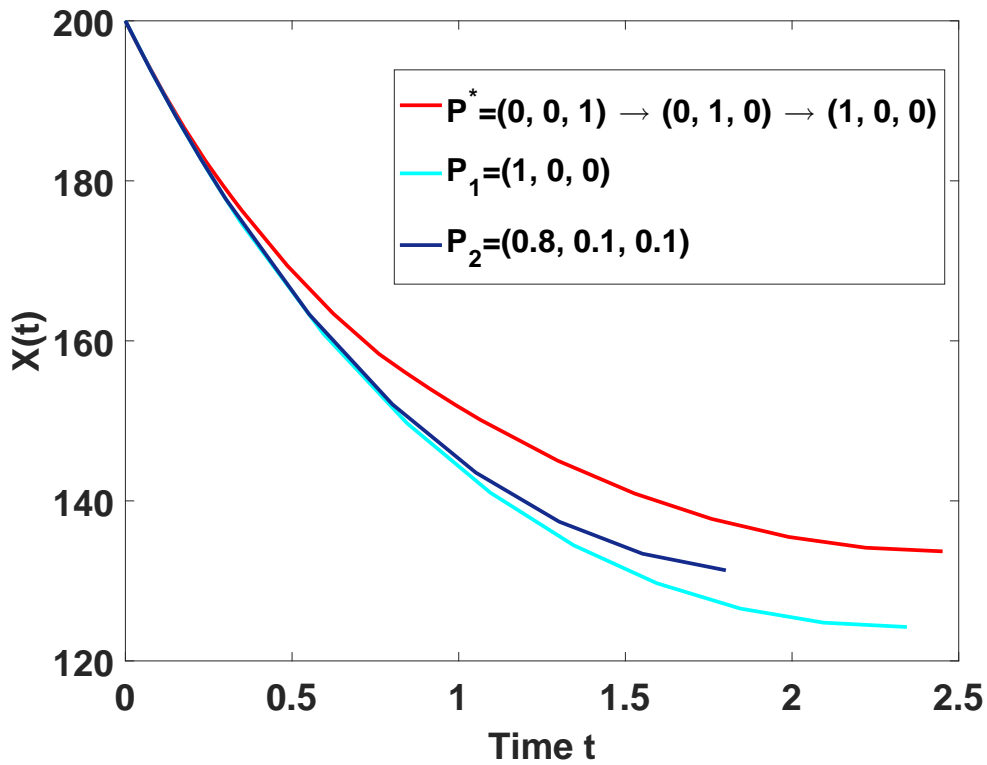
không có kết nối và khi có kết nối với đầy đủ với A_1 đối với X được tính toán lại như sau:

$$(\tilde{\alpha}_d^{A_1}, \tilde{\alpha}_c^{A_1}) = (0.25, 0.5).$$

Hệ số đe dọa của Y lúc này là $\tilde{b}_0 = \tilde{\alpha}_c^{A_1} r_Y = 0.25$, trong khi hệ số đe dọa của A_1 vẫn không đổi và bằng $b_1 = 0.3$. Do đó, trong giai đoạn 2, lực lượng X sẽ tập trung đánh A_1 . Và sau khi A_1 bị tiêu diệt hoàn toàn, thì trong giai đoạn 3 lực lượng X sẽ đánh Y . Hình 3.26 mô tả kết quả của trận đánh khi sử dụng chiến thuật phân bố hỏa lực tối ưu $P^* = (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$ và có so sánh với hai chiến thuật sử dụng các phân bố hỏa lực khác.

Chúng tôi sẽ lặp lại quy trình đã thực hiện như trong hai trường hợp tính toán số ở trên bằng tạo ra 1000 phân bố hỏa lực ngẫu nhiên và nghiên cứu kết quả của chúng. Bảng sau đây trình bày quân số còn lại của X cho các phân bố ngẫu nhiên này.

X	≤ 0	$(0, 150]$	$(150, 170]$	$(170, 180]$	$(180, 200]$
Số trường hợp	0	309	570	119	2



Hình 3.26: Mô phỏng tính toán cho Trường hợp 3: tấn công Y trong giai đoạn 3.

Quân số của X còn lại tối đa trong số 1000 trường hợp là khoảng 181 và phân bố hỏa lực tương ứng là $P_3^{max} = (0.0456, 0.0143, 0.9401)$. Đối với phân bố hỏa lực này, giai đoạn đầu của trận chiến kết thúc tại thời điểm $t_3 \approx 0.2538$. Với phân bố hỏa lực tối ưu $(0; 0; 1)$, giai đoạn đầu tiên kết thúc khi $t_3^{tu} \approx 0.2386$ và số quân còn lại của X tại thời điểm đó xấp xỉ 183. Kết quả của trận đánh với hai phân bố hỏa lực này đến thời điểm t_3 được mô tả trong Hình 3.27.

