BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

*

NGUYỄN THỊ THANH HÀ

THUẬT TOÁN GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9 46 01 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2022

Công trình được hoàn thành tại Học viện Kỹ thuật Quân sự

Người hướng dẫn khoa học:

1. TS. Bùi Văn Định

2. TS. Đào Trọng Quyết

Phản biện 1: GS. TSKH Phạm Kỳ Anh

Phản biện 2: PGS. TS Dương Anh Tuấn

Phản biện 3: PGS. TS Nguyễn Văn Quý

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng đánh giá luận án cấp Học viện theo quyết định số 110/QĐ-HV, ngày 11 tháng 01 năm 2022 của Giám đốc Học viện Kỹ thuật Quân sự, họp tại Học viện Kỹ thuật Quân sự vào hồi ... giờ ngày ... tháng ... năm 2022.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Bài toán cân bằng (Equilibrium problem), theo cách gọi của các tác giả L.D. Muu và W. Oettli [Nonlinear Anal. TMA., **18** (1992), 1159-1166], E. Blum và W. Oettli [Math. Student, **63** (1994), 127-149], xuất hiện lần đầu trong công trình của Nikaido - Isoda [Pac. J. Math., **5** (1955), 807-815] khi tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác, nó cũng được phát biểu dưới dạng bất đẳng thức minimax bởi K. Fan [Academic Press, (1972), 103-113], đó là bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ được phát biểu dưới dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C,$$

ở đó C là một tập lồi, đóng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$, $f : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm cân bằng trên C, tức là $f(x, x) = 0 \ \forall x \in C$. Ta kí hiệu tập nghiệm của $\mathrm{EP}(C, f)$ là $\mathrm{Sol}(C, f)$.

Các phương pháp giải bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ thường đòi hỏi tính lồi của song hàm theo biến thứ hai và tính đơn điệu hoặc đơn điệu suy rộng của f, tính đến nay đã có một số thuật toán khá hiệu quả để giải bài toán này, nhất là khi f là đơn điệu mạnh hoặc giả đơn điệu mạnh. Gần đây một số tác giả B.V. Dinh và D.S. Kim [J. Comput. Appl. math., **302** (2016), 537-553], J.J. Strodiot et al. [J. Global Optim., **64** (2016), 159-178] đã mở rộng thuật toán kiểu chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân không đơn điệu cho bài toán cân bằng không đơn điệu. Tuy nhiên các kết quả còn chưa nhiều. Mặt khác, nhiều bài toán cân bằng nảy sinh trong kinh tế có song hàm là không đơn điệu nên trong luận án này, chúng tôi tiếp tục tập trung nghiên cứu, xây dựng một số thuật toán mới giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu.

Cùng với việc nghiên cứu, xây dựng các phương pháp giải bài toán cân bằng, gần đây nhiều tác giả đã quan tâm đến việc tìm nghiệm chung của một họ các bài toán cân bằng. Giả sử $f_i : C \times C \to \mathbb{R},\ i \in I$, là các song hàm xác định trên C, I là tập các chỉ số hữu hạn hoặc đếm được. Bài toán tìm nghiệm chung của họ các bài toán cân bằng là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f_i(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C \text{ và } \forall i \in I.$$

Giả sử $\alpha_i \in (0, 1)$, sao cho $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$, xét bài toán cân bằng tổ hợp:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \sum_{i\in I} \alpha_i f_i(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C. \qquad CEP$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp là $\mathrm{Sol}(C, \sum_{i\in I} \alpha_i f_i)$.

Gần đây, các tác giả S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn [Fixed Point Theory Appl., (2013), 291:26] đã khẳng định rằng khi tập chỉ số I là hữu hạn, tức là $I = \{1, 2, ..., N\}$, các song hàm $f_i, i \in I$ là đơn điệu và thỏa mãn một số giả thiết cho trước thì:

$$\cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i). \tag{1}$$

Để xây dựng phương pháp giải một số bài toán liên quan đến nghiệm chung của bài toán cân bằng đơn điệu, các tác giả S.A. Khan et al. [Comput. Appl. Math., **37** (5) (2018), 6283-6307], W. Khuangsatung và A. Kangtunyakarn [Fixed Point Theory Appl., (2014), 2014:209], S. Suwannaut và A. Kangtunyakarn [Fixed Point Theory Appl., (2014), 167:26], S. Suwannaut và A. Kangtunyakarn [Thai J. Math., **14** (2016), 77-97] đã sử dụng đẳng thức (1) nhằm chuyển bài toán của họ về bài toán liên quan đến bài toán cân bằng tổ hợp. Tuy nhiên, trong luận án này, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng giả thiết về tính đơn điệu của các song hàm $f_i, i = 1, 2, ..., N$ là chưa đủ để hai tập nghiệm đó bằng nhau. Đồng thời, chúng tôi sẽ thiết lập một điều kiện đủ để đẳng thức đó là đúng.

