BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

NGUYỄN THỊ THANH HÀ

THUẬT TOÁN GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BỘ QUỐC PHÒNG**

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

NGUYỄN THỊ THANH HÀ

THUẬT TOÁN GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

CHUYÊN NGÀNH: **TOÁN ỨNG DỤNG**

MÃ SỐ: **9 46 01 12**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

1. TS. Bùi Văn Định

2. TS. Đào Trọng Quyết

HÀ NỘI - 2021

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, dưới sự hướng dẫn của các cán bộ trong tập thể hướng dẫn khoa học. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đều đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả, số liệu trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác. Các tài liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

NCS. Nguyễn Thị Thanh Hà

Lời cảm ơn

Bản luận án này được hoàn thành tại Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự, dưới sự hướng dẫn của TS Bùi Văn Định và TS Đào Trọng Quyết. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới hai thầy hướng dẫn. Các thầy đã luôn dành cho trò sự quan tâm, động viên, giúp đỡ rất tận tình trong suốt thời gian làm nghiên cứu sinh, đặc biệt là TS Bùi Văn Định, người đã không quản công sức, từng bước dẫn dắt, truyền cho trò niềm đam mê học tập, nghiên cứu, cùng nhiều kỹ năng, kiến thức quý báu, đồng thời luôn khích lệ trò từng bước vượt qua những khó khăn, thử thách trên bước đường học tập, nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn TS Tạ Ngọc Ánh, TS Hy Đức Mạnh, và các Thầy Cô trong Bộ môn Toán, anh chị em, đồng nghiệp trong Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự đã luôn quan tâm, tạo điều kiện và đã cho tác giả những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập.

Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám đốc, Phòng Sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Bản luận án này sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự cảm thông, chia sẻ và giúp đỡ từ những người thân trong gia đình. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới bố mẹ hai bên gia đình. Đặc biệt, xin cảm ơn mẹ, chồng và hai con yêu quý, những người đã luôn gần gũi, cảm thông và sẻ chia cùng tôi trong suốt thời gian qua. Tác giả thành kính dâng tặng món quà tinh thần này đến gia đình thân yêu với tất cả tấm lòng biết ơn, yêu thương và trân trọng nhất.

Tác giả

Mở đầu

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Thuật ngữ "cân bằng (equilibrium)" đã được sử dụng rộng rãi trong vật lý, hóa học, sinh học, kỹ thuật và kinh tế học. Nó thường đề cập đến các điều kiện hoặc trạng thái của một hệ thống trong đó tất cả các tác động cạnh tranh đều cân bằng. Chẳng hạn, trong vật lý, cân bằng cơ học là trạng thái mà trong đó tổng của tất cả các lực và mô men lên mỗi phần tử của hệ thống đều bằng không, trong khi chất lưu được cho là ở trạng thái cân bằng thủy tĩnh khi nó ở trạng thái nghỉ, hoặc khi vận tốc dòng chảy tại mỗi điểm không đổi theo thời gian. Trong hóa học, cân bằng động lực là trạng thái của một phản ứng thuận nghịch, trong đó tốc độ của phản ứng thuận bằng tốc độ của phản ứng nghịch. Trong sinh học, trạng thái cân bằng di truyền biểu thị tình trạng trong đó một kiểu gen không tiến hóa trong quần thể từ thế hệ này qua thế hệ khác. Trong kỹ thuật, cân bằng giao thông là sự phân bố ổn định dự kiến của lưu lượng trên các con đường công cộng hoặc qua các mạng máy tính, viễn thông. Hơn nữa, lý thuyết cân bằng nổi tiếng là một nhánh cơ bản của kinh tế học nghiên cứu các động lực của cung, cầu và giá cả trong một nền kinh tế trong phạm vi một trong hai thị trường (cân bằng riêng) hoặc một vài thị trường (cân bằng chung).

Sự cân bằng đặc biệt rất quan trọng trong toán học, cụ thể là trong các hệ động lực học, phương trình vi phân đạo hàm riêng, và phép tính biến phân. Sau sự đột phá của lý thuyết trò chơi và khái niệm cân bằng Nash, thuật ngữ này đã được sử dụng trong toán học trong các ngữ cảnh rộng hơn rất nhiều bao gồm cả những khía cạnh quan trọng của vận trù học và quy hoạch toán học. Nhiều bài toán liên quan đến sự cân bằng bao gồm một số trong chúng đã kể ở trên có thể được nhìn nhận trong một thể thống nhất thông qua các mô hình toán học khác nhau như: bài toán tối ưu, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu, trò chơi không hợp tác .... Hầu hết các mô hình toán học này có cùng một cấu trúc chung cơ bản, cho phép chúng ta phát biểu chúng một cách thuận tiện theo một dạng thức duy nhất. Ngược lại, nếu có nhiều mô hình cùng nằm trong một cấu trúc thống nhất sẽ cho phép chúng ta có thể thiết lập công thức chung cho cấu trúc thống nhất đó, như vậy chúng ta hoàn toàn có thể phát triển các nghiên cứu về lý thuyết cũng như thuật toán cho mô hình chung, từ đó mang lại khả năng ứng dụng rộng rãi hơn cho các mô hình riêng lẻ.

Mô hình chung cho bài toán cân bằng được nghiên cứu trong luận án này có thể phát biểu như sau:

Cho $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực, C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$, và $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng, tức là $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$. Bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \text{ với mọi } y \in C. \qquad EP(C, f)$$

Bài toán này xuất hiện lần đầu trong công trình của Nikaido - Isoda năm 1955 khi tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác trong [59], nó cũng được xét đến dưới dạng bất đẳng thức minimax vào năm 1972 bởi tác giả Ky Fan, vì thế nó còn được gọi là bất đẳng thức Ky Fan [27]. Bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ thường được sử dụng để thiết lập điểm cân bằng trong lý thuyết trò chơi, chính vì vậy, nó được gọi là *Bài toán cân bằng (Equilibrium problem)* theo cách gọi của các tác giả L.D. Muu và W. Oettli năm 1992 trong [56], E. Blum và W. Oettli năm 1994 trong [14].

Bài toán cân bằng khá đơn giản về mặt hình thức, nhưng nó bao hàm nhiều lớp bài toán quen thuộc như: Bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động Kakutani, bài toán điểm yên ngựa, mô hình cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác...(xem [12–14, 37, 56]). Bài toán cân bằng được xem là một mô hình toán học thống nhất cho nhiều lớp các bài toán quan trọng riêng lẻ. Bởi lẽ đó, nhiều kết quả đã biết của các bài toán nói trên có thể mở rộng cho bài toán cân bằng tổng quát với những điều chỉnh phù hợp, từ đó có thể đem lại nhiều ứng dụng rộng lớn. Ngược lại các kết quả nhận được cho bài toán cân bằng cũng có thể được áp dụng cho các trường hợp riêng của nó (xem [14, 46, 54, 55]...)

Các hướng nghiên cứu thường được đặt ra cho bài toán cân bằng cũng như bất đẳng thức biến phân là nghiên cứu về phương diện lý thuyết như sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, tính ổn định nghiệm đã được nhiều nhà nghiên cứu đặc biệt quan tâm, có thể kể đến các tác giả như M. Bianchi và S. Schaible trong [11], G. Bigi và các đồng tác giả trong [13], B.T. Kien, J.C. Yao, và N.D. Yen [40], I.V. Konnov [45], L.D. Muu và W. Oettli [56], N.N. Tam, J.C. Yao và N.D. Yen [72]. Trong việc nghiên cứu bài toán cân bằng, vấn đề xây dựng phương pháp giải, đánh giá tốc hội tụ của các thuật toán đóng vai trò rất quan trọng, đến nay đã có khá nhiều kết quả đạt được như của các tác giả P.K. Anh, D.V. Hieu [5], P.N. Anh và L.T.H. An [8], G. Bigi và các đồng tác giả [12], B.V. Dinh và D.S. Kim [22], B.V. Dinh và L.D. Muu [24], G. Mastroeni [54], A. Moudafi [55], M.A. Noor [60], L.D. Muu trong [62], và đã được các tác giả L.D. Muu, N.V. Hien, T.D. Quoc, N.V. Quy áp dụng vào các mô hình kinh tế trong [57, 58].

Các phương pháp giải bài toán cân bằng thông thường đòi hỏi tính đơn điệu hoặc đơn điệu suy rộng của song hàm và đã được tiến hành nghiên cứu rộng rãi bởi nhiều nhà khoa học như trong ([1, 8, 20, 24, 25, 30, 37, 49, 61, 80]). Tính đến nay đã có một số kết quả đạt được cho lớp bài toán cân bằng lồi và đơn điệu này, trong đó có thể kể đến các phương pháp hàm đánh giá (*gap function method*) trong [53], phương pháp nguyên lý bài toán phụ (*auxiliary subproblem principle method*) [54], phương pháp điểm gần kề (*proximal point method*) trong [55], phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov (*Tikhonov regularization method*) trong [25, 73], đặc biệt là các phương pháp chiếu (*projection methods*) [24], và phương pháp đạo hàm tăng cường (*extragradient method*) [8]. Gần đây một số tác giả đã xây dựng thuật toán kiểu chiếu giải các bài toán cân bằng và bất đẳng thức biến phân không đơn điệu (xem [21, 65, 85]), tuy nhiên các kết quả còn chưa nhiều.

Mặt khác, cũng vì nhiều bài toán cân bằng nảy sinh trong kinh tế có song hàm không đơn điệu, cho nên trong luận án này, chúng tôi tiếp tục tập trung nghiên cứu, xây dựng một số thuật toán mới giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu.

Cùng với việc nghiên cứu, xây dựng các phương pháp giải bài toán cân bằng, gần đây nhiều tác giả trong các bài báo [5, 6, 30, 41, 66–68, 78]... đã quan tâm đến việc tìm nghiệm chung của một họ các bài toán cân bằng, đó là bài toán sau đây.