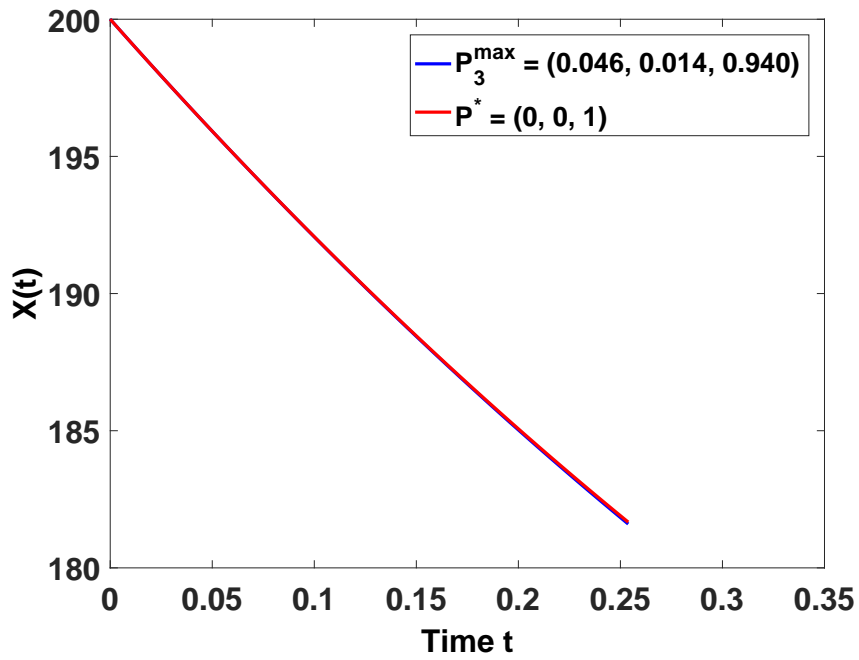
Trường hợp 4: Trường hợp ba hệ số đe dọa bằng nhau

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu một trường hợp mà ba hệ số đe dọa là bằng nhau, các tham số đầu vào được chúng tôi đưa ra như sau:

Trường hợp 4	$(\alpha_d^{A_1}, \alpha_c^{A_1})$	$(\alpha_d^{A_2}, \alpha_c^{A_2})$	(r_Y, r_{A_1}, r_{A_2})
	$(0.15, 0.4)$	$(0.1, 0.2)$	$(0.5, 0.3, 0.4)$

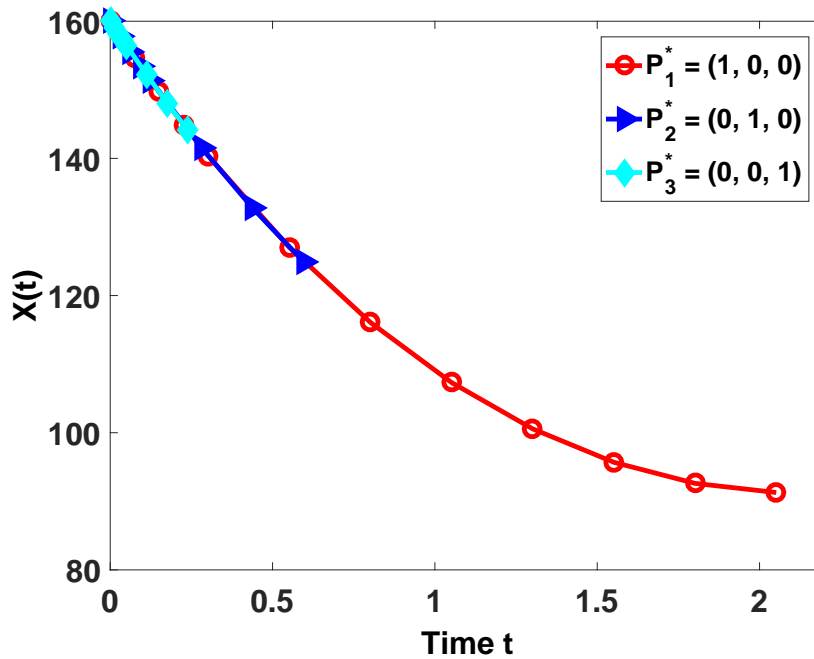
cùng với quân số tham chiến ban đầu của các bên:

$$Y(0) = 120, A_1(0) = 30, A_2(0) = 16, X(0) = 160.$$



Hình 3.27: Trường hợp 3: Quân số còn lại của X trong khoảng thời gian $[0, t_3]$.

Các hệ số đe dọa được tính toán là $b_0 = b_1 = b_2 = 0,3$. Theo Hệ quả 3.4.3, trong giai đoạn đầu tiên của trận đánh, chúng ta có thể chọn bất kỳ phân bố hỏa lực nào trong số ba phân bố hỏa lực thuộc tập $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Quân số còn lại của X cho đến khi kết thúc giai đoạn 1 của trận đánh được mô tả trong Hình 3.28.



Hình 3.28: Trường hợp 4: Quân số X còn lại cho đến khi kết thúc giai đoạn 1.

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi đã xây dựng một số mô hình trận đánh kiểu NCW, mô hình mà trong đó các thành phần tham chiến có sự hỗ trợ của các lực lượng khác. Đầu tiên, chúng tôi xây dựng mô hình kiểu NCW tổng quát (xem Phần 3.1), tiếp theo chúng tôi xây dựng các mô hình trận đánh kiểu NCW - trộn (X vs $(Y_1, A), Y_2$) (xem Phần 3.2), mô hình trận đánh kiểu NCW (X vs $((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n))$) (xem Phần 3.3), và mô hình trận đánh kiểu NCW (X vs $(Y, A_1, A_2, \dots, A_n)$) (xem Phần 3.4). Với các mô hình này, chúng tôi nghiên cứu bài toán phân bố hỏa lực tối ưu cho lực lượng X và đưa ra phương án phân bố hỏa lực tối ưu trong trường hợp các hàm hỗ trợ là tuyến tính. Ngoài ra, chúng tôi còn thực hiện một số tính toán số nhằm minh họa cho tính đúng đắn của phương án hỏa lực tối ưu và mô tả tiến trình cũng như kết quả của một số trận đánh giả định. Các kết quả nghiên cứu của chúng tôi là mở rộng so với các nghiên cứu trước đó.