Ngoài vấn đề tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và một họ các bài toán cân bằng, gần đây bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động cũng là một đề tài thu hút sự quan tâm, nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Một số thuật toán được đề xuất cho bài toán tìm nghiệm chung này thường được sử dụng phương pháp đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng, kết hợp với phép lặp Mann, hoặc phép lặp Halpern cho ánh xạ điểm bất động. Trong luận án này bằng cách kết hợp phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với phương pháp lặp Ishikawa, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới giải bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng với song hàm f là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, nhưng các hằng số kiểu Lipschitz có thể là không biết trước, và bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn.

2. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau:

Nội dung 1. Xây dựng phương pháp giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu.

Nội dung 2. Chứng minh với giả thiết các song hàm $f_i, i = 1, 2, ..., N$ là đơn điệu không đủ để tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng bằng nhau đồng thời thiết lập một điều kiện đủ để hai tập nghiệm đó là bằng nhau.

Nội dung 3. Xây dựng thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng với song hàm là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và tập các điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Để giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu, chúng tôi sử dụng phương pháp chiếu nhúng kết hợp với phương pháp tìm kiếm theo tia.
- Để chỉ ra tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao của họ hữu hạn các tập nghiệm các bài toán cân bằng có thể không bằng nhau với giả thiết các song hàm là đơn điệu, chúng tôi sử dụng phản ví dụ. Tiếp theo, chúng tôi sử dụng các công cụ của giải tích lồi để chứng minh hai tập nghiệm đó bằng nhau với một số giả thiết thích hợp.

- Chúng tôi sử dụng các công cụ của giải tích hàm, giải tích lồi, phương pháp điểm bất động và lý thuyết tối ưu để xây dựng thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng với song hàm là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn.

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- *Đề xuất được một số thuật toán giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu, chứng minh được sự hội tụ mạnh của thuật toán đề xuất.*
- *Chỉ ra được tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng không bằng nhau khi các song hàm là đơn điệu. Đồng thời thiết lập được điều kiện đủ để hai tập này là bằng nhau.*
- *Xây dựng được thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz khi các hằng số và tập các điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn, chứng minh sự được hội tụ mạnh của thuật toán đó đến nghiệm của bài toán ban đầu.*

6. Cấu trúc của luận án

Luận án gồm bốn chương.
Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.
Chương 2: Một số thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu.
Chương 3: Hệ bài toán cân bằng và bài toán cân bằng tổ hợp.
Chương 4: Một thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các khái niệm cũng như các kết quả bổ trợ cần thiết được sử dụng ở các chương sau.

1.1 Một số khái niệm và kết quả cơ bản

Mục này trình bày một số khái niệm cơ bản nhất liên quan đến tập lồi, hàm lồi, đạo hàm và dưới vi phân của hàm lồi và các kết quả liên quan.

1.2 Bài toán cân bằng và sự tồn tại nghiệm

Mục này dành để trình bày về bài toán cân bằng, các trường hợp riêng của bài toán cân bằng và sự tồn tại nghiệm của nó.

1.3 Bài toán điểm bất động và một số phương pháp tìm điểm bất động

Các kiến thức cơ bản về ánh xạ không giãn, ánh xạ tựa không giãn,..., bài toán điểm bất động và một số phương pháp tìm điểm bất động được trình bày trong mục này.

Chương 2

Một số thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số thuật toán giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu trong không gian Hilbert. Mỗi thuật toán là sự kết hợp của phương pháp chiếu nhúng và phương pháp tìm kiếm theo tia.

Nội dung của Chương 2 đã được công bố trong bài báo [CT1] thuộc Danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

2.1 Thuật toán đạo hàm tăng cường và phương pháp chiếu nhúng

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{H}$ là một tập lồi mở chứa tập lồi đóng C và $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng trên C. Xét bài toán cân bằng EP(C, f)

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \text{ với mọi } y \in C,$$

và bài toán liên kết với EP(C, f) được gọi là bài toán cân bằng Minty MEP(C, f)

$$\text{Tìm } y^* \in C \text{ sao cho } f(x, y^*) \leq 0 \ \forall x \in C.$$

Ta ký hiệu các tập nghiệm của bài toán EP(C, f) và MEP(C, f) tương ứng là Sol(C, f) và S_M.

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại hai thuật toán, đó là thuật toán đạo hàm tăng cường (D.Q. Tran et al. [Optimization, **57** (2008) 749-776]) và phương pháp chiếu nhúng (W. Takahashi et al. [J. Math. Anal. Appl., **341** (2008) 276-286]) mà chúng tôi kết hợp để đưa ra thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu.

2.2 Một số thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Bằng cách kết hợp thuật toán đạo hàm tăng cường và phương pháp chiếu nhúng nói trên, chúng tôi đề xuất các thuật toán mới để giải bài toán cân bằng trong không gian Hilbert thực mà không có giả thiết giả đơn điệu của song hàm.

Để đạt được mục tiêu đó, chúng tôi giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết sau.

$(\mathcal{B}_1)$ $f(x,.)$ là lồi trên Ω với mọi $x \in C$;

$(\mathcal{B}_2)$ f là liên tục yếu đồng thời trên $\Omega \times \Omega$.