Cho $f_i : C \times C \to \mathbb{R},\ i \in I$, là các song hàm xác định trên C, I là tập các chỉ số hữu hạn hoặc đếm được. Bài toán tìm nghiệm chung của họ các bài toán cân bằng ký hiệu là CSEP là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f_i(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C \text{ và } \forall i \in I, \qquad \mathrm{CSEP}(C, f_i)$$

Với $\alpha_i \in (0, 1)$, sao cho $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$, xét bài toán cân bằng tổ hợp, viết tắt là $\mathrm{CEP}(C, \sum_{i\in I} \alpha_i f_i(x, y))$, là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \sum_{i\in I} \alpha_i f_i(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C. \qquad \mathrm{CEP}$$

Ta ký hiệu $\mathrm{Sol}(C, \sum_{i\in I} \alpha_i f_i)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp CEP.

Nếu các tập nghiệm của hai bài toán CSEP và CEP bằng nhau, thì việc tìm nghiệm chung của họ các bài toán cân bằng có thể quy về việc tìm nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp. Trong một số trường hợp, việc giải bài toán cân bằng tổ hợp CEP ít phức tạp hơn bài toán CSEP. Gần đây, trong [66] các tác giả S. Suwannaut và A. Kangtunyakarn đã khẳng định rằng khi tập chỉ số I là hữu hạn, tức là $I = \{1, 2, \ldots, N\}$, các song hàm $f_i, i \in I$ là đơn điệu và thỏa mãn một số giả thiết cho trước thì các tập nghiệm của hai bài toán trên bằng nhau, tức là

$$\cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i). \tag{1}$$

Để xây dựng phương pháp giải một số bài toán liên quan đến nghiệm chung của bài toán cân bằng đơn điệu, nhóm các tác giả trong các bài báo [41, 42, 66–68] đã sử dụng đẳng thức (1) nhằm chuyển bài toán của họ về bài toán liên quan đến bài toán cân bằng tổ hợp. Tuy nhiên, trong luận án này, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng giả thiết về tính đơn điệu của các song hàm $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ chưa đủ để hai tập nghiệm đó bằng nhau. Đồng thời, chúng tôi sẽ thiết lập một điều kiện đủ để đẳng thức đó là đúng không những chỉ trong trường hợp các song hàm $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ hữu hạn, mà còn trong cả trường hợp vô hạn các song hàm $f_i, i = 1, 2, \ldots$.

Bên cạnh việc nghiên cứu, xây dựng các phương pháp giải bài toán cân bằng, bài toán điểm bất động cũng được rất nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu (xem [29, 34, 52]). Với C là tập lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert $\mathbb{H}$, và ánh xạ $T : C \to \mathbb{H}$, điểm $x \in C$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ T nếu $T(x) = x$. Tập các điểm bất động của ánh xạ T được ký hiệu là

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in C : \ T(x) = x\}.$$

Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ T là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } T(x^*) = x^*.$$

Việc tìm điểm bất động của ánh xạ T có một vai trò quan trọng cả về phương diện lý thuyết lẫn thực hành tính toán do phạm vi ứng dụng hết sức to lớn của nó (chẳng hạn việc giải các phương trình và bất phương trình có thể quy về việc tìm điểm bất động của một ánh xạ phù hợp). Khi $\mathbb{H}$ là một không gian Banach và T là ánh xạ co thì định lý điểm bất động Banach cho phép ta tìm được điểm bất động của ánh xạ T xuất phát từ một điểm x^0 bất kỳ. Tuy nhiên, khi T không là ánh xạ co thì định lý điểm bất động Banach có thể không còn đúng nữa. Vì vậy, có nhiều nhà toán học đã nghiên cứu, đề xuất các phương pháp lặp mới tìm điểm bất động của một số lớp ánh xạ tổng quát hơn (xem [10, 29, 34]).

Ngoài vấn đề tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và một họ các bài toán cân bằng, gần đây bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động cũng là một đề tài thu hút sự quan tâm, nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước, có thể kể đến các tác giả như P.K. Anh và D.V. Hieu [5], P.N. Anh [6, 7], N. Buong, N.D. Duong [15], L.C. Ceng và các đồng tác giả [16], B.V. Dinh và các đồng tác giả [23], T.N. Hai [2], D.V. Hieu, L.D. Muu, P.K. Anh [30], D.V. Hieu [31], A. Tada và W. Takahashi [69], W. Takahashi, M. Toyoda [71], D.V. Thong [74], L.Q. Thuy và các đồng tác giả [75], N.T.T. Thuy, P.T. Hieu [76], P.T. Vuong và các đồng tác giả [78]. Việc giải các bài toán này có ý nghĩa khoa học và thực tiễn, nhất là khả năng áp dụng nó vào các mô hình toán học mà các ràng buộc của nó có thể biểu diễn dưới dạng bài toán điểm bất động và/hoặc bài toán cân bằng, nhất là những bài toán trong xử lý tín hiệu, phân bổ tài nguyên mạng, phục hồi ảnh và mô hình cân bằng bán độc quyền Nash-Cournot trong kinh tế (xem [32, 35, 50, 82, 83]). Một số thuật toán được đề xuất cho bài toán tìm nghiệm chung này thường được sử dụng phương pháp đạo hàm tăng cường, kết hợp với phép lặp Mann, hoặc phép lặp Halpern. Các phương pháp giải bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động sử dụng thuật toán đạo hàm tăng cường thường phải giải hai bài toán tối ưu lồi mạnh trên C tại mỗi bước lặp (xem [7, 78]). Khi tập C có cấu trúc phức tạp thì việc giải các bài toán tối ưu này thường có chi phí lớn. Gần đây, để tìm phần tử chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ và tập các điểm bất động của ánh xạ κ-nửa co (κ-demicontractive), trong bài báo [31] tác giả D.V. Hieu đã đưa ra thuật toán sau đây:

Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường Halpern (Thuật toán HSEM[31])

Chọn $x^0 \in C$ và các tham số λ, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ sao cho $0 < \lambda < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$.

$0 < \alpha_k < 1$, $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$; $0 < a \leq \beta_k \leq \frac{1-\kappa}{2}$.

Bước 1. Giải hai bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\begin{cases} y^k = \arg\min\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\} \\ z^k = \arg\min\{\lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in H_k\}, \end{cases}$$

trong đó $H_k = \{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \lambda w^k - y^k, x - y^k\rangle \leq 0\}$ và $w^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$.

Bước 2. Tính $t^k = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k) z^k$,

$$x^{k+1} = \beta_k T(t^k) + (1 - \beta_k) t^k.$$

Đặt $k := k + 1$ và quay lại *Bước 1.*

Trong đó c_1, c_2 là các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f.

Tác giả đã chứng minh được nếu song hàm f là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, liên tục yếu đồng thời và lồi theo biến thứ hai, ánh xạ T là κ-nửa co và nửa đóng tại 0 sao cho tập nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$, thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán đề xuất hội tụ mạnh tới $x^* = P_{\mathcal{S}}(x^0)$.

Một ưu điểm của *Thuật toán HSEM* trong [31] là chỉ phải giải một bài toán tối ưu lồi trên C, nên thường có chi phí tính toán thấp hơn. Tuy nhiên, để thực hiện thuật toán này đòi hỏi tham số λ cần thỏa mãn điều kiện $0 < \lambda < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$, nên khi các hằng số kiểu Lipschitz khó ước lượng hoặc không biết, thì việc áp dụng thuật toán này một cách trực tiếp là khó khăn.

Chính vì vậy, trong luận án này bằng cách kết hợp phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với phương pháp lặp Ishikawa, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới giải bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng với song hàm f là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, nhưng các hằng số kiểu Lipschitz có thể là không biết và bài toán điểm bất động của ánh xạ T là tựa không giãn.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu các chủ điểm sau về bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert:

(i) Xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu.

(ii) Nghiên cứu mối quan hệ giữa tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp với giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng.

(iii) Thiết lập phương pháp tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với các mục tiêu đặt ra như trên, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau:

Nội dung 1. Xây dựng phương pháp giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu.

Nội dung 2. Chứng minh với giả thiết các song hàm $f_i, i = 1, 2, ..., N$ là đơn điệu không đủ để tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng bằng nhau. Từ đó, thiết lập điều kiện đủ để hai tập nghiệm đó bằng nhau.

Nội dung 3. Xây dựng thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng với song hàm là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và tập các điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn.

4. Phương pháp nghiên cứu

Xuất phát từ mục tiêu của đề tài nghiên cứu, cùng với các phương pháp cơ bản của giải tích hàm, giải tích lồi, phương pháp điểm bất động và lý thuyết tối ưu, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu như sau:

- Để giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu, chúng tôi sử dụng phương pháp chiếu nhúng kết hợp với phương pháp tìm kiếm theo tia.

- Để chỉ ra tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao của họ hữu hạn các tập nghiệm các bài toán cân bằng có thể không bằng nhau với giả thiết các song hàm là đơn điệu, chúng tôi sử dụng phản ví dụ. Tiếp đó, chúng tôi sử dụng các công cụ của giải tích lồi để chứng minh hai tập nghiệm đó bằng nhau với một số giả thiết thích hợp.

- Chúng tôi sử dụng các công cụ của giải tích hàm, giải tích lồi, phương pháp điểm bất động và lý thuyết tối ưu để xây dựng thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng với song hàm là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn.

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- *Đề xuất được thuật toán giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu, và chứng minh được sự hội tụ mạnh của thuật toán đề xuất, từ đó đã áp dụng thuật toán này cho một mô hình cân bằng thị trường điện bán độc quyền Nash-Cournot. Kết quả này được trình bày dựa theo bài báo [CT1].*

- *Chỉ ra được tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm các bài toán cân bằng không bằng nhau khi các song hàm là đơn điệu. Đồng thời thiết lập được điều kiện đủ để hai tập này bằng nhau. Kết quả này được trình bày dựa theo bài báo [CT2].*

- *Xây dựng được thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng* $EP(C, f)$ *với song hàm* f *là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và tập các điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn* T*, chứng minh được sự hội tụ mạnh của thuật toán đó đến nghiệm của bài toán ban đầu. Đưa ra một số ví dụ để minh họa sự hội tụ của thuật toán đề xuất. Kết quả này được trình bày dựa theo bài báo [CT3].*

Các kết quả chính của luận án được công bố trong 03 bài báo và đã được báo cáo tại:

1. Xêmina của Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

2. Xêmina của Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

3. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XV (20/02/2020), Học viện Kỹ thuật Quân sự.