Kết luận

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu một số vấn đề về mô hình toán học trong quân sự. Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- *Xây dựng một số mô hình trận đánh: Mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng, Mô hình NCW - trận $(X \text{ vs } (Y_1, A), Y_2)$, Mô hình NCW $(X \text{ vs } ((Y_1, A_1), \dots, (Y_n, A_n)))$, Mô hình NCW $(X \text{ vs } (Y, A_1, A_2, \dots, A_n))$.*
- *Đề xuất được phương án tình báo và bổ sung quân số tối ưu cho bài toán tối ưu chi phí đối với mô hình Lanchester $(n,1)$ bất đối xứng.*
- *Chứng minh được phương án phân bố hỏa lực tối ưu cho bài toán tối ưu quân số đối với 03 mô hình kiểu NCW ở trên.*
- *Xây dựng một số chương trình mô phỏng tính toán số cho các bài toán liên quan đến các mô hình trên.*

Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

1. Xêmina của Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
2. Xêmina của Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
3. Hội nghị Quốc tế về Ứng dụng Toán học lần thứ II (VIAMC 2017).
4. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XIV (4/1/2018), Học viện Kỹ thuật Quân sự.

5. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX (14-18/8/2018), Nha Trang.

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề về mô hình trận đánh trong quân sự cần được nghiên cứu trong thời gian tới.

- *Xây dựng và khảo sát mô hình Lanchester bất đối xứng (n, m) .*
- *Xây dựng mô hình trận đánh bất đối xứng gồm nhiều hơn hai bên tham chiến độc lập cũng như nghiên cứu các bài toán tối ưu chi phí, tối ưu quân số dựa trên các nghiên cứu trong [38].*
- *Nghiên cứu bài toán phân bố hỏa lực tối ưu đối với các mô hình kiểu NCW mà hàm bổ sung là phi tuyến.*

Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

[CT1] Manh D. Hy, Nam H. Nguyen, Anh N. Ta, Dinh V. Bui and My A. Vu (2017), Optimizing in an Asymmetric Lanchester Model (2,1), *Kỹ yếu Hội nghị quốc tế về ứng dụng toán học lần thứ II - VIAMC 2017*, pp 102-111.

[CT2] Manh D. Hy, My A. Vu, Nam H. Nguyen, Anh N. Ta and Dinh V. Bui (2020), Optimization in an asymmetric Lanchester (n,1) model, *Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology*, **17 (1)**, pp 117–122, Scopus.

[CT3] Nam H. Nguyen, My A. Vu, Anh N. Ta, Manh D. Hy, Tuan A. Do (2021), Optimization in a non-linear Lanchester-type model involving supply units, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **15 (2)**, pp 315–325, Scopus.

[CT4] Nam H. Nguyen, My A. Vu, Anh N. Ta, Manh D. Hy, Dinh V. Bui (2021), Optimizing fire allocation in a NCW-type model, *Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology*, Scopus, <https://doi.org/10.1177/15485129211022861>.

[CT5] My A. Vu, Nam H. Nguyen, Hanh Le T. Nguyen, Anh N. Ta, Mong H. Nguyen (2021), Optimal fire allocation in a combat model of mixed - NCW type, *Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International*, Submitted.