Dưới đây là một số thuật toán được đề xuất để giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$.

a. Thuật toán 2.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, chọn các tham số $\eta, \mu \in (0,1)$, $0 < \underline{\rho} \le \bar{\rho}$, $\{\rho_k\} \subset [\underline{\rho},\ \bar{\rho}]$, $\gamma_k \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0,2)$, và đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm nghiệm

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 :\ y \in C\Big\}. \qquad CP(x^k)$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện *Bước 2.*

Bước 2. (Quy tắc tìm kiếm tia Armijo thứ nhất) Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k, \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \ge \frac{\mu}{2\rho_k}\|x^k - y^k\|^2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Lấy $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$ và tính $u^k = P_C(x^k - \gamma_k\sigma_k w^k)$, trong đó $\sigma_k = \frac{f(z^k,x^k)}{\|w^k\|^2}$.

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_{k+1}}(x^g),$$

với $C_{k+1} = \{x \in C_k : \|x - u^k\| \le \|x - x^k\|\}$, và quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Nhận xét 2.1. Nếu $y^k = x^k$ thì x^k là một nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$.

Định lý sau đây thiết lập sự hội tụ mạnh của dãy $\{x^k\}$ tới một nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$.

Định lý 2.1. *Giả sử rằng song hàm f thỏa mãn các giả thiết ($\mathcal{B}_1$), ($\mathcal{B}_2$). Nếu tập S_M khác rỗng, thì các dãy $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới một nghiệm x^* của bài toán* $\mathrm{EP}(C, f)$.

Thay thế quy tắc tìm kiếm tia thứ nhất (2.1) bởi một quy tắc khác, ta thu được thuật toán sau.

b. Thuật toán 2.2

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, chọn các tham số $\eta, \mu \in (0, 1)$, $0 < \underline{\rho} \le \bar{\rho}$, $\{\rho_k\} \subset [\underline{\rho},\ \bar{\rho}]$, $\gamma_k \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0, 2)$, và đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm

$$y^k = \arg\min \Big\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 :\ y \in C \Big\}. \qquad CP(x^k)$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện *Bước 2.*

Bước 2. (Quy tắc tìm kiếm tia Armijo thứ hai) Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, y^k) + \frac{\mu}{2\rho_k}\|x^k - y^k\|^2 \le 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$. Nếu $0 \in \partial_2 f(z^k, z^k)$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện *Bước 3.*

Bước 3. Chọn $w^k \in \partial_2 f(z^k, z^k)$ và tính $u^k = P_C(x^k - \gamma_k \sigma_k w^k)$, trong đó $\sigma_k = \frac{f(z^k, x^k)}{\|w^k\|^2}$.

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_{k+1}}(x^g),$$

với $C_{k+1} = \{x \in C_k : \|x - u^k\| \leq \|x - x^k\|\}$, và quay lại **Bước lặp** k với k được thay bởi $k+1$.

Nhận xét 2.2.

- Nếu $y^k = x^k$ thì x^k là một nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$;
- Nếu $0 \in \partial_2 f(z^k, z^k)$ thì z^k là một nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$.

Bằng cách lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 2.1, ta thu được định lý sau đây về sự hội tụ của Thuật toán 2.2.

Định lý 2.2. *Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết ($\mathcal{B}_1$), ($\mathcal{B}_2$). Nếu tập S_M khác rỗng, thì dãy $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh tới một nghiệm x^* của bài toán* $\mathrm{EP}(C, f)$.

Chương 3

Hệ bài toán cân bằng và bài toán cân bằng tổ hợp

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu mối liên hệ giữa tập nghiệm của hệ bài toán cân bằng với tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp. Cụ thể, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng với giả thiết các song hàm $f_i, i = 1, 2, ..., N$ là đơn điệu thì tập nghiệm của hai bài toán này có thể không bằng nhau. Tiếp theo, chúng tôi cũng thiết lập một điều kiện đủ để hai tập nghiệm này trùng nhau.

Nội dung của chương này đã được công bố trong bài báo [CT2] thuộc Danh mục công trình liên quan đến Luận án.

3.1 Mở đầu

Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$. Giả sử $f_i : C \times C \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, N}$ là các song hàm xác định trên C. Bài toán tìm nghiệm chung của một họ hữu hạn các bài toán cân bằng ký hiệu là CSEP là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f_i(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C \text{ và } i = 1, 2, ..., N,$$

hoặc tương đương,

$$\text{tìm } x^* \in \mathcal{X} := \cap_{i=1}^{N} \text{Sol}(C, f_i).$$

Với $\alpha_i \in (0, 1), i = 1, ..., N$ sao cho $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, xét song hàm tổ hợp:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x, y), \ \forall x, y \in C.$$

Bài toán cân bằng tổ hợp viết tắt là CEP là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C.$$

Ký hiệu $\mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp.

Chúng tôi nhắc lại một số giả thiết được sử dụng sau đây:

Giả thiết $\mathcal{C}$.