4. Hội thảo Tối ưu và tính toán Khoa học lần thứ 18 (20-22/8/2020), Hòa Lạc, Hà Nội.

5. Hội nghị các cựu học viên Viện Toán học - Một số vấn đề trong Toán học đương đại (11-12/9/2020), Hà Nội.

6. Bố cục của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, luận án gồm bốn chương, cụ thể như sau:

Trong Chương 1 chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản về giải tích lồi, giải tích hàm, lý thuyết tối ưu, và phương pháp điểm bất động. Cụ thể, Phần 1.1 chúng tôi trình bày một số kết quả cơ bản về giải tích lồi. Phần 1.2 dành cho việc giới thiệu bài toán cân bằng và một số trường hợp riêng của nó, cùng với một số điều kiện về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Phần cuối cùng là Phần 1.3, chúng tôi nhắc lại bài toán điểm bất động và một số phương pháp tìm điểm bất động.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu, đề xuất một số thuật toán hội tụ mạnh cho bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert thực. Chương này được bố cục thành ba phần: Phần 2.1 dành cho việc nhắc lại một số các thuật toán hiện có để sử dụng cho các nghiên cứu tiếp theo. Phần 2.2, dựa trên những thuật toán hiện có, một số giả thiết và các bổ đề kỹ thuật cho trước, chúng tôi đề xuất và chứng minh thuật toán hội tụ mạnh đối với bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert. Phần 2.3 của chương dành để trình bày ví dụ minh họa cho thuật toán đề xuất.

Tiếp theo là Chương 3, chúng tôi tập trung nghiên cứu mối quan hệ giữa tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng. Chương này gồm có hai phần. Phần 3.1 là phần mở đầu, chúng tôi dành để chỉ ra với một số giả thiết cho trước các kết quả trong các bài báo [41, 42, 66–68] có thể không đúng. Trong Phần 3.2, chúng tôi trình bày một kết quả nghiên cứu về mối quan hệ giữa tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao của một họ các bài toán cân bằng.

Cuối cùng là Chương 4, chúng tôi tập trung cho việc nghiên cứu, đề xuất thuật toán tìm điểm chung của các tập nghiệm của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động. Cụ thể chương này gồm ba phần, Phần 4.1 là phần mở đầu dành cho việc đặt bài toán, nhắc lại một thuật toán hiện có để sử dụng cho các nghiên cứu tiếp theo. Trên cơ sở đó và với một số giả thiết, trong Phần 4.2 chúng tôi kết hợp thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kết hợp với phương pháp lặp Ishikawa để đưa ra thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng với song hàm là giả đơn điệu thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và tập các điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn. Tiếp theo chúng tôi chứng minh sự hội tụ mạnh của thuật toán và đưa ra các thuật toán hệ quả trong một số trường hợp đặc biệt. Phần cuối của chương là Phần 4.3 dành để trình bày một số ví dụ số minh họa cho thuật toán đề xuất, ví dụ cuối cùng được thực hiện trong không gian Hilbert vô hạn chiều cũng cho kết quả khá khả quan.

Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	Tập hợp các số thực mở rộng
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclide thực n chiều
$\mathbb{H}$	Không gian Hilbert thực
$\mathbb{X}$	Không gian véc tơ tô pô thực
$\langle x, y\rangle$	Tích vô hướng của hai véc tơ x và y
$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$	Chuẩn của véc tơ x
x^T	véc tơ hàng là chuyển vị của véc tơ cột x
A^{T}	Ma trận chuyển vị của ma trận A
I	Ánh xạ đồng nhất
$A \times B$	Tích Đề-Các của hai tập hợp A và B
$\min_{x\in C} f(x)$	Giá trị cực tiểu của f trên tập C
$\arg\min\{f(x)\mid x \in C\}$	Tập các điểm cực tiểu của hàm f trên C
$\operatorname{dom} f = \{x \in C : f(x) < +\infty\}$	Miền hữu hiệu của hàm số f
$\operatorname{epi} f = \{(x,\gamma) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \le \gamma\}$	Trên đồ thị của hàm số f
$\varphi'(x) = \nabla\varphi(x)$	Đạo hàm (gradient) của hàm φ tại x
$\partial\varphi(x)$	Dưới vi phân của hàm φ tại x
$\partial_2 f(x, x)$	Dưới vi phân của hàm $f(x, .)$ tại x
$x^k \to x$	Dãy x^k hội tụ mạnh tới x.
$x^k \rightharpoonup x$	Dãy x^k hội tụ yếu tới x
$\overline{\lim} = \limsup$	Giới hạn trên
$\underline{\lim} = \liminf$	Giới hạn dưới

$d_C(x)$	Khoảng cách từ x đến tập C
$P_C(x)$	Hình chiếu của x lên tập C
$N_C(x)$	Nón pháp tuyến ngoài của C tại x
$\mathrm{EP}(C, f)$	Bài toán cân bằng được xác định bởi tập C và song hàm f
$\mathrm{MEP}(C, f)$	Bài toán cân bằng Minty
CSEP	Bài toán tìm điểm chung của một họ các bài toán cân bằng
$\mathrm{CEP}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i)$	Bài toán cân bằng tổ hợp được xác định bởi tập C và tổ hợp lồi các song hàm $f_i, i = \overline{1, N}$
$\mathrm{VIP}(C, F)$	Bài toán bất đẳng thức biến phân (đơn trị) được xác định bởi tập C và ánh xạ F
$\mathrm{FP}(C, F)$	Bài toán điểm bất động được xác định bởi tập C và ánh xạ F
$\mathrm{Sol}(C, f)$	Tập nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$
S_M	Tập nghiệm của bài toán $\mathrm{MEP}(C, f)$
$\mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i)$	Tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp
$\mathrm{Sol}(C, F)$	Tập nghiệm của bài toán $\mathrm{VIP}(C, F)$
$\mathrm{Fix}(T)$	Tập các điểm bất động của ánh xạ T.
$\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T)$	Tập nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kết quả cần thiết nhất được sử dụng cho các chương tiếp theo. Chương này gồm có ba phần. Phần thứ nhất dành cho việc trình bày một số khái niệm và kết quả của giải tích lồi. Phần thứ hai chúng tôi giới thiệu bài toán cân bằng và một số trường hợp riêng, cũng như sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Những kiến thức này có thể tìm thấy trong các tài liệu [3, 4, 10–13, 27, 38, 45, 64, 77]. Phần cuối cùng của chương dành cho việc trình bày bài toán điểm bất động và một số phương pháp tìm điểm bất động. Các kiến thức về phương pháp điểm bất động có thể tham khảo trong các tài liệu [10, 28, 29, 34, 52, 86].

1.1 Một số khái niệm và kết quả cơ bản

Giả sử $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực, với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn tương ứng được xác định bởi $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\forall x \in \mathbb{H}$. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{H}$ được gọi là *hội tụ mạnh* tới $x^* \in \mathbb{H}$, ký hiệu $x \to x^*$, nếu $\|x - x^*\| \to 0$. Dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{H}$ được gọi là *hội tụ yếu* tới $x^* \in \mathbb{H}$, ký hiệu $x \rightharpoonup x^*$, nếu $\langle u, x - x^*\rangle \to 0, \forall u \in \mathbb{H}$.

Định nghĩa 1.1.1. [3]. Giả sử $\mathbb{X}$ là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$, tập $C \subset \mathbb{X}$ được gọi là:

a. *lồi* nếu với mọi $x, y \in C$ và $0 \le \lambda \le 1$ thì $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$;

b. *nón có đỉnh tại* 0 nếu $\lambda x \in C$, với mọi $x \in C$, và $\lambda \ge 0$;

c. *nón lồi* nếu nó vừa là nón có đỉnh tại 0 vừa là một tập lồi.

Mệnh đề 1.1.2. [3, 64]. *Tập hợp $C \subset \mathbb{X}$ là lồi khi và chỉ khi C chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là, C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0 \ : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \forall x^1, ..., x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \in C.$$

Các tập lồi là đóng kín đối với một số phép toán như phép giao, phép cộng, phép nhân với một số thực. Tức là, nếu C và D là hai tập lồi trong X thì $C \cap D$, $\alpha C + \beta D$ cũng là các tập lồi với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.3. [3, 64]. Giả sử C là một tập lồi, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và $x^0 \in C$. véc tơ $w \in \mathbb{H}$ được gọi là pháp tuyến của C tại $x^0 \in C$ nếu

$$\langle w, x - x^0 \rangle \leq 0, \ \forall x \in C.$$

Khi đó tập

$$N_C(x^0) = \{w \in \mathbb{H} \ : \ \langle w, x - x^0 \rangle \leq 0, \ \forall x \in C\}$$

được gọi là *nón pháp tuyến ngoài (normal cone)* của C tại x^0 và tập $-N_C(x^0)$ được gọi là *nón pháp tuyến trong* của C tại x^0.

Rõ ràng $0 \in N_C(x^0)$ và từ định nghĩa trên ta thấy $N_C(x^0)$ là một nón lồi đóng.

Định nghĩa 1.1.4. [4, 10]. Giả sử C là một tập khác rỗng (không nhất thiết lồi) trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ và véc tơ bất kỳ $x \in \mathbb{H}$, đặt

$$d_C(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|,$$

ta nói $d_C(x)$ là *khoảng cách* từ x đến C. Nếu tồn tại $x^* \in C$ sao cho

$$d_C(x) = \|x - x^*\|,$$

thì x^* được gọi là *hình chiếu* của x trên C và ký hiệu là $x^* = P_C(x)$.

Từ định nghĩa trên ta thấy hình chiếu của $x \in \mathbb{H}$ trên C là điểm thuộc C gần x nhất được xác định bởi

$$P_C(x) = \arg\min\{\|x - y\| : \ y \in C\}.$$

Nếu C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$, khi đó với mỗi $x \in \mathbb{H}$, $P_C(x)$ luôn tồn tại và là phần tử duy nhất thuộc C thỏa mãn

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|, \ \forall y \in C.$$

Chẳng hạn, nếu $C = H = \{y \in \mathbb{H} : \langle a, y\rangle + b \leq 0\}$, với $a \in \mathbb{H}$ và $b \in \mathbb{R}$, là một nửa không gian, thì ta có

$$P_H(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in H, \\ x - \frac{\langle a,x\rangle + b}{\|a\|^2} a & \text{nếu } x \notin H. \end{cases}$$

Phép chiếu trên tập lồi, đóng có một số tính chất sau.