Bảng thuật ngữ

Tiếng Việt

mô hình Lanchester, 17

mô hình hỏa lực định hướng, 18

mô hình hỏa lực khu vực, 21

mô hình trộn, 23

mô hình Deitchman, 24

mô hình Helmbold, 24

mô hình Schreiber, 25

mô hình KKS, 25

mô hình Morse - Kimball, 26

mô hình Coleman, 27

tác chiến mạng trung tâm, 27

mô hình NCW, 28

bài toán điều khiển tối ưu, 29

nguyên lý cực đại Pontryagin, 30

phiếm hàm Hamilton, 31

bài toán tối ưu đa mục tiêu, 35

nghiệm hữu hiệu, 35

nghiệm hữu hiệu yếu, 36

phương pháp trọng số, 37

phân bố hỏa lực, 54

phân bố hỏa lực tối ưu, 54

Tiếng Anh

Lanchester model

directed fire model

area fire model

mixed model

Deitchman model

Helmbold model

Schreiber model

KKS model

Morse - Kimball model

Coleman model

Network Centric Warfare

NCW model

optimal control problem

Pontryagin Maximum Principle

functional Hamiltonian

multiobjective optimization problems

Pareto optimal

weakly Pareto optimal

Weighting method

fire allocation

optimal fire allocation

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Ngọc Ban, Trần Bá Báu, Trần Anh Tuấn (2004), *Toán học và đấu tranh vũ trang*, Nxb Học viện Kỹ thuật quân sự.
- [2] Nguyễn Công Hiến, Nguyễn Phạm Thục Anh (2006), *Mô hình hóa hệ thống và mô phỏng*, Nxb Khoa học và Kỹ thuật.
- [3] Lê Xuân Hùng, Nguyễn Hữu Mộng, Vũ Anh Tú (2011), Xây dựng, khảo sát và mô phỏng mô hình toán học chạy đua vũ trang, *Tạp chí Nghiên cứu KH và CN Quân sự*, 12(04), tr. 52-59.
- [4] Nguyễn Hữu Mộng, Vũ Anh Tú (2012), Xây dựng, khảo sát mô hình trận đánh đơn giản, *Tạp chí Khoa học Kỹ thuật, Học viện Bưu chính viễn thông*, 5, tr. 30-37.
- [5] Nguyễn Hồng Nam, Nguyễn Hữu Mộng, Trần Ngọc Tuấn (2015), Xây dựng và khảo sát mô hình toán học trận đánh có điều khiển, *Journal Of Science And Technology (ISSN 2354-0575)*, 9(07), tr. 73-76.

Tiếng Anh

- [6] Alberts D. S., Hayes R. E. (2003), *Power to the Edge: Command and Control in the Information Age*, CCRP. ISBN 1-893723-13-5.
- [7] Amelkin V. V. (1990), *Differential Equations in Applications*, Mir Publishers Moskow. ISBN 5-03-000521-8.

- [8] Barno D. W. (2007), Fighting the "other war": counterinsurgency strategy in Afghanistan, 2003-2005, *Military Review*, September - October 2007, pp. 32-44.
- [9] Benkoski S. J., Monticino M. G., Weisinger J. R. (1991), A Survey of the Search Theory Literature, *Naval Research Logistics*, 38, pp. 469–494.
- [10] Brackney H. (1959), The dynamics of military combat, *Operations Research*, 7, pp. 30-44.
- [11] Boltyanski V. G. (1958), The maximum principle in the theory of optimal processes, *C.R. Acad. Nauk SSSR*, 119, pp. 1070-1082.
- [12] Brosilow C., Joseph B. (2002), *Techniques of Model-Based Control*, Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall PTR.
- [13] Caulkins J. P., Grass D., Feichtinger G., Tragler G. (2008), Optimizing counter-terror operations: Should one fight fire with “fire” or “water”?, *Computer and Operations Research*, 35 (6), pp. 1874-1885.
- [14] Caulkins J. P., Grass D., Feichtinger G., Tragler G. (2008), Optimal control of terrorism and global reputation: A case study with novel threshold behavior, *Operations Research Letter*, 37 (6), pp. 387-391.
- [15] Cebrowski A. K. (2005), *The Implementation of Network-Centric Warfare*, Force Transformation, Office of the Secretary of Defense, 1000 Defense Pentagon, Washington DC, 20301-1000.
- [16] Coleman C. S. (1976), *Combat models*, Mathematics Association of America.
- [17] Deitchman S. J. (1962), A Lanchester model of guerilla warfare, *Operations Research*, 10, pp. 818-827.
- [18] Dunnigan J. (1992), *The Complete Wargames Handbook*, N.Y.: Quill.

- [19] Dupuy T. (1998), *Understanding War. History and Theory of Combat. 2nd ed.*, Nova Publishers.
- [20] Feichtinger G., Novak A., Wrzaczek S. (2012), Optimizing counter-terroristic operations in an asymmetric Lanchester model, *IFAC Proceedings Volumes*, 45 (25), pp. 27-32.
- [21] Fowler B. W., (1999), Towards a Formal Theory of Aggregation, *Military Operations Research*, 4, pp. 5-18.
- [22] Gamkrelidze R. V. (1957), On the theory of optimal processes in linear systems, *C.R. Acad. Nauk SSSR*, 116, pp. 9-11.
- [23] Gass S., Saaty T. (1955), The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function, *Naval Research Logistics Quarterly*, 2, pp. 39-45.
- [24] Gregory A. R., Charles W. K. (2005), *The Global Future: A Brief Introduction to World Politics*, Wadsworth, Cengage Learning, 3rd Edition, ISBN-13: 978-1133608486.
- [25] Grass D., Feichtinger G., Caulkins J. P., Tragler G., Behrens D. A. (2008) *Optimal Control of Nonlinear Processes With Applications in Drugs, Corruption, and Terror*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [26] Hammes T. X. (2006), Countering evolved insurgent networks, *Military Review*, July-August 2006, pp. 18-26.
- [27] Harbom L., Peter W. (2007), Armed Conflict, 1989–2006, *Journal of Peace Research*, 44 (5), pp. 623–634.
- [28] Helmbold R. L. (1965), A modification of lanchester's equations, *Operations Research*, 13, pp. 857-859.
- [29] Hedges C. (2003), What Every Person Should Know About War, *New York Times (July 6)*: www.nytimes.com.