($\mathcal{C}_1$) $\varphi(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$;

($\mathcal{C}_2$) φ đơn điệu trên C;

($\mathcal{C}_3$) φ là nửa liên tục trên theo tia (upper hemicontinuous), tức là, với mỗi $x, y, z \in C$,

$$\limsup_{t \to 0^+} \varphi(tz + (1-t)x, y) \leq \varphi(x, y);$$

($\mathcal{C}_4$) Với mỗi $x \in C$, $\varphi(x, \cdot)$ là nửa liên tục dưới (lower semicontinuous) và lồi trên C;

($\mathcal{C}_5$) Với $r > 0$ cố định, và $z \in C$, tồn tại tập con lồi, compact khác rỗng $B \subset \mathbb{H}$ và $x \in C \cap B$, sao cho

$$\varphi(y, x) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle < 0,\ \forall y \in C \setminus\ B.$$

Dưới đây là năm phát biểu đã được trình bày trong một số bài báo có thể sẽ không đúng.

Phát biểu 3.1. (S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn [Fixed Point Theory Appl., (2013) 291:26]). *Giả sử các song hàm $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ và $\cap_{i=1}^{N}\mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$. Khi đó*

$$\cap_{i=1}^{N}\mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, \sum_{n=1}^{N} \alpha_i f_i(x, y)),$$

trong đó, $\alpha_i \in (0, 1)$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$ và $\sum_{n=1}^{N} \alpha_i = 1$.

Nếu Phát biểu 3.1 đúng thì nó cho phép chúng ta tìm các nghiệm chung của N bài toán cân bằng bằng cách giải một bài toán cân bằng tổ hợp.

Phát biểu 3.2. (S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn [Fixed Point Theory Appl., (2014) 167:26]). *Giả sử F là một ánh xạ co với hệ số co τ trên $\mathbb{H}$ và A là một toán tử tuyến tính bị chặn, dương mạnh trên $\mathbb{H}$ với hệ số $\bar{\gamma}$, $0 < \gamma < \frac{\bar{\gamma}}{\tau}$. Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, N$, giả sử $f_i : C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ với $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$. Giả sử $\{x^k\}, \{y^k\}, \{z^k\}$ là các dãy sinh bởi $x^1 \in \mathbb{H}$ và*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(z^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - z^k, z^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ y^k = \theta_k P_C(x^k) + (1 - \theta_k) z^k, \\ x^{k+1} = \delta_k \gamma F(x^k) + (I - \delta_k A) y^k, \end{cases}$$

trong đó $\{\delta_k\}, \{\theta_k\}, \{\rho_k\} \subset (0,1), 0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$. Giả sử các điều kiện $(i) - (v)$ sau là đúng.

(i) $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$ *và* $\sum_{k=0}^\infty \delta_k = \infty$;

(ii) $0 < \underline{\theta} \leq \theta_k \leq \bar{\theta} < 1$, *với* $\underline{\theta}, \bar{\theta} \in (0,1)$;

(iii) $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < 1$, *với* $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in (0,1)$;

(iv) $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$;

(v) $\sum_{i=1}^N |\delta_{k+1} - \delta_k| < \infty$, $\sum_{i=1}^\infty |\theta_{k+1} - \delta_k| < \infty$, $\sum_{i=1}^\infty |\rho_{k+1} - \rho_k| < \infty$.

Khi đó các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$, và $\{z^k\}$ hội tụ tới $q = P_{\mathcal{X}}(I - A + \gamma F)q$.

Phát biểu 3.3. (W. Khuangsatung, A. Kangtunyakarn [Fixed Point Theory Appl., (2014) 2014:209]). *Giả sử các song hàm $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ và $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$. Giả sử các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ được sinh bởi $u, x^1 \in \mathbb{H}$ và*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(y^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - y^k, y^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k u + \mu_k x^k + \delta_k y^k \end{cases}$$

trong đó $\{\lambda_k\}, \{\mu_k\}, \{\delta_k\} \subset (0,1)$ và $\lambda_k + \mu_k + \delta_k = 1$; $\{\rho_k\} \subset (\underline{\rho}, \bar{\rho}) \subset (0,1)$, $0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$. Giả sử các điều kiện $(i) - (iii)$ đúng:

(i) $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ *và* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$*;*

(ii) $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$*;*

(iii) $\sum_{i=1}^{N} |\delta_{k+1} - \delta_k| < \infty$.

Khi đó các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ *hội tụ tới* $q = P_{\mathcal{X}}(u)$.

Phát biểu 3.4. (S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn [Thai J. Math., **14** (2016) 77-97]). *Cho* F *là ánh xạ co với hệ số* τ *trên* $\mathbb{H}$ *và giả sử* $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ *thỏa mãn các giả thiết* $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$*. Với giả thiết* $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$*, giả sử các dãy* $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *được sinh bởi* $x^1 \in C$ *và*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(y^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - y^k, y^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k F(x^k) + \mu_k P_C(x^k) + \delta_k y^k \end{cases}$$

trong đó $\{\lambda_k\}, \{\mu_k\}, \{\delta_k\} \subset (0, 1)$ *sao cho* $\lambda_k + \mu_k + \delta_k = 1 \ \forall k$*;* $\{\rho_k\} \subset (\underline{\rho}, \bar{\rho}) \subset (0, 1)$*,* $0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$*. Ngoài ra, giả sử các điều kiện* $(i) - (iii)$ *đúng:*

(i) $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ *và* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$*;*

(ii) $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$*;*

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} |\rho_{k+1} - \rho_k| < \infty$.