Mệnh đề 1.1.5. ([10, Theorem 3.14, Proposition 4.8]). *Giả sử C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert $\mathbb{H}$. Khi đó*

a. hình chiếu $P_C(x)$ của x trên C luôn tồn tại và duy nhất với mọi x;

b. $z = P_C(x)$ khi và chỉ khi $x - z \in N_C(z)$, hay $\langle x - z, y - z\rangle \leq 0 \ \forall y \in C$;

c. $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle P_C(x) - P_C(y), x - y\rangle, \ \forall x, y \in \mathbb{H}$;

d. $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x - P_C(x) - y + P_C(y)\|^2, \ \forall x, y \in \mathbb{H}$.

Định nghĩa 1.1.6. [3, 77]. Giả sử $C \subset \mathbb{H}$ là một tập lồi đóng, khác rỗng và hàm số $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, khi đó ta nói

a. hàm f được gọi là *lồi (convex function)* trên C nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0; 1];$$

b. hàm f được gọi là *lồi chặt (strictly convex function)* trên C nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in C, \, x \neq y, \forall \lambda \in (0; 1);$$

c. hàm f là *lồi mạnh (strongly convex function)* trên C với hệ số $\beta > 0$ nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)\frac{\beta}{2}\|x-y\|^2, \ \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0; 1];$$

d. hàm f là *tựa lồi (quasiconvex)* trên C nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \ \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0;1];$$

e. các tập

$$\operatorname{dom} f = \{x \in C : f(x) < +\infty\},$$
$$\operatorname{epi} f = \{(x, \gamma) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \gamma\},$$

tương ứng được gọi là *miền hữu hiệu (effective domain)* và *trên đồ thị (epigraph)* của f;

g. hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được gọi là *chính thường (proper function)* nếu $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in C$ và $dom f \neq \emptyset$.

Định nghĩa 1.1.7. [77]. Giả sử hàm số $f : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó

a. f được gọi là *nửa liên tục dưới (lower semicontinuous)* tại $\bar{x} \in \mathbb{H}$ nếu $\forall \{x^k\} \subset \mathbb{H} :\ x^k \to \bar{x}$ thì

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{k \to \infty} f(x^k);$$

f được gọi là nửa liên tục dưới trên C nếu nó là nửa liên tục dưới tại mọi $x \in C$.

b. f được gọi là *nửa liên tục trên (upper semicontinuous)* tại $\bar{x} \in \mathbb{H}$ nếu $\forall \{x^k\} \subset \mathbb{H} :\ x^k \to \bar{x}$ thì

$$f(\bar{x}) \geq \limsup_{k \to \infty} f(x^k);$$

f được gọi là nửa liên tục trên trên C nếu nó là nửa liên tục trên tại mọi $x \in C$.

Hàm f được gọi là liên tục trên C nếu nó vừa nửa liên tục dưới và vừa nửa liên tục trên trên C.

Tiếp theo, ta nhắc lại khái niệm đạo hàm và dưới vi phân của một hàm lồi.

Định nghĩa 1.1.8. [3, 13]. Giả sử hàm số $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, và $x \in \mathbb{H}$. Ta nói:

a) hàm f *khả vi* tại x nếu tồn tại véc tơ $x^* \in \mathbb{H}$ sao cho

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - \langle x^*, y - x\rangle}{\|y - x\|} = 0,$$

véc tơ x^* như thế được gọi là *đạo hàm* của f tại x và được ký hiệu là $\nabla f(x)$ hoặc $f'(x)$;

b) hàm f có *đạo hàm theo hướng (directionally differentiable)* $d \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ tại x nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

ta gọi giới hạn đó là *đạo hàm theo hướng* d của f tại x và ký hiệu là $f'(x; d)$.

Định nghĩa 1.1.9. [3, 77]. Giả sử $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi chính thường, $w \in \mathbb{H}$ được gọi là *dưới đạo hàm (subgradient) của f tại x* nếu

$$f(y) \geq \langle w, y - x\rangle + f(x),\ \ \forall y \in \mathbb{H}. \tag{1.1}$$

Tập tất cả các dưới đạo hàm của f tại x được gọi là *dưới vi phân (subdifferential) của f tại x* và được ký hiệu là $\partial f(x)$. Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân tại x* nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$. Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* trên một tập nếu nó khả dưới vi phân tại mọi điểm thuộc tập đó.

Từ đó ta có các kết quả sau.

Định lý 1.1.10. [10, Theorem 16.2] *Giả sử $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, khả dưới vi phân. Khi đó*

$$x^* \in \arg\min\{f(x) :\ x \in \mathbb{H}\} \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x^*).$$

Định lý 1.1.11. [10, Proposition 26.5]. *Giả sử $C \subset \mathbb{H}$ là một tập lồi, đóng, có miền trong khác rỗng, $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên C. Khi đó x^0 là điểm cực tiểu của f trên C khi và chỉ khi*

$$0 \in \partial f(x^0) + N_C(x^0).$$

1.2 Bài toán cân bằng và sự tồn tại nghiệm

Giả sử C là tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{H}$, và hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$; hàm f như vậy được gọi là *song hàm cân bằng* (*equilibrium bifunction*). Bài toán cân bằng (hay còn được gọi là *bất đẳng thức Ky Fan* (xem [27]) là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \ \ \forall y \in C. \tag{1.2}$$

Bài toán cân bằng liên kết với (1.2) được gọi là bài toán Minty, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } y^* \in C \text{ sao cho } f(x, y^*) \leq 0, \ \ \forall x \in C. \tag{1.3}$$

Ký hiệu các bài toán (1.2), (1.3) tương ứng là EP(C, f), MEP(C, f) và các tập nghiệm của chúng lần lượt là Sol(C, f), S_M.

Bài toán cân bằng có dạng khá đơn giản, nhưng bao hàm nhiều lớp bài toán quan trọng trong kinh tế và nhiều lĩnh vực thực tiễn khác nhau như bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác ..., nó coi các bài toán này như những trường hợp riêng đặc biệt và hợp nhất chúng theo một phương pháp nghiên cứu chung rất tiện lợi. Nhiều kết quả của các bài toán nói trên có thể mở rộng cho bài toán cân bằng tổng quát với những điều chỉnh phù hợp và do vậy thu được nhiều ứng dụng rộng lớn. Nhiều nghiên cứu cũng đã chỉ ra rằng, các bài toán thực tế như tối ưu, kinh tế và kỹ thuật có thể được miêu tả thành các bài toán cân bằng tương ứng. Điều đó đã giải thích được tại sao bài toán cân bằng được rất nhiều nhà toán học quan tâm, nghiên cứu. Trong phần này, chúng tôi chỉ nhắc lại một số nét chính về khái niệm bài toán cân bằng và một số trường hợp riêng cũng như điều kiện tồn tại nghiệm của nó.

Sau đây là một số ví dụ về những bài toán quen thuộc có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng.

1.2.1 Một số trường hợp riêng của bài toán cân bằng

Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$.

a. Bài toán tối ưu

Cho hàm $\varphi : C \to \mathbb{R}$. Xét *Bài toán tối ưu*, viết tắt là (OP), là bài toán được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \varphi(x^*) \le \varphi(y),\ \forall y \in C.$$

Bằng cách đặt $f(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$ với mọi $x, y \in C$. Theo định nghĩa,

$$\varphi(x^*) \le \varphi(y),\ \forall y \in C \Leftrightarrow f(x^*, y) \ge 0,\ \forall y \in C.$$

Điều đó chứng tỏ bài toán tối ưu là một trường hợp riêng của bài toán cân bằng.

b. Bài toán bất đẳng thức biến phân

Giả sử ánh xạ $F : C \to \mathbb{H}$ là ánh xạ đơn trị. Bài toán bất đẳng thức biến phân (đơn trị), viết tắt là VIP(C, F) là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \ge 0,\ \forall y \in C.$$

Nếu đặt

$$f(x, y) := \langle F(x), y - x \rangle,\ x, y \in C,$$

thì các tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(C, F) và bài toán cân bằng EP(C, f) trùng nhau.

Tổng quát, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (*multivalued variational inequality*), viết tắt là MVIP(C, F) là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ và } u^* \in F(x^*) \text{ sao cho } \langle u^*, y - x^* \rangle \ge 0,\ \forall y \in C,$$

trong đó $F : C \to 2^{\mathbb{H}}$ là ánh xạ đa trị sao cho $F(x)$ là tập com pắc khác rỗng với mọi $x \in C$. Bài toán này cũng có thể được mô tả dưới dạng bài toán cân bằng. Thật vậy, do tập $F(x)$ com pắc với mỗi $x \in C$ nên ta có thể đặt

$$f(x, y) = \max\{\langle u, y - x \rangle :\ \ u \in F(x)\}.$$

Khi đó, nếu x^* cùng với $u^* \in F(x^*)$ là nghiệm của bài toán MVI(C, F) thì

$$f(x^*, y) = \max_{u \in F(x^*)} \langle u, y - x^* \rangle \ge \langle u^*, y - x^* \rangle \ge 0,\ \ \forall y \in C,$$

tức là x^* là nghiệm của bài toán EP(C, f).

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của bài toán EP(C, f), do tập giá trị $F(x^*)$ com pắc nên tồn tại $u^* \in F(x^*)$ sao cho

$$\langle u^*, y - x^* \rangle = \max_{u \in F(x)^*} \langle u, y - x^* \rangle = f(x^*, y) \geq 0, \ \ \forall y \in C.$$

Điều này chứng tỏ x^* với $u^* \in F(x^*)$ là nghiệm của bài toán MVIP(C, F).

c. Bài toán điểm bất động

Giả sử $F : C \to C$ là ánh xạ đơn trị. Bài toán điểm bất động thông thường viết tắt là FP(C, F) là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } x^* = F(x^*).$$

Bằng cách đặt

$$f(x, y) := \langle x - F(x), y - x \rangle, \ x, y \in C,$$

thì bài toán FP(C, F) và bài toán EP(C, f) là tương đương với nhau.