- [30] Hewitt J. J., Jonathan W., Ted R. G. (2008), *Peace and Conflict, 2008*, Boulder, CO: Paradigm.
- [31] Hoffman B. (2004), Insurgency and counterinsurgency in Iraq, *National Security Research Division, June 2004*, OP-127-IPC/CMEPP, RAND.
- [32] Howes D. R., Thrall R. M. (1973), A Theory of Ideal Linear Weights for Heterogeneous Combat Forces, *Naval Research Logistics Quarterly*, 20, pp. 645-659.
- [33] Huges W. P., (1995), Two Effects of Firepower: Attrition and Suppression, *Military Operations Research*, 1, pp. 27-36.
- [34] Isbell J. R., Marlow W. H. (1956), Attrition games, *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, pp. 71-94.
- [35] Kaplan E. H., Mintz A., Mishal S., Samban C. (2005), What happened to suicide bombings in Israel? Insights from a terror stock model, *Studies in Conflict and Terrorism*, 28, pp. 225-235.
- [36] Kim D., Moon H., Shin H. (2017), Some properties of nonlinear Lanchester equations with an application in military, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87 (13), pp. 2470-2479.
- [37] Kress M., Szechtmann R. (2009), Why defeating insurgencies is hard: the effect of intelligence in counter insurgency operations - a best case scenario, *Operations Research*, 3, pp. 578-585.
- [38] Kress M., Caulkins J. P., Feichtinger G., Grass D., Seidl A. (2018), Lanchester model for three-way combat, *Eur. J. Oper. Res.*, 264, pp. 46-54.
- [39] Lanchester F. W. (1916), *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*, London, Constable and Co, Ltd.

- [40] Lawrence C. E. (2013), *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2*,
<https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf>.
- [41] Lin K. Y., Mackay L. J. (2014), The optimal policy for the one-against-many heterogeneous Lanchester model, *Operations Research Letters*, 42, pp. 473-477.
- [42] Lynn J. A. (2005), Patterns of insurgency and counterinsurgency, *Military Review*, July-August 2005, pp. 22-27.
- [43] Miettinen K. (1998), *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Springer US.
- [44] Morse P. M., Kimball G. E. (1951), *Methods of Operations Research*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- [45] Novak A. J., Feichtinger G., Leitmann G. (2016), On the Optimal Trade-off Between Fire Power and Intelligence in a Lanchester Model, *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making* , 22, pp. 217-231.
- [46] O'Hanlon M. E., Cambell J. H. (2007), Iraq index, tracking variables of reconstruction and security in postSaddam Iraq, *The Brookings Institute*.
- [47] Owens W. A. (1995), The Emerging System-of-Systems, *U.S. Naval Institute Proceedings*, May 1995, 36-9.
- [48] Park S., Shin H., Lee T., Choi B. (2010), Design of the Agent-Based Network-Centric Warfare Modeling System, *Journal of the Korea Society for Simulation*, 19 (4), pp. 271-280.
- [49] Peterson R. H. (1953), Methods of tank combat analysis, *Report of Fifth Tank Conference Held at Aberdeen*, pp. 134-150.

- [50] Phillips G. E. (2003), Liberty and order: reintegration as counter-insurgency in Colombia, *Report Number A446144, National War College, Washington DC.*
- [51] Protopopescu V., Santoro R. T., Dockery J. (1989), Combat Modeling with Partial Differential Equations, *European Journal of Operational Research*, 38, pp. 178-183.
- [52] Schreiber T. (1968), Note on the combat value of intelligence and command control systems, *Operations Research*, 12, pp. 507-510.
- [53] Snow R. N. (1948), *Contributions to Lanchester Attrition Theory*, Report No. RA-15078, Project RAND, Douglas Aircraft Company Inc., Santa Monica.
- [54] Taylor J. G. (1974), Target Selection in Lanchester Combat: Heterogeneous Forces and Time Dependent Attrition Rate Coefficients, *Naval Research Logistics Quarterly*, 21, pp. 683-704.
- [55] Taylor J. G. (1974), Lanchester-Type Models of Warfare and Optimal Control, *Naval Research Logistics Quarterly*, 21, pp. 70-106.
- [56] Taylor J. G. (1983), *Lanchester Models of Warfare*, Operations Research Society of America, Arlington, VA.
- [57] Tuck C. (2007), Northern Ireland and the British approach to counter-insurgency, *Defense and Security Analysis*, 23, pp. 165-183.
- [58] Zadeh L. (1963), Optimality and Non-Scalar- Valued Performance Criteria, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8, pp. 49-60.

Tiếng Nga

- [59] Амелькин В. В. (1987), *Дифференциальные уравнения в приложениях*, М.: Наука.

- [60] Арнольд Д. В. И. (1998), «Жесткие» и «мягкие» модели, *Математическое моделирование социальных процессов*, М.: МГУ, pp. 29–51.
- [61] Вайсборд Э. М., Жуковский В. И. (1980), *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения*, М.: Советское радио.
- [62] Вагнер Г. (1972), *Основы исследования операций*, М.: Мир.
- [63] Вентцель Е. С. (1964), *Введение в исследование операций*, М.: Советское радио.
- [64] Волгин Н. С. (1999), *Исследование операций*, Санкт-Петербург: ВМА им. Н.Г. Кузнецова.
- [65] Саати Т. (1977), *Математические модели конфликтных ситуаций*, М.: Советское радио.
- [66] Скачко П. Г., Волков Г. Т., Куликов В. М. (1968), *Планирование боевых действий и управление войсками с помощью сетевых графиков*, М.: Воениздат.
- [67] Гаррет Р., Лондон Д. (1974), *Основы анализа операций на море*, М.: Воениздат.
- [68] Морз Ф., Кимбелл Д. (1956), *Методы исследования операций*, М.: Советское радио.
- [69] Подбщ. ред. Ф.А. Матвейчука (1979), *Справочник по исследованию операций*, М.: Воениздат.
- [70] Тараканов К. В. (1974), *Математика и вооруженная борьба*, М.: Воениздат.
- [71] Ткаченко П. Н. и др. (1969), *Математические модели боевых действий*, М.: Советское радио.
- [72] Щепкин А. В. (2001), *Деловые имитационные игры в организации и управлении*, Воронеж: ВГАСУ.