Khi đó các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ *hội tụ tới* $q = P_{\mathcal{X}}(u)$.

Phát biểu 3.5. (S.A. Khan et al. [Comput. Appl. Math., **37**(5) (2018) 6283-6307]). *Giả sử các song hàm* $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ *thỏa mãn Giả thiết* $\mathcal{C}$ *và* $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$*. Với* $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$*, giả sử các dãy* $\{x^k\}$*,* $\{y^k\}$ *và* $\{z^k\}$ *được sinh bởi*

$$\begin{cases} y^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}) \\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(z^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - z^k, z^k - y^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k x^k + \mu_k z^k \end{cases}$$

trong đó $\{\theta_k\} \subset [0, \theta], \theta \in [0; 1]$*,* $\{\lambda_k\}, \{\mu_k\} \subset (0, 1)$ *và* $\lambda_k + \mu_k = 1$ *với mọi* k*;* $\{\rho_k\} \subset (\underline{\rho}, \bar{\rho}) \subset (0, 1)$*,* $0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$*. Giả sử rằng các điều kiện sau đúng:*

(i) $\theta_k\|x^k - x^{k-1}\| < \infty$;

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$ *và* $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$;

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} |\rho_{k+1} - \rho_k| < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \infty$.

Khi đó dãy $\{x^k\}$ *hội tụ tới* $q = P_{\mathcal{X}}(u)$.

Nhận xét 3.1.

- Mỗi Phát biểu 3.2 - 3.5 khẳng định rằng dãy $\{x^k\}$ nhận được theo các thuật toán tương ứng hội tụ tới một nghiệm của bài toán CSEP.
- Trong Hệ quả 3.1 dưới đây cho thấy các Phát biểu 3.2 - 3.5 có thể không đúng.

3.2 Mối liên hệ giữa tập nghiệm của hệ bài toán cân bằng và bài toán cân bằng tổ hợp

Trong mục này chúng tôi sẽ chỉ ra với các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$, các Phát biểu 3.1 - 3.5 có thể không đúng.

Với C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$ và $f_i, i = 1, \ldots, N$ là các song hàm xác định trên C sao cho

$$\mathcal{X} = \cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset.$$

Xét song hàm tổ hợp xác định bởi

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x, y), \forall x, y \in C,$$

trong đó, $\alpha_i \in (0, 1), i = 1, \ldots, N$ và $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

Rõ ràng, nếu $x^* \in \cap_{i=1}^{N}\mathrm{Sol}(C, f_i)$ thì $f_i(x^*, y) \geq 0$, $\forall y \in C, i = 1, 2, \ldots, N$. Do đó

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C.$$

Vì vậy $x^* \in \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x, y))$ và

$$\cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) \subset \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x, y)). \tag{3.1}$$

Định lý sau đây chứng tỏ rằng với các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ thì bao hàm thức ngược lại của (3.1) không phải luôn đúng.

Định lý 3.6. *Với mỗi số nguyên $N \geq 2$, tồn tại tập C lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{H}$, tồn tại các song hàm $f_1, f_2, \dots, f_N$ xác định trên C thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ và tồn tại các số $\alpha_i \in (0,1), i = 1, 2, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, sao cho*

$$\mathrm{Sol}\left(C, \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i\right) \not\subset \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i).$$

Từ định lý này, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 3.1. *Các Phát biểu 3.1 - 3.5 không phải luôn đúng.*

Từ Định lý 3.6 ta có thể thấy rằng với các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ khẳng định

$$\cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, f),$$

không phải luôn đúng. Vì vậy một câu hỏi tự nhiên là với điều kiện nào thì đẳng thức này đúng. Định lý sau cho ta câu trả lời với giả thiết:

$(\mathcal{C'}_2)$ φ là para-giả đơn điệu (*parapseudomonotone) trên C*.

Định lý 3.7. *Giả sử $f_i, i = 1, 2, ...$ là các song hàm thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C'}_2), (\mathcal{C}_3)$ và $(\mathcal{C}_4)$ sao cho $\cap_{i=1}^\infty \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$ và song hàm $f(x, y) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i f_i(x, y)$, trong đó $\alpha_i > 0, \forall i = 1, 2, ...$ và $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i = 1$ là xác định tốt trên C, tức là, $f(x, y) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i f_i(x, y)$ hội tụ với $\forall x, y \in C$. Khi đó*

$$\cap_{i=1}^\infty \mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, f). \tag{3.2}$$

Nhận xét 3.2.