Thật vậy, nếu x^* là nghiệm của bài toán FP(C, F) thì

$$f(x^*, y) = \langle x^* - F(x^*), y - x^* \rangle = 0 \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của bài toán EP(C, f) thì

$$0 \leq f(x^*, y) = \langle x^* - F(x^*), y - x^* \rangle, \ \forall y \in C,$$

lấy $y = F(x^*)$, suy ra

$$0 \leq \langle x^* - F(x^*), F(x^*) - x^* \rangle = -\|x^* - F(x^*)\|^2.$$

Từ đó, ta có $x^* = F(x^*)$. (Theo định lí điểm bất động Brower, mọi ánh xạ liên tục từ tập com pắc vào chính nó đều có điểm bất động).

Tổng quát, bài toán điểm bất động đa trị, viết tắt là MFP(C, F) là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } x^* \in F(x^*),$$

trong đó $F : C \to 2^{\mathbb{H}}$ là ánh xạ đa trị, sao cho tập giá trị $F(x)$ là tập lồi, com pắc, khác rỗng. Bài toán này cũng có thể mô tả được dưới dạng bài toán cân bằng.

Thật vậy, do $F(x)$ là tập com pắc với mỗi $x \in C$ nên ta đặt

$$f(x,y) = \max_{u \in F(x)} \langle x-u, y-x \rangle, \ \ \forall x, y \in C.$$

Dễ thấy, nếu $x^* \in F(x^*)$ thì

$$f(x^*,y) = \max_{u \in F(x^*)} \langle x^*-u, y-x^* \rangle \geq \langle x^*-x^*, y-x^* \rangle = 0, \ \ \forall y \in C.$$

Vì vậy, x^* là nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C,f)$.

Ngược lại, giả sử x^* là nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C,f)$, tức là $f(x^*,y) \geq 0$ với mọi $y \in C$. Khi đó, lấy y là hình chiếu của x^* lên tập lồi, com pắc, khác rỗng $F(x^*)$, ta được

$$\langle x^*-y, y-x^* \rangle = \max_{u \in F(x^*)} \langle x^*-u, u-x^* \rangle.$$

Do đó

$$0 \leq f(x^*,y) = \langle x^*-y, y-x^* \rangle = -\|x^*-y\|^2.$$

Điều đó chứng tỏ $y = x^* \in F(x^*)$, vậy x^* là điểm bất động của ánh xạ F.

d. Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác

Xét một trò chơi không hợp tác gồm p người chơi. Với $I := \{1, \ldots, p\}$ là tập hữu hạn các chỉ số (tập p người chơi); tập $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ là các tập lồi, đóng, khác rỗng là tập chiến lược của người chơi thứ i ($i \in I$ và $n_i \in \mathbb{N}$), và $f_i : C := C_1 \times \ldots \times C_p \to \mathbb{R}$ tương ứng là hàm thua thiệt của người chơi thứ $i \in I$, (phụ thuộc theo tất cả các chiến lược của những người chơi khác). Với $x = (x_1, \ldots, x_p), y = (y_1, \ldots, y_p) \in C$, ta định nghĩa

$$(x[y_i])_j = \begin{cases} x_j & \text{nếu } \ j \neq i \\ y_i & \text{nếu } \ j = i \end{cases}.$$

Bài toán cân bằng Nash là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f_i(x^*) \leq f_i(x^*[y_i]), \ \forall y_i \in C_i, \forall i \in I. \qquad \text{(NEP)}$$

Điểm x^* như vậy gọi là điểm cân bằng Nash. Về ý nghĩa kinh tế, điểm cân bằng Nash nói lên rằng bất kỳ đối thủ nào chọn phương án ra khỏi điểm cân bằng trong khi các đối thủ khác vẫn giữ phương án điểm cân bằng thì đối thủ ra khỏi điểm cân bằng sẽ bị thua thiệt. Bằng cách đặt

$$f(x,y) := \sum_{i\in I}\{f_i(x[y_i]) - f_i(x)\};\ x, y \in C,$$

ta đưa được bài toán (NEP) về bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$.

1.2.2 Sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số kết quả về sự tồn tại nghiệm, tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$. Chúng tôi chỉ đề cập đến các kết quả quan trọng mà không đưa ra chứng minh các kết quả đó ở đây. Các chứng minh của các kết quả này có thể tham khảo trong các tài liệu [11, 13, 27, 38, 45].

Để thuận lợi trong việc trình bày các kết quả, ta cần một số các giả thiết của song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ như sau.

(G_1) $f(\cdot, y)$ là hàm nửa liên tục trên trên C theo biến thứ nhất với mỗi $y \in C$.

(G_2) $f(x, \cdot)$ là hàm tựa lồi trên C theo biến thứ hai với mỗi $x \in C$.

(G_3) $f(x, \cdot)$ là hàm nửa liên tục dưới trên C theo biến thứ hai với mỗi $x \in C$.

Định lý 1.2.1. [13, Theorem 2.3.4], [27, Ky Fan's Theorem]. *Giả sử $f : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện $(G_1), (G_2)$. Giả sử rằng ít nhất một trong các giả thiết sau được thỏa mãn*

i) C là tập com pắc;

ii) Tồn tại một tập con khác rỗng $W \subset C$ sao cho với mọi $x \in C \setminus W$, tồn tại $y \in W$ để $f(x, y) < 0$.

Khi đó bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ có nghiệm.

Để xét tính duy nhất nghiệm và các phương pháp tìm nghiệm của bài toán cân bằng, ta cần đến các định nghĩa sau đây về tính đơn điệu của song hàm f.

Định nghĩa 1.2.2. [11, 45]. Giả sử $C \subset \mathbb{H}$. Song hàm $f : C \times C \to \mathbb{R}$ được gọi là:

a) *đơn điệu mạnh (strongly monotone)* trên C với hằng số $\tau > 0$ nếu với mọi $x, y \in C$ ta có

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\tau \|x - y\|^2;$$

b) *đơn điệu chặt (strictly monotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x, y) + f(y, x) < 0;$$

c) *đơn điệu (monotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0;$$

d) *giả đơn điệu (pseudomonotone)* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0;$$

e) *giả đơn điệu trên C tương ứng với D (pseudomonotone on C with respect to D)* nếu

$$\forall x^* \in D, \forall y \in C, \; f(x^*, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x^*) \leq 0;$$

f) *para-đơn điệu (paramonotone)* trên C nếu f là đơn điệu trên C và

$$\{x \in \mathrm{Sol}(C, f), y \in C, f(x, y) = f(y, x) = 0\} \Rightarrow y \in \mathrm{Sol}(C, f);$$

g) *para-giả đơn điệu (parapseudomonotone)* trên C nếu f là giả đơn điệu trên C và

$$\{x \in \mathrm{Sol}(C, f), y \in C, f(x, y) = f(y, x) = 0\} \Rightarrow y \in \mathrm{Sol}(C, f);$$

h) *thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz* trên C nếu tồn tại các hằng số $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$, và với mọi $x, y, z \in C$, ta có

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2.$$

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e, f) \Rightarrow g), f) \Rightarrow c) \text{ và } g) \Rightarrow d).$$

Nếu $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle$, với ánh xạ $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Khi đó các khái niệm về tính đơn điệu của song hàm f trở thành các khái niệm về tính đơn điệu tương ứng của ánh xạ F. Hơn nữa, nếu ánh xạ F là Lipschitz với hằng số $L > 0$ trên C, tức là, $\|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\|$, $\forall x, y \in C$, thì f cũng thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C (xem [54, 62]), chẳng hạn, với các hằng số $c_1 = \frac{L}{2\epsilon}$, $c_2 = \frac{L\epsilon}{2}$, với mọi $\epsilon > 0$.

Định lý 1.2.3. ([11, Proposition 4.2], [45, Proposition 2.1.16]). *Giả sử $f : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm cân bằng.*

i) Nếu f là đơn điệu chặt thì bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ *có nhiều nhất một nghiệm.*

ii) Nếu $f(x, \cdot)$ là hàm lồi với mỗi $x \in C$, f thỏa mãn các giả thiết (G_1) và (G_3) và là hàm đơn điệu mạnh trên C, thì bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ *có nghiệm duy nhất.*

1.3 Bài toán điểm bất động và một số phương pháp tìm điểm bất động

Trước tiên ta nhắc lại khái niệm điểm bất động, tập điểm bất động của một ánh xạ, và các khái niệm cơ bản của ánh xạ T. Các kiến thức trong mục này được trích dẫn chủ yếu từ tài liệu [10, 28, 29, 34, 52, 86].

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$. Ta gọi điểm $x \in C$ là điểm bất động của ánh xạ $T : C \to \mathbb{H}$ nếu $T(x) = x$.

Tập các điểm bất động của ánh xạ T được ký hiệu là

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in C \,|\, T(x) = x\}.$$

Định nghĩa 1.3.2. [10]. Giả sử C là tập lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert $\mathbb{H}$ và ánh xạ $T : C \to \mathbb{H}$. Khi đó ánh xạ T được gọi là:

a) ánh xạ *co* trên C nếu với hằng số $0 < \tau < 1$ ta có

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \tau\|x - y\|, \ \ \forall x, y \in C;$$

b) ánh xạ *không giãn (nonexpansive)* trên C nếu

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \ \ \forall x, y \in C;$$

c) ánh xạ *Lipschitz* trên C với hằng số $L > 0$ nếu

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|, \ \ \forall x, y \in C;$$

d) ánh xạ *tựa không giãn (quasinonexpansive)* trên C nếu $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ và

$$\|T(x) - y\| \leq \|x - y\|, \ \ \forall x \in C,\ y \in \mathrm{Fix}(T);$$

e) ánh xạ *giả co (pseudocontractive)* trên C nếu

$$\|T(x) - T(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \ \ \forall x, y \in C;$$

f) ánh xạ *κ-nửa co (κ-demicontractive)* nếu $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ và tồn tại hằng số $\kappa \in [0, 1)$ sao cho

$$\|T(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \kappa\|x - T(x)\|^2, \ \ \forall x \in C, y \in \mathrm{Fix}(T).$$

Từ định nghĩa trên ta có

$$a) \Rightarrow b \Rightarrow c),\ b) \Rightarrow d),\ b) \Rightarrow e),\ d) \Rightarrow f).$$

Giả sử $T : C \to C$ là một ánh xạ (đơn trị). Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ T là bài toán: Tìm $x^* \in C$ sao cho $T(x^*) = x^*$.