- [73] Шумов В. В, Корепанов В. О. (2020), Математические модели боевых и военных действий, *Компьютерные исследования и моделирование*, 12 (1), pp. 217–242.
- [74] Чуев Ю.В., Мельников П.М. и др (1965), *Основы исследования операций в военной технике*, М.: Советское радио.
- [75] Чуев Ю. В. (1970), *Исследование операций в военном деле*, М.:Воениздат.
- [76] Чуев В. Ю., Дубограй И.В (2016), Модели двухсторонних боевых действий многочисленных группировок, *Математическое моделирование и численные методы*, 1 (9), pp. 89–104.

Phụ lục

Chương trình tính toán số (sử dụng phần mềm MATLAB)

1. Phụ lục 1: Mô hình trận đánh bất đối xứng

1.1 Các hàm liên quan mô hình

```
function y=bigai(x,c,r,alpha,delta,theta,gamma)
y=(-delta*(r+delta)*x*(1+theta*x)^2*(1+2*theta*x)-
c*gamma*(1+theta*x)*(1+2*theta*x)-gamma^2*theta)/...
(alpha*gamma*(r+delta)*(1+theta*x)*(1+2*theta*x));
end
```

```
function y = bigai2(x,r,c1,c2,delta1,delta2,
gamma1,gamma2,theta,alpha1,alpha2)
G1=det([x*(1+theta*x), gamma2; alpha2*lam12(x,r,delta1,c1,gamma1,theta)
-alpha1*lam22(x,r,delta2,c2,gamma2,theta),
-alpha1*delta2])/det([gamma1, gamma2; alpha2*delta1, -alpha1*delta2]);
y=(lam12(x,r,delta1,c1,gamma1,theta)-delta1*G1)/alpha1;
end
```

```
function y=func(x,c,r,f,alpha,delta,theta,gamma)
y=r*lam2(x,theta)+f*bigai(x,c,r,alpha,delta,theta,gamma)
+alpha*lam1(x,c,r,delta,theta,gamma)
-1/(1-bigai(x,c,r,alpha,delta,theta,gamma));
end
```

```

function y=func2(x,r,f,c1,c2,delta1,delta2,
                gamma1,gamma2,theta,alpha1,alpha2)
y=r*lam32(x,theta)
+f*bigai2(x,r,c1,c2,delta1,delta2,
          gamma1,gamma2,theta,alpha1,alpha2)
+alpha1*lam12(x,r,delta1,c1,gamma1,theta )
+alpha2*lam22(x,r,delta2,c2,gamma2,theta )-...
1/(1-bigai2(x,r,c1,c2,delta1,delta2,
            gamma1,gamma2,theta,alpha1,alpha2));
end

```

```

function ham = funcf1(x)
r=2.2;
alpha=2.23;
delta1=0.34;
delta2=0.34;
gama1=1.19;
gama2=1.19;
theta=1.86;
c1=-2.3734;
c2=-2.3734;
f=1.12;
b=x*(1+theta*x);
lamda3=-1/(x*(1+2*theta*x));
lamda1=-(c1+gama1*lamda3+gama1/b)/(r+delta1);
lamda2=-(c2+gama2*lamda3+gama2/b)/(r+delta2);
G1=(gama2*(lamda1-lamda2)+delta2*b)/(delta1*gama2+delta2*gama1);
G2=(gama1*(lamda2-lamda1)+delta1*b)/(delta1*gama2+delta2*gama1);

```



```

I=(lamda1-delta1*G1)/alpha;
mu=1-x/((gama1*G1+gama2*G2)*(1-I));
ham=r*lamda3+f*I+alpha*(lamda1+lamda2)-1/(1-I);
end

function dy=funode(t,y,alpha1,alpha2,f,r,c1,c2,
                    delta1,delta2,gamma1,gamma2,theta)
x=(-1+sqrt(1-8*theta/y(6)))/(4*theta);
dy=zeros(6,1);
dy(1)=-alpha1*y(3)-delta1*y(1)+y(4);
dy(2)=-alpha2*y(3)-delta2*y(2)+y(5);
dy(3)=-(gamma1*y(1)+gamma2*y(2))+x*(1+theta*x);
dy(4)=(r+delta1)*y(4)+c1+gamma1*y(6)+gamma1/(gamma1*y(1)+gamma2*y(2));
dy(5)=(r+delta2)*y(5)+c2+gamma2*y(6)+gamma2/(gamma1*y(1)+gamma2*y(2));
dy(6)=r*y(6)+f*y(3)+alpha1*y(4)+alpha2*y(5)-1/(1-y(3));
end

function j=jacobian2(x,lambda3,gamma1,gamma2,
                    G1,G2,f,I,r,delta1,delta2,alpha1,alpha2,theta)
gg=(gamma1*G1+gamma2*G2)^2;
j=zeros(6,6);
j(1,1)=-delta1;
j(1,3)=-alpha1;
j(1,4)=1;
j(2,2)=-delta2;
j(2,3)=-alpha2;
j(2,5)=1;
j(3,1)=-gamma1;
j(3,2)=-gamma2;