- Định lý 3.7 vẫn đúng khi $\mathbb{H}$ là không gian Banach thực.
- Với các giả thiết $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C'}_2), (\mathcal{C}_3)$, $(\mathcal{C}_4)$ và $\cap_{i=1}^\infty \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$, song hàm f có thể không xác định tốt trên C, thậm chí song hàm f không xác định tại mọi điểm $(x, y) \in C \times C$ mà $x \neq 0$ hoặc $x \neq y$. Thật vậy, ta xét ví dụ sau:

$$f_i(x, y) = 4^i x(y - x),\ \forall x, y \in C = [0, +\infty) \text{ và } i = 1, 2, \dots$$

Khi đó có thể thấy rằng các song hàm f_i thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}'_2), (\mathcal{C}_3)$ và $(\mathcal{C}_4)$, với $\forall i \geq 1$ và $\cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Sol}(C, f_i) = \{0\}$. Tuy nhiên, với $\alpha_i = 2^{-i}$, song hàm tổ hợp $f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i x(y-x)$ là không xác định tốt trên C. Chẳng hạn: $f(1,2) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i = \infty$.

- Lấy $f_i(x,y) = 0$ với mọi $i > N$, công thức (3.2) trở thành

$$\cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, f).$$

Do đó, Phát biểu 3.1 là đúng khi giả thiết $(\mathcal{C}_2)$ được thay thế bởi giả thiết $(\mathcal{C}'_2)$.

- Các tác giả S. Suwannaut và Kangtunyakarn [Fixed Point Theory Appl., (2013) 291:26.] đã khẳng định rằng với các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ thì $f_i(\bar{x}, x^*) = 0,\ \forall i = 1, 2, ..., N$, trong đó $\bar{x} \in \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i)$ và $x^* \in \Omega$. Nhưng điều này với giả thiết $(\mathcal{C}_1)$ không nhất thiết dẫn đến $\bar{x} = x^*$. Thật vậy, trong Định lý 3.6, ta đã có:

$$\mathrm{Sol}\left(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i\right) = [0, \infty) \times [0, \infty) \ni (1,1) = \bar{x} \neq x^* = (0,0) = \Omega.$$

- Các Phát biểu 3.2 - 3.5 là đúng nếu giả thiết $(\mathcal{C}_2)$ được thay thế bởi giả thiết $(\mathcal{C}_{2bis})$:
$(\mathcal{C}_{2bis})$ φ là para-đơn điệu trên C.

- Khi bài toán cân bằng trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân thì Phát biểu 3.1 vẫn không đúng. Chẳng hạn, ta xét tập $C = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, và các ánh xạ F_1, F_2 xác định trên C, được cho bởi:

$$F_1(x) = (x_2, -x_1), F_2(x) = (-x_2, x_1).$$

Khi đó, ta nhận được

$$\langle F_1(x), y - x \rangle = x_2 y_1 - x_1 y_2 = f_1(x,y),$$

$$\langle F_2(x), y - x \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 = f_2(x,y),$$

tức là, các bài toán bất đẳng thức biến phân đó chính là các bài toán cân bằng với các song hàm f_1 và f_2 đã xét trong chứng minh Định lý 3.6.

Chương 4

Một thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động

Trong những năm gần đây, bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động và các biến thể của nó đã được nghiên cứu bởi rất nhiều nhà khoa học. Trong chương này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới tìm điểm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu và bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn trong không gian Hilbert. Thuật toán này có thể được xem như là sự kết hợp giữa phương pháp dưới đạo hàm tăng cường (subgradient extragradient) cho bài toán cân bằng và phương pháp Ishikawa cho bài toán điểm bất động. Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp sinh ra bởi thuật toán tới nghiệm chung của bài toán thu được dưới các giả thiết chính là ánh xạ điểm bất động nửa đóng (demiclosed) tại 0 và các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f có thể không biết.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trong bài báo [CT3] thuộc Danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

4.1 Mở đầu

Giả sử C là tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng trên C, $T : C \to C$ là ánh xạ tựa không giãn, với $\mathrm{Fix}(T)$ là tập các điểm bất động của ánh xạ T. Trong chương này, chúng tôi xét bài toán sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \begin{cases} f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C \\ T(x^*) = x^*. \end{cases} \tag{4.1}$$

4.2 Một thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động

Bằng cách mở rộng thuật toán dưới đạo hàm tăng cường Halpern (xem D.V. Hieu [RACSAM., **111**(3) (2017), 823-840], chúng tôi đề xuất kết hợp thuật toán dưới đạo hàm tăng cường đối với bài toán cân bằng cân bằng mà song hàm là giả đơn điệu và phương pháp lặp Ishikawa cho bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn.

Để làm được điều đó, ta giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết sau.

Giả thiết $\mathcal{D}$.

($\mathcal{D}_1$) f là liên tục yếu trên $C \times C$;

($\mathcal{D}_2$) $f(x, \cdot)$ là lồi và khả dưới vi phân trên C với mọi $x \in C$;

($\mathcal{D}_3$) f là giả đơn điệu trên C tương ứng với $\mathrm{Sol}(C, f)$;

($\mathcal{D}_4$) f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C;

($\mathcal{D}_5$) T là ánh xạ tựa không giãn sao cho $I - T$ là nửa đóng tại 0, tức là thỏa mãn tính chất: $\forall \{x^k\} \subset C$, $x^k \rightharpoonup x$, và $T(x^k) - x^k \to 0$, thì $T(x) = x$.