Nhiều bài toán xuất hiện trong các lĩnh vực Giải tích và Đại số cũng được đưa về bài toán tìm điểm bất động, nhưng không có thuật toán tổng quát để tìm điểm bất động của ánh xạ T bất kì. Để tìm điểm bất động của ánh xạ T ta phải phân loại và sử dụng cấu trúc của nó. Cụ thể là:

- Nếu T là ánh xạ co, ta có định lý ánh xạ co của Banach sau đây.

Định lý 1.3.3. (Định lý Banach)[86, Theorem 1.A]. *Giả sử* (X, d) *là một không gian metric đầy đủ,* C *là tập đóng, khác rỗng của* X *và ánh xạ* $T : C \to C$ *là ánh xạ co. Khi đó* T *có một điểm bất động duy nhất* $x^* \in X$*. Ngoài ra với mọi* $x^0 \in C$ *và dãy* $\{x^n\}$ *xác định bởi* $x^n = T(x^{n-1})$, $n \geq 1$ *thì* $x^n \to x^*$ *khi* $n \to \infty$.

- Nếu T không phải là ánh xạ co, chẳng hạn T là ánh xạ không giãn thì định lý Banach có thể không còn đúng nữa.

Ví dụ 1.3.4. Xét phép tịnh tiến T trong không gian $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, được xác định bởi:

$$T(x) = x + u, \text{ với } 0 \neq u \in \mathbb{R}^n \text{ là véc tơ cố định.}$$

Khi đó T là ánh xạ không giãn, đẳng cự (bảo toàn khoảng cách), nhưng không có điểm bất động. Tuy nhiên, ngay cả khi T có điểm bất động thì phép lặp $x^{n+1} = T(x^n)$ cũng có thể không hội tụ tới điểm bất động. Chẳng hạn ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1.3.5. Xét phép quay một góc $\alpha\,(0 < \alpha < 2\pi)$, quanh tâm O trong không gian $\mathbb{R}^2$, được xác định bởi:

$$T(x) = Q_O^{\alpha}(x).$$

Khi đó $\text{Fix}(T) = \{O\}$, nhưng phép lặp

$$\begin{cases} x^0 \neq (0,0) \\ x^{n+1} = T(x^n) \end{cases}$$

không hội tụ về điểm bất động.

Để khắc phục nhược điểm của phép lặp Banach, Mann đã đưa ra thuật toán áp dụng cho lớp các ánh xạ không giãn (nonexpansive) (xem [10, 52]) như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ x^{k+1} = \alpha_k x^k + (1 - \alpha_k) T(x^k), \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó dãy tham số $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$. Định lý sau đây chỉ ra dãy lặp $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán (1.4) hội tụ yếu tới một điểm bất động của ánh xạ không giãn T.

Định lý 1.3.6. [10, Theorem 5.14]. *Giả sử C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$, và $T : C \to C$ là một ánh xạ không giãn sao cho* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. *Giả sử $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$ sao cho $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_k(1 - \alpha_k) = +\infty$, và giả sử $x^0 \in C$. Khi đó dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán* (1.4) *hội tụ yếu tới một điểm thuộc* $\mathrm{Fix}(T)$.

Một phương pháp nổi tiếng khác để tìm điểm bất động của một ánh xạ T là Lipschitz giả co (Lipschitzian pseudo-contractive) đã được đề xuất bởi Ishikawa trong [34] như sau:

Định lý 1.3.7. [34]. *Nếu C là một tập lồi, com pắc của không gian Hilbert $\mathbb{H}$, $T : C \to C$ là một ánh xạ Lipschitz giả co và $x^0 \in C$, thì dãy $\{x^k\}$ xác định bởi*

$$x^{k+1} = \alpha_k T\left[\beta_k T(x^k) + (1 - \beta_k)x^k\right] + (1 - \alpha_k)x^k, \ \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

hội tụ mạnh tới một điểm bất động của ánh xạ T, trong đó $\{\alpha_k\}$ và $\{\beta_k\}$ là các dãy số dương thỏa mãn các điều kiện sau đây

i. $0 \le \alpha_k \le \beta_k \le 1, \forall k \in \mathbb{N}$;

ii. $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$;

iii. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k = \infty$.

Trong trường hợp C không phải là tập com pắc thì dãy $\{x^k\}$ có thể chỉ hội tụ yếu tới điểm bất động của ánh xạ T (xem [28]).

Để có được thuật toán hội tụ mạnh, Halpern đã đề xuất thuật toán sau đây cho lớp các ánh xạ không giãn (xem [29])

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ x^{k+1} = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k)T(x^k), \end{cases} \tag{1.6}$$

trong đó $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$, $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$. Sự hội tụ của dãy $\{x^k\}$ được cho bởi định lý sau:

Định lý 1.3.8. [29]. *Giả sử C là một tập lồi, đóng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ và T là ánh xạ không giãn trên C sao cho* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. *Giả sử dãy $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện* *i)* $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$,

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty$,

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty$.

Khi đó, với bất kỳ $x^0 \in C$*, dãy* $\{x^k\}$ *sinh bởi phép lặp* (1.6) *hội tụ mạnh tới một điểm thuộc* $\mathrm{Fix}(T)$.

Chương 2

Một số thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Các phương pháp giải bài toán cân bằng EP(C, f) thường đòi hỏi tính lồi theo biến thứ hai và tính đơn điệu hoặc đơn điệu suy rộng của song hàm f, tính đến nay đã có một số kết quả đạt được cho lớp bài toán cân bằng lồi và đơn điệu này (xem [8, 24, 25, 53–55, 73]). Gần đây, một số tác giả đã xây dựng thuật toán kiểu chiếu để giải các bài toán cân bằng và bất đẳng thức biến phân không đơn điệu (xem [21, 65, 85]), tuy nhiên các kết quả này còn chưa nhiều, mặt khác nhiều bài toán cân bằng nảy sinh trong kinh tế có song hàm không đơn điệu. Vì vậy trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một số thuật toán giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu trong không gian Hilbert. Mỗi thuật toán là sự kết hợp của phương pháp chiếu nhúng (hay còn gọi là phép chiếu thu hẹp lại) và phương pháp tìm kiếm theo tia. Chương này gồm ba phần. Phần thứ nhất, chúng tôi dành cho việc đặt bài toán và nhắc lại thuật toán đạo hàm tăng cường (xem [62]) và phương pháp chiếu nhúng (xem [70]) để sử dụng cho nghiên cứu tiếp theo. Phần thứ hai, ngoài việc trình bày một số bổ đề kỹ thuật, chúng tôi đề xuất hai thuật toán giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu. Phần cuối cùng của chương là ví dụ số minh họa cho thuật toán.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trong bài báo [CT1] thuộc Danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

[CT1] B.V. Dinh, N.T.T. Ha, N.N. Hai, and T.T.H. Thanh (2018), Strong convergence algorithms for equilibrium problems without monotonicity, *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization.* **9** (2), pp. 139-150.

2.1 Thuật toán đạo hàm tăng cường và phương pháp chiếu nhúng

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{H}$ là một tập lồi, mở, chứa tập lồi đóng C và $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng trên C. Xét bài toán cân bằng EP(C, f)

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \text{ với mọi } y \in C,$$

và bài toán liên kết với EP(C, f) được gọi là bài toán cân bằng Minty MEP(C, f)

$$\text{Tìm } y^* \in C \text{ sao cho } f(x, y^*) \leq 0 \ \forall x \in C.$$

Trong Chương 1, ta đã ký hiệu các tập nghiệm của bài toán EP(C, f) và MEP(C, f) tương ứng là Sol(C, f) và S_M.

Như đã biết (xem [36]), nếu song hàm cân bằng f có các tính chất:

- $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên trên C theo biến thứ nhất với $\forall y \in C$,
- $f(x, \cdot)$ là lồi trên C theo biến thứ hai với $\forall x \in C$,

thì $S_M \subset$ Sol(C, f).

Còn nếu song hàm cân bằng f là giả đơn điệu trên C thì ta có Sol$(C, f) \subset S_M$.

Ta bắt đầu chương này bằng việc nhắc lại một số thuật toán giải bài toán cân bằng EP(C, f) và thuật toán chiếu nhúng sẽ được sử dụng sau đây.

Để giải bài toán cân bằng giả đơn điệu và không kiểu Lipschitz trong không gian $\mathbb{R}^n$, tác giả D.Q. Tran và các đồng tác giả trong [62, Algorithm 2a] đã đề xuất kết hợp thuật toán đạo hàm tăng cường trong [43] với quy tắc tìm kiếm tia Armijo trong [9] để có được thuật toán sau.

Thuật toán đạo hàm tăng cường [62, Algorithm 2a]

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 \in C$, $\eta, \mu \in (0, 1)$, và $0 < \rho$, $\gamma_k \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0, 2)$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh

$$\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho}\|y - x^k\|^2 : \ y \in C\right\} \qquad CP(x^k)$$

để tìm nghiệm y^k duy nhất của nó.

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang *Bước 2.*

Bước 2. (Quy tắc tìm kiếm tia Armijo) Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k, \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{\mu}{2\rho}\|x^k - y^k\|^2. \end{cases}$$

Đặt $\eta_k := \eta^{m_k}$, $z^k := z^{k,m_k}$.

Bước 3. Chọn $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$, lấy $\sigma_k = \frac{f(z^k,x^k)}{\|w^k\|^2}$, tính

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \gamma_k \sigma_k w^k),$$

và quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Các tác giả đã chứng minh được dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán hội tụ tới một nghiệm của $\mathrm{EP}(C, f)$ với điều kiện tập nghiệm $\mathrm{Sol}(C, f) \neq \emptyset$. Các kết quả này này vẫn đúng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ với chứng minh hoàn toàn tương tự.

Giả sử $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn, tức là

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in C.$$

Để tìm một điểm bất động của ánh xạ T trong không gian Hilbert thực, Takahashi và các đồng tác giả trong [70] đã đề xuất phương pháp lặp được biết như là phương pháp chiếu nhúng như sau.