```

```

j(3,6)=- (1+2*theta*x)/(lambda3*sqrt(lambda3^2-8*theta*lambda3));
j(4,1)=-gamma1^2/gg;
j(4,2)=-gamma1*gamma2/gg;
j(4,4)=r+delta1;
j(4,6)=gamma1;
j(5,1)=-gamma1*gamma2/gg;
j(5,2)=-gamma2^2/gg;
j(5,5)=r+delta2;
j(5,6)=gamma2;
j(6,3)=f-1/(1-I)^2;
j(6,4)=alpha1;
j(6,5)=alpha2;
j(6,6)=r;
end

```

```

function y=lam1(x,c,r,delta,theta,gamma)
y=-c/(r+delta)-theta*gamma/((r+delta)*(1+2*theta*x)*(1+theta*x));
end

```

```

function y=lam2(x,theta)
y=-1/(x*(2*theta*x+1));
end

```

```

function y = lam12(x,r,delta1,c1,gamma1,theta )
y=-1/(r+delta1)*(c1+gamma1*theta/((1+2*theta*x)*(1+theta*x)));
end

```

```

function y = lam22(x,r,delta2,c2,gamma2,theta )
y=-1/(r+delta2)*(c2+gamma2*theta/((1+2*theta*x)*(1+theta*x)));

```

```
end
```

```
function y=lam32(x,theta)
```

```
y=-1/(x*(1+2*theta*x));
```

```
end
```

```
function dy=newfunode(t,y,alpha1,alpha2,miu,  
    beta1,beta2,delta1,delta2,gamma1,gamma2,theta)
```

```
x=(gamma1*y(1)+gamma2*y(2))*(1-miu)*(1-y(3));
```

```
dy=zeros(3,1);
```

```
dy(1)=-alpha1*y(3)-delta1*y(1)+beta1;
```

```
dy(2)=-alpha2*y(3)-delta2*y(2)+beta2;
```

```
dy(3)=-gamma1*y(1)+gamma2*y(2)+x*(1+theta*x);
```

```
end
```

1.2 Tìm điểm cân bằng

```
r=2.5; alpha1=2.0;alpha2=1.9;delta1=0.34;delta2=0.37;
```

```
gamma1=1.3; gamma2=1.3; c1=-2.5; c2=-2.5;f=1.2;theta=1.86;
```

```
x=fzero(@(x) func2(x,r,f,c1,c2,
```

```
    delta1,delta2,gamma1,gamma2,theta,alpha1,alpha2),1)
```

```
lambda1=lam12(x,r,delta1,c1,gamma1,theta)
```

```
lambda2=lam22(x,r,delta2,c2,gamma2,theta)
```

```
lambda3=-1/(x*(1+2*theta*x))
```

```
G1=det([x*(1+theta*x), gamma2;
```

```
    alpha2*lam12(x,r,delta1,c1,gamma1,theta)
```

```
    -alpha1*lam22(x,r,delta2,c2,gamma2,theta), -alpha1*delta2])/
```

```
    det([gamma1, gamma2; alpha2*delta1, -alpha1*delta2]))
```

```
G2=(x*(1+theta*x)-gamma1*G1)/gamma2
```

```
I=bigai2(x,r,c1,c2,delta1,delta2,gamma1,gamma2,theta,alpha1,alpha2)
```

```
miu=1-x/((1-I)*(gamma1*G1+gamma2*G2))
```

1.3 Vẽ đồ thị

```
y(1)=1.2;y(2)=0.2;y(3)=0.5;  
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-6*ones(1,3));  
beta1=lambda1; beta2=lambda2;  
[t,yy] = ode45((t,y) newfunode(t,y,alpha1,alpha2,miu,  
beta1,beta2,delta1,delta2,gamma1,gamma2,theta),[0 80],y,options);
```

2. Phụ lục 2: Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ nhất

2.1 Mô phỏng hệ phương trình vi phân

```
function f=hamvp(t,y,pai,alphaN,N0,betaX,gammaA,A0)  
f=zeros(size(y));  
if N0<=0  
f(3)=0; falpha1=alphaN(1);  
else  
f(3)=-pai(2)*betaX(2)*y(1);  
falpha1=alphaN(1) + (alphaN(2)-alphaN(1))*y(3)/N0;  
end  
if A0<=0  
attA=0; f(4)=0;  
else  
attA=1; f(4)=-pai(3)*betaX(3)*y(1);  
end  
f(1)=-y(2)*falpha1-gammaA*attA*y(4);  
f(2)=-pai(1)*betaB(1)*y(1);
```

2.2 Mô phỏng ngẫu nhiên 1000 trường hợp

2.2.1 Đếm số phương án

```

function bangso=dem_pa(Xtroop)
bangso=zeros(1,5);
for i=1:length(Xtroop)
    if Xtroop(i)<=5
        bangso(1)=bangso(1)+1;
    elseif Xtroop(i) <20
        bangso(2)=bangso(2)+1;
    elseif Xtroop(i) <50
        bangso(3)= bangso(3) +1;
    elseif Xtroop(i) < 80
        bangso(4) = bangso(4) +1;
    else bangso(5)=bangso(5)+1;
    end
end
end

```

2.2.2 Kết quả cho 1000 trường hợp

```

tspan=[0 10];
Xtroop=NaN*ones(1,1000);
fa=NaN*ones(1000,3);
for k=1:1000
    pai=rand(1,3);
    pai=pai/sum(pai);
    fa(k,:)=pai;
    [tv,yv]=ode45(@(t,y)
        hamvp(t,y,pai,alphaA,A0,betaX,gammaY2,Y20),tspan,y0);
    write=true;
    for i=1:size(yv,1)
        for j=1:size(yv,2)
            if yv(i,j)<0
                if write==true