Dưới đây là thuật toán đề xuất cho bài toán (4.1).

Thuật toán 4.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, $\rho_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$ và chọn dãy $\{\mu_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}, \{\gamma_k\}$ sao cho $\{\mu_k\} \subset [0, 1]$, $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 1$, $\{\alpha_k\} \subset [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \subset (0, 1)$, $\{\beta_k\} \subset [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \subset (0, 1)$, $\{\gamma_k\} \subset [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] \subset (0, 1)$ và $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, \forall k$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải các bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm

$$y^k = \arg\min\left\{ f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 : \; y \in C \right\}. \qquad CP(x^k)$$

Bước 2. Chọn $w^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$ sao cho $x^k - \rho_k w^k - y^k \in N_C(y^k)$ và tính

$$z^k = \arg\min\Big\{f(y^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 : \ y \in H_k\Big\},$$

trong đó

$$H_k = \big\{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \rho_k w^k - y^k, x - y^k\rangle \le 0\big\}.$$

Bước 3. Tính

$$\begin{aligned} t^k &= \lambda_k x^g + (1 - \lambda_k) z^k, \\ u^k &= \mu_k x^k + (1 - \mu_k) T(x^k), \\ x^{k+1} &= \alpha_k u^k + \beta_k z^k + \gamma_k T(t^k). \end{aligned}$$

Đặt $\rho = f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)$ và đặt

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \min\big\{\frac{\delta}{2\rho}\big(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2\big), \ \rho_k\big\}, & \text{nếu } \ \rho > 0 \\ \rho_k, & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

và quay về Bước lặp k với k được thay bởi $k+1$.

Định lý sau cho ta sự hội tụ của Thuật toán 4.1.

Định lý 4.1. *Giả sử* $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T) \ne \emptyset$*, và dãy* $\{\lambda_k\} \subset (0, 1)$*, thỏa mãn* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$*. Khi đó với Giả thiết* $\mathcal{D}$ *các dãy* $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{z^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 4.1 hội tụ mạnh tới nghiệm* $x^* = P_{\mathcal{S}}(x^g)$.

Định lý được chứng minh dựa vào bổ đề sau đây.

Bổ đề 4.1. *Các dãy* $\{x^k\}, \{z^k\}, \{t^k\}$ *và* $\{u^k\}$ *là bị chặn.*

Khi $T \equiv I$- là ánh xạ đồng nhất của $\mathbb{H}$, ta nhận được thuật toán sau để giải bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$, trong đó các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f không đòi hỏi phải biết.

Thuật toán 4.2

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, $\rho_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$ và các dãy $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}$ sao cho $\{\alpha_k\} \subset [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \subset (0, 1)$, $\{\beta_k\} \subset [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \subset (0, 1)$, $\{\gamma_k\} \subset [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] \subset (0, 1)$ và $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, \forall k$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 :\ y \in C\Big\}. \qquad \mathrm{CP}(x^k)$$

Bước 2. Chọn $w^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$ sao cho $x^k - \rho_k w^k - y^k \in N_C(y^k)$ và tính

$$z^k = \arg\min\Big\{f(y^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 :\ y \in H_k\Big\},$$

trong đó,

$$H_k = \big\{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \rho_k w^k - y^k, x - y^k\rangle \le 0\big\}.$$

Bước 3. Tính

$$\begin{aligned} t^k &= \lambda_k x^g + (1 - \lambda_k) z^k, \\ x^{k+1} &= \alpha_k x^k + \beta_k z^k + \gamma_k t^k. \end{aligned}$$

Đặt $\rho = f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)$ và đặt

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \min\big\{\frac{\delta}{2\rho}\big(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2\big),\ \rho_k\big\}, & \text{nếu } \ \rho > 0 \\ \rho_k, & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

và quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Hệ quả sau đây khẳng định sự hội tụ mạnh của Thuật toán 4.2 được suy ra trực tiếp từ Định lý 4.1.

Hệ quả 4.1. *Giả sử* $\mathrm{Sol}(C, f) \neq \emptyset$*, dãy* $\{\lambda_k\} \subset (0, 1)$ *sao cho* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$ *và* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$*. Khi đó với các giả thiết* $(\mathcal{D}_1) - (\mathcal{D}_4)$*, các dãy* $\{x^k\}$*,* $\{y^k\}$ *và* $\{z^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 4.2 hội tụ mạnh tới nghiệm* $x^* = P_{\mathrm{Sol}(C,f)}(x^g)$*.*

Khi $f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle$ với mọi $x, y \in C$, với ánh xạ $F : C \to \mathbb{H}$, bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) sau đây:

Tìm $x^* \in C$ sao cho $\langle F(x), y - x\rangle \ge 0$, $\forall y \in C$.

Ký hiệu $\mathrm{Sol}(C, F)$ là tập nghiệm của bài toán (VIP). Khi đó, ta nhận được thuật toán tìm phần tử chung của tập nghiệm $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, F) \cap \mathrm{Fix}(T)$ của bài toán (VIP) và tập các điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn T trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ dưới đây.