Phương pháp chiếu nhúng [70]

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, chọn các tham số $\alpha \in [0, 1)$, $\{\alpha_k\} \subset [0, \alpha]$ và đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = \alpha_k x^k + (1 - \alpha_k) T(x^k),$$

$$C_{k+1} = \{x \in C_k : \|x - y^k\| \leq \|x - x^k\|\}.$$

Bước 2. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_{k+1}}(x^g),$$

và quay lại **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Các tác giả đã chứng minh được dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán hội tụ mạnh tới $x^* = P_{\mathrm{Fix}(T)}(x^g)$.

2.2 Một số thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu

Xuất phát từ các thuật toán đạo hàm tăng cường trong [62], phương pháp chiếu nhúng trong [70] và các công trình gần đây [17, 21, 65, 85], chúng tôi đề xuất các thuật toán mới để giải bài toán cân bằng trong không gian Hilbert thực mà không có giả thiết giả đơn điệu của song hàm bằng cách kết hợp hai thuật toán này.

Để đạt được mục tiêu đó, chúng tôi giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết sau.

$(\mathcal{B}_1)$ $f(x, .)$ là lồi trên Ω với mọi $x \in C$;

$(\mathcal{B}_2)$ f là liên tục yếu đồng thời trên $\Omega \times \Omega$.

Định nghĩa 2.2.1. [78]. Một song hàm $\varphi : C \times C \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục yếu đồng thời trên $C \times C$ nếu với mọi $x, y \in C$ và $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ là hai dãy trong C hội tụ yếu tương ứng tới x và y, thì $\varphi(x^k, y^k)$ hội tụ tới $\varphi(x, y)$.

Với mỗi $z,\ x \in C$, ta ký hiệu $\partial_2 f(z, x)$ là dưới vi phân của hàm lồi $f(z, .)$ tại x, tức là,

$$\partial_2 f(z, x) := \{w \in \mathbb{H} : f(z, y) \geq f(z, x) + \langle w, y - x\rangle,\ \forall y \in C\}.$$

Đặc biệt,

$$\partial_2 f(z,z) = \{w \in \mathbb{H} : f(z,y) \geq \langle w, y-z\rangle,\ \forall y \in C\}.$$

Chúng tôi cũng nhắc lại một số bổ đề kỹ thuật được sử dụng cho việc chứng minh sự hội tụ tới nghiệm của các dãy lặp trong thuật toán được đề xuất.

Bổ đề 2.2.2. [78]. *Giả sử $f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ là một song hàm thỏa mãn các điều kiện $(\mathcal{B}_1)$ và $(\mathcal{B}_2)$. Giả sử $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$ và $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ là hai dãy trong Ω hội tụ yếu tương ứng tới $\bar{x}, \bar{y}$. Khi đó, với $\epsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $\eta > 0$ và $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ sao cho*

$$\partial_2 f(x^k, y^k) \subset \partial_2 f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\epsilon}{\eta} B,$$

với mọi $k \geq k_\epsilon$, trong đó B là hình cầu đơn vị trong $\mathbb{H}$.

Bổ đề 2.2.3. [54]. *Với các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$ và $(\mathcal{B}_2)$, điểm $x^* \in C$ là một nghiệm của bài toán* EP*(C,f) khi và chỉ khi nó là một nghiệm của bài toán cân bằng:*

$$\textit{Tìm } x^* \in C : f(x^*, y) + \frac{1}{2\rho}\|y - x^*\|^2 \geq 0,\ \forall y \in C. \qquad (AEP)$$

Bổ đề 2.2.4. [84, Lemma 1.5]. *Giả sử C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$. Giả sử $\{x^k\}$ là một dãy trong $\mathbb{H}$ và $u \in \mathbb{H}$. Nếu bất kỳ điểm giới hạn yếu của dãy $\{x^k\}$ thuộc C và*

$$\|x^k - u\| \leq \|u - P_C(u)\|,\ \forall k,$$

thì $x^k \to P_C(u)$.

Bổ đề 2.2.5. [21, Lemma 2.5]. *Với các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$ và $(\mathcal{B}_2)$, nếu $\{z^k\} \subset C$ là một dãy hội tụ mạnh tới $\bar{z}$, và dãy $\{w^k\}$, với $w^k \in \partial_2 f(z^k, z^k)$, hội tụ yếu tới $\bar{w}$, thì $\bar{w} \in \partial_2 f(\bar{z}, \bar{z})$.*

Bổ đề 2.2.6. [23, Lemma 5]. *Giả sử song hàm cân bằng f thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$ và $(\mathcal{B}_2)$ tương ứng trên Ω và trên C, với dãy $\{x^k\} \subset C$, $0 < \underline{\rho} \leq \bar{\rho}$, $\{\rho_k\} \subset [\underline{\rho},\ \bar{\rho}]$. Xét dãy $\{y^k\}$ xác định như sau*

$$y^k = \arg\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 :\ y \in C\right\}.$$

Khi đó, nếu dãy $\{x^k\}$ bị chặn, thì dãy $\{y^k\}$ cũng bị chặn.

Dưới đây, là một số thuật toán được đề xuất để giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$.

a. Thuật toán 2.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, chọn các tham số $\eta, \mu \in (0,1)$, $0 < \underline{\rho} \leq \bar{\rho}$, $\{\rho_k\} \subset [\underline{\rho},\ \bar{\rho}]$, $\gamma_k \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0,2)$, và đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm nghiệm

$$y^k = \arg\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 :\ y \in C\right\}. \qquad CP(x^k)$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện *Bước 2.*

Bước 2. (Quy tắc tìm kiếm tia Armijo thứ nhất) Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k, \\ f(z^{k,m}, x^k) - f(z^{k,m}, y^k) \geq \frac{\mu}{2\rho_k}\|x^k - y^k\|^2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$.

Bước 3. Lấy $w^k \in \partial_2 f(z^k, x^k)$ và tính $u^k = P_C(x^k - \gamma_k\sigma_k w^k)$, trong đó $\sigma_k = \frac{f(z^k, x^k)}{\|w^k\|^2}$.

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_{k+1}}(x^g),$$

với $C_{k+1} = \{x \in C_k : \|x - u^k\| \leq \|x - x^k\|\}$, và quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Nhận xét 2.2.7. Nếu $y^k = x^k$ thì x^k là một nghiệm của bài toán EP(C, f).

Trước khi chứng minh sự hội tụ của Thuật toán 2.1, chúng tôi nhắc lại bổ đề sau đã được chứng minh trong [62].

Bổ đề 2.2.8. [62, Lemma 4.3, Lemma 4.5]. *Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$ và $(\mathcal{B}_2)$, khi đó ta có:*

(a) Quy tắc tìm kiếm theo tia (2.1) là xác định tốt, tức là với mọi k đều tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất m_k thỏa mãn (2.1);

(b) $f(z^k, x^k) > 0$;

(c) $0 \notin \partial_2 f(z^k, x^k)$;

(d) Ngoài ra, nếu $S_M \neq \emptyset$, thì

$$\|u^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \gamma_k(2-\gamma_k)(\sigma_k\|w^k\|)^2, \text{ với mọi } x^* \in S_M. \tag{2.2}$$

Định lý sau đây thiết lập sự hội tụ mạnh của dãy $\{x^k\}$ tới một nghiệm của bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$.

Định lý 2.2.9. *Giả sử rằng song hàm f thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_2)$. Nếu tập S_M khác rỗng, thì các dãy $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới một nghiệm x^* của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$.*

Chứng minh. Lấy $\bar{x} \in S_M \subset C = C_0$. Từ Bổ đề 2.2.8, ta có

$$\|u^k - \bar{x}\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \gamma_k(2-\gamma_k)(\sigma_k\|w^k\|)^2. \tag{2.3}$$

Vì $\gamma_k \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0, 2)$, ta nhận được

$$\|\bar{x} - u^k\| \leq \|\bar{x} - x^k\|. \tag{2.4}$$

Từ bất đẳng thức (2.4), bằng quy nạp ta có thể kết luận được rằng $\bar{x} \in C_k$ với mọi k.

Theo *Bước 4*, $x^k = P_{C_k}(x^g)$, ta có

$$\|x^k - x^g\| \leq \|x - x^g\|, \ \forall x \in C_k, \tag{2.5}$$

vì vậy,

$$\|x^k - x^g\| \leq \|\bar{x} - x^g\|, \ \forall k. \tag{2.6}$$

Do đó, dãy $\{x^k\}$ là bị chặn. Kết hợp với (2.4) ta có dãy $\{u^k\}$ cũng bị chặn.
Vì $x^{k+1} \in C_k$ và từ bất đẳng thức (2.5), ta có

$$\|x^k - x^g\| \leq \|x^{k+1} - x^g\|, \ \forall k. \tag{2.7}$$

Mặt khác, do dãy $\{x^k\}$ bị chặn, nên ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^g\| = \tau \geq 0. \tag{2.8}$$

Ngoài ra,

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^k\|^2 &= \|x^{k+1} - x^g + x^g - x^k\|^2 \\
&= \|x^{k+1} - x^g\|^2 + \|x^g - x^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^g, x^g - x^k\rangle \\
&= \|x^{k+1} - x^g\|^2 + \|x^g - x^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^g - x^k\rangle - 2\|x^g - x^k\|^2 \\
&\leq \|x^{k+1} - x^g\|^2 - \|x^k - x^g\|^2,
\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng có được vì $x^k = P_{C_k}(x^g)$ và $x^{k+1} \in C_k$, khi đó, $\langle x^{k+1} - x^k, x^g - x^k\rangle \leq 0$.
Từ (2.8), ta được

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \tag{2.9}$$

Bởi vì $x^{k+1} \in C_{k+1}$, ta suy ra

$$\|x^k - u^k\| \leq \|x^k - x^{k+1}\| + \|x^{k+1} - u^k\| \leq 2\|x^k - x^{k+1}\|.$$

Kết hợp với (2.9) ta có

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - x^k\| = 0. \tag{2.10}$$

Tiếp theo, ta chỉ ra rằng các dãy $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ hội tụ mạnh tới $x^* = P_{\cap_{k=0}^{\infty} C_k}(x^g)$.