```

```

        Xtroop(k)=yv(i-1,1);
    end
    write=false;
end
end
end
end
end
end
end

```

3. Phụ lục 3: Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ hai

3.1 Mô phỏng hệ phương trình vi phân

```

function f=hamvp(t,y,pai,alphaA1,alphaA2,A01,A02,betaX,Y01,Y02)
    f=zeros(size(y));
    if A01<=0
        f(4)=0; falpha1=alphaA1(1);
    else
        f(4)=-pai(3)*betaX(3)*y(1);
        falpha1=alphaA1(1) + (alphaA1(2)-alphaA1(1))*y(4)/A01;
    end
    if A02<=0
        f(5)=0; falpha2=alphaA2(1);
    else
        f(5)=-pai(4)*betaX(4)*y(1);
        falpha2=alphaA2(1) + (alphaA2(2)-alphaA2(1))*y(5)/A02;
    end
    if Y01<=0
        f(2)=0;
    else
        f(2)=-pai(1)*betaX(1)*y(1);
    end
end

```

```

    if Y02<=0
        f(3)=0;
    else
        f(3)=-pai(2)*betaX(2)*y(1);
    end
    f(1)=-(y(2)*falpa1+y(3)*falpa2);
end

```

3.2 Mô phỏng ngẫu nhiên 1000 trường hợp

3.2.1 Đếm số phương án

```

function bangso=dem_pa(Xtroop)
bangso=zeros(1,5);
for i=1:length(Xtroop)
    if Xtroop(i)<=5
        bangso(1)=bangso(1)+1;
    elseif Xtroop(i) <50
        bangso(2)=bangso(2)+1;
    elseif Xtroop(i) <150
        bangso(3)= bangso(3) +1;
    elseif Xtroop(i) < 250
        bangso(4) = bangso(4) +1;
    else bangso(5)=bangso(5)+1;
    end
end
end

```

3.2.2 Kết quả cho 1000 trường hợp

```

tspan=[0 10];
Xtroop=NaN*ones(1,1000);
fa=NaN*ones(1000,4);
for k=1:1000

```

```

pai=rand(1,4); pai=pai/sum(pai);
fa(k,:)=pai;
[tv,yv]=ode45(@(t,y) hamvp(t,y,pai,alphaA1,alphaA2,
                        A01,A02,betaX,Y01,Y02),tspan,y0);
write=true;
for i=1:size(yv,1)
    for j=1:size(yv,2)
        for l=1:size(yv,3)
            if yv(i,j,l)<0
                if write==true
                    Xtroop(k)=yv(i-1,1);
                end
                write=false;
            end
        end
    end
end
end
end

```

4. Phụ lục 4: Mô hình trận đánh kiểu NCW thứ ba

4.1 Mô phỏng hệ phương trình vi phân

```

function f=hamvp(t,y,pai,alphaA1,alphaA2,A01,A02,betaX,Y01,Y02)
    f=zeros(size(y));
    if A01<=0
        f(4)=0; falpha1=alphaA1(1);
    else
        f(4)=-pai(3)*betaX(3)*y(1);
        falpha1=alphaA1(1) + (alphaA1(2)-alphaA1(1))*y(4)/A01;
    end
end

```



```

if A02<=0
    f(5)=0; falpha2=alphaA2(1);
else
    f(5)=-pai(4)*betaX(4)*y(1);
    falpha2=alphaA2(1) + (alphaA2(2)-alphaA2(1))*y(5)/A02;
end
if R01<=0
    f(2)=0;
else
    f(2)=-pai(1)*betaX(1)*y(1);
end
if R02<=0
    f(3)=0;
else
    f(3)=-pai(2)*betaX(2)*y(1);
end
f(1)=-(y(2)*falpha1+y(3)*falpha2);

```

4.2 Mô phỏng ngẫu nhiên 1000 trường hợp

4.2.1 Đếm số phương án

```

function bangso=dem_pa(Xtroop)
bangso=zeros(1,5);
for i=1:length(Xtroop)
    if Xtroop(i)<=5
        bangso(1)=bangso(1)+1;
    elseif Xtroop(i) <150
        bangso(2)=bangso(2)+1;
    elseif Xtroop(i) <170
        bangso(3)= bangso(3) +1;
    elseif Xtroop(i) < 180

```

```

        bangso(4) = bangso(4) +1;
    else bangso(5)=bangso(5)+1;
    end
end
end

```

4.2.2 Kết quả cho 1000 trường hợp

```

tspan=[0 10];
Xtroop=NaN*ones(1,1000);
fa=NaN*ones(1000,3);
for k=1:1000
    pai=rand(1,3);
    pai=pai/sum(pai);
    fa(k,:)=pai;
    [tv,yv]=ode45(@(t,y)
        hamvp(t,y,pai,alphaA1,alphaA2,A01,A02,betaX),tspan,y0);
    write=true;
    for i=1:size(yv,1)
        for j=1:size(yv,2)
            if yv(i,j)<0
                if write==true
                    Xtroop(k)=yv(i-1,1);
                end
                write=false;
            end
        end
    end
end
end
end
end

```