Thuật toán 4.3

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, $\rho_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$ và các dãy $\{\mu_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ sao cho $\{\mu_k\} \subset [0, 1], \lim_{k\to\infty} \mu_k = 1$, $\{\alpha_k\} \subset [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \subset (0, 1)$, $\{\beta_k\} \subset [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \subset (0, 1)$, $\{\gamma_k\} \subset [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] \subset (0, 1)$ và $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1$, $\forall k$.

Bước lặp k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Có x^k thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính
$$y^k = P_C(x^k - \rho_k F(x^k)).$$

Bước 2. Lấy $w^k = x^k$ và tính $z^k = P_{H_k}(x^k - \rho_k F(y^k))$, trong đó,
$$H_k = \{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \rho_k w^k - y^k, x - y^k\rangle \le 0\}.$$

Bước 3. Tính

$$\begin{aligned} t^k &= \lambda_k x^g + (1 - \lambda_k) z^k, \\ u^k &= \mu_k x^k + (1 - \mu_k) T(x^k), \\ x^{k+1} &= \alpha_k u^k + \beta_k z^k + \gamma_k T(t^k). \end{aligned}$$

Đặt $\rho = \langle F(x^k), z^k - x^k\rangle - \langle F(y^k), z^k - y^k\rangle - \langle F(x^k), y^k - x^k\rangle$ và đặt

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \min\left\{\frac{\delta}{2\rho}\big(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2\big),\ \rho_k\right\}, & \text{nếu } \rho > 0 \\ \rho_k, & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

và quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Từ Định lý 4.1, ta có hệ quả sau về sự hội tụ mạnh của Thuật toán 4.3.

Hệ quả 4.2. *Giả sử* $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, F) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$, *dãy* $\lambda_k \in (0, 1)$, *thỏa mãn* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. *Khi đó với Giả thiết* $\mathcal{D}$ *các dãy* $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ *và* $\{z^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 4.3 hội tụ mạnh tới nghiệm* $x^* = P_{\mathcal{S}}(x^g)$.

Kết luận và kiến nghị

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu một số vấn đề về bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- *Xây dựng được hai Thuật toán 2.1 và 2.2 bằng cách kết hợp phương pháp chiếu nhúng và các quy tắc tìm kiếm tia tương ứng để giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu. Chứng minh được dãy lặp sinh bởi các thuật toán đó hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng (Định lý 2.1 và Định lý 2.2).*

- *Chứng minh được tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của họ các bài toán cân bằng là không bằng nhau khi các song hàm là đơn điệu (Định lý 3.6). Chúng tôi cũng đưa ra một điều kiện đủ để hai tập nghiệm đó bằng nhau trong cả trường hợp hữu hạn ($f_i, i = 1, 2, ..., N$) và trường hợp vô hạn ($f_i, i = 1, 2, ...$) (Định lý 3.7).*

- *Bằng cách kết hợp phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với phương pháp lặp Ishikawa, chúng tôi đã đề xuất thuật toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng $EP(C, f)$ với song hàm f là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn T (Thuật toán 4.1). Chúng tôi đã chứng minh được dãy lặp sinh bởi thuật toán hội tụ mạnh tới nghiệm chung của bài toán đang xét (Định lý 4.1).*

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, trong thời gian tới chúng tôi dự định sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

- *Xây dựng một số thuật toán không phải kiểu chiếu nhúng giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert và không gian Banach.*
- *Tiếp tục nghiên cứu mối quan hệ giữa tập nghiệm của Bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng với các giả thiết nhẹ hơn về tính para-đơn điệu, para-giả đơn điệu, đồng thời áp dụng vào một lớp bài toán liên quan đến tập nghiệm chung của một họ các bài toán cân bằng.*
- *Xây dựng thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động trong trường hợp song hàm là không đơn điệu.*

Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án

[CT1] B.V. Dinh, N.T.T. Ha, N.N. Hai, and T.T.H. Thanh (2018), Strong convergence algorithms for equilibrium problems without monotonicity, *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization,* **9** (2), pp. 139-150.

[CT2] N.T.T. Ha, T.T.H. Thanh, N.N. Hai, H.D. Manh, and B.V. Dinh (2019), A note on the combination of equilibrium problems, *Mathematical Methods of Operations Research*, **91**, pp. 311-323, (SCIE).

[CT3] H.D. Manh, N.T.T. Ha, T.T.H. Thanh, and B.V. Dinh (2020), The Ishikawa subgradient extragradient method for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, *Numerical Functional Analysis and Optimization,* **41** (9), pp. 1065–1088, (SCIE).

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

1. Xêmina của Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

2. Xêmina của Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

3. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XV (20/02/2020), Học viện Kỹ thuật Quân sự.

4. Hội thảo Tối ưu và tính toán Khoa học lần thứ 18 (20-22/8/2020), Hòa Lạc, Hà Nội.

5. Hội nghị các cựu học viên Viện Toán học - Một số vấn đề trong Toán học đương đại (11-12/9/2020), Hà Nội.