Rõ ràng C_k là tập lồi, đóng, khác rỗng, nên C_k đóng yếu. Vì $C_{k+1} \subset C_k, \forall k$ và $x^k \in C_k$, nên $x^k \in C_{k_0}$ với mọi $k \geq k_0$. Giả sử $\hat{x}$ là điểm tụ yếu bất kỳ của dãy $\{x^k\}$, tức là, tồn tại dãy con $\{x^{k_j}\}$ của dãy $\{x^k\}$ sao cho $x^{k_j} \rightharpoonup \hat{x}$ khi $j \to \infty$. Vì dãy $\{x^{k_j}\} \subset C_{k_i}, \forall j \geq i$ và tính đóng yếu của C_{k_i}, nên $\hat{x} \in C_{k_i}, \forall i$. Do đó $\hat{x} \in C_k, \forall k$, hay $\hat{x} \in \cap_{k=0}^{\infty} C_k$.

Đặt $x^* = P_{\cap_{k=0}^{\infty} C_k}(x^g)$. Từ (2.6) ta có,

$$\|x^k - x^g\| \leq \|x^* - x^g\|, \ \forall k.$$

Ta có thể kết luận rằng dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x^* theo Bổ đề 2.2.4. Cùng với (2.10) ta cũng có dãy $\{u^k\}$ hội tụ mạnh tới x^*.

Tiếp theo, ta chỉ ra rằng x^* là nghiệm của bài toán EP(C, f).

Theo (2.3), ta có bất đẳng thức

$$\gamma_k(2-\gamma_k)(\sigma_k\|w^k\|)^2 \leq \|x^k - u^k\|\big[\|x^k - \bar{x}\| + \|u^k - \bar{x}\|\big]. \tag{2.11}$$

Vì $\gamma_k \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0, 2)$, và (2.10), ta nhận được từ (2.11) là

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k\|w^k\| = 0. \tag{2.12}$$

Từ dãy $\{x^k\}$ bị chặn và Bổ đề 2.2.6, ta có dãy $\{y^k\}$ bị chặn. Theo đó, dãy $\{z^k\}$ cũng bị chặn. Sử dụng Bổ đề 2.2.5, dãy $\{w^k\}$ cũng bị chặn. Theo (2.12), ta có

$$\lim_{k\to\infty} f(z^k, x^k) = \lim_{k\to\infty} [\sigma_k\|w^k\|]\|w^k\| = 0. \tag{2.13}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} 0 = f(z^k, z^k) &= f(z^k, (1-\eta_k)x^k + \eta_k y^k) \\ &\leq (1-\eta_k)f(z^k, x^k) + \eta_k f(z^k, y^k), \end{aligned}$$

vì vậy, ta nhận được từ (2.1)

$$\begin{aligned} f(z^k, x^k) &\geq \eta_k[f(z^k, x^k) - f(z^k, y^k)] \\ &\geq \frac{\mu}{2\rho_k}\eta_k\|x^k - y^k\|^2. \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.13) ta suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k\|x^k - y^k\|^2 = 0. \tag{2.14}$$

Tiếp theo ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\limsup_{k\to\infty} \eta_k > 0$.

Khi đó tồn tại $\bar{\eta} > 0$ và một dãy $\{\eta_{k_i}\} \subset \{\eta_k\}$ sao cho $\eta_{k_i} > \bar{\eta}$, $\forall i$, và từ (2.14), ta nhận được

$$\lim_{i\to\infty} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| = 0. \tag{2.15}$$

Lưu ý rằng $x^k \to x^*$ và (2.15), điều này dẫn đến $y^{k_i} \to x^*$ khi $i \to \infty$.

Theo định nghĩa của y^{k_i} ta có

$$f(x^{k_i}, y) + \frac{1}{2\rho_{k_i}}\|y - x^{k_i}\|^2 \geq f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{2\rho_{k_i}}\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2, \ \forall y \in C. \tag{2.16}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng $\lim_{i\to\infty} \rho_{k_i} = \rho^*$. Cho $i \to \infty$, do $x^{k_i} \to x^*$, $y^{k_i} \to x^*$ và dựa vào tính liên tục yếu đồng thời của f, từ (2.16) ta nhận được

$$f(x^*, y) + \frac{1}{2\rho^*}\|y - x^*\|^2 \geq 0.$$

Theo Bổ đề 2.2.3, ta có

$$f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Do đó, x^* là một nghiệm của bài toán EP(C, f).

Trường hợp 2. $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$.

Vì dãy $\{y^k\}$ bị chặn, khi đó tồn tại dãy con $\{y^{k_i}\} \subset \{y^k\}$ sao cho $y^{k_i} \rightharpoonup \bar{y}$ khi $i \to \infty$.

Theo định nghĩa của y^{k_i}, ta có

$$f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{2\rho_{k_i}}\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2 \leq 0. \tag{2.17}$$

Mặt khác, theo quy tắc tìm kiếm tia Armijo (2.1), với $m_{k_i} - 1$, ta có

$$f(z^{k_i, m_{k_i}-1}, x^{k_i}) - f(z^{k_i, m_{k_i}-1}, y^{k_i}) < \frac{\mu}{2\rho_{k_i}}\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2. \tag{2.18}$$

Kết hợp với (2.17) ta được

$$f(x^{k_i}, y^{k_i}) \leq -\frac{1}{2\rho_{k_i}}\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2 \leq \frac{1}{\mu}\big[f(z^{k_i, m_{k_i}-1}, y^{k_i}) - f(z^{k_i, m_{k_i}-1}, x^{k_i})\big]. \tag{2.19}$$

Theo quy tắc tìm kiếm tia, $z^{k_i, m_{k_i}-1} = (1 - \eta^{m_{k_i}-1})x^{k_i} + \eta^{m_{k_i}-1}y^{k_i}$, $\eta^{m_{k_i}-1} \to 0$. Vì x^{k_i} hội tụ mạnh tới x^*, y^{k_i} hội tụ yếu tới $\bar{y}$, điều đó dẫn đến $z^{k_i, m_{k_i}-1}$ hội tụ mạnh tới x^* khi $i \to \infty$. Ngoài ra, dãy $\{\frac{1}{\rho_{k_i}}\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2\}$ là bị chặn, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{\rho_{k_i}}\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2$ tồn tại. Khi đó, theo giới hạn từ (2.19) ta nhận được

$$f(x^*, \bar{y}) \leq -\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{2\rho_{k_i}}\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2 \leq \frac{1}{\mu} f(x^*, \bar{y}).$$

Vì vậy, $f(x^*, \bar{y}) = 0$ và $\lim_{i\to+\infty} \|y^{k_i} - x^{k_i}\|^2 = 0$. Theo *Trường hợp 1*, ta có x^* là một nghiệm của bài toán EP(C, f). □

Thay thế quy tắc tìm kiếm tia thứ nhất (2.1) bởi một quy tắc khác, ta thu được thuật toán sau.

b. Thuật toán 2.2

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, chọn các tham số $\eta, \mu \in (0,1)$, $0 < \underline{\rho} \leq \bar{\rho}$, $\{\rho_k\} \subset [\underline{\rho},\ \bar{\rho}]$, $\gamma_k \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}] \subset (0, 2)$, và đặt $C_0 = C$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 :\ y \in C\Big\}. \qquad CP(x^k)$$

Nếu $y^k = x^k$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện *Bước 2.*

Bước 2. (Quy tắc tìm kiếm tia Armijo thứ hai) Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất m sao cho

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ f(z^{k,m}, y^k) + \frac{\mu}{2\rho_k}\|x^k - y^k\|^2 \leq 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Đặt $\eta_k = \eta^{m_k}$, $z^k = z^{k,m_k}$. Nếu $0 \in \partial_2 f(z^k, z^k)$, thì dừng thuật toán. Trái lại, thực hiện *Bước 3.*

Bước 3. Chọn $w^k \in \partial_2 f(z^k, z^k)$ và tính $u^k = P_C(x^k - \gamma_k\sigma_k w^k)$, trong đó $\sigma_k = \frac{f(z^k, x^k)}{\|w^k\|^2}$.

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = P_{C_{k+1}}(x^g),$$

với $C_{k+1} = \{x \in C_k : \|x - u^k\| \leq \|x - x^k\|\}$, và quay lại **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Nhận xét 2.2.10.

- Nếu $y^k = x^k$ thì x^k là một nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$;
- Nếu $0 \in \partial_2 f(z^k, z^k)$ thì z^k là một nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$.

Bổ đề 2.2.11. [62, Lemma 4.2, Lemma 4.5]. *Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$ và $(\mathcal{B}_2)$, khi đó ta có:*

(a) Quy tắc tìm kiếm tia (2.20) *là xác định tốt, tức là với mọi k đều tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất m_k thỏa mãn* (2.20)*;*

(b) $f(z^k, y^k) < 0$;

(c) Nếu $S_M \neq \emptyset$, thì

$$\|u^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \gamma_k(2 - \gamma_k)(\sigma_k \|w^k\|)^2, \quad \textit{với mọi } x^* \in S_M.$$

Sử dụng Bổ đề 2.2.11, bằng cách lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 2.2.9, ta thu được định lý sau đây về sự hội tụ của Thuật toán 2.2.

Định lý 2.2.12. *Giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_2)$. Nếu tập S_M khác rỗng, thì dãy $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh tới một nghiệm x^* của bài toán* $\mathrm{EP}(C, f)$.

2.3 Ví dụ minh họa

Để minh họa cho các thuật toán được đề xuất, trong mục này, chúng tôi xét một bài toán cân bằng phát sinh trong mô hình cân bằng thị trường điện bán độc quyền Nash-Cournot, mô hình này đã được nghiên cứu trong [18, 63]. Trong mô hình này, có n^c các công ty sản xuất điện, công ty thứ i sở hữu I_i đơn vị phát điện. Giả sử n^g là số tất cả các đơn vị phát điện và x là véc tơ có các thành phần $x_i, i = 1, 2, \ldots, n^g$, trong đó x_i là lượng điện năng được sản xuất bởi đơn vị phát điện thứ i và $\sigma = \sum_{i=1}^{n^g} x_i$ là tổng lượng điện năng sản xuất được của tất cả các đơn vị phát điện. Chúng ta giả sử giá điện p là một hàm affine giảm của σ, điều đó có nghĩa là sản lượng điện sản xuất ra càng nhiều thì giá điện càng giảm, cụ thể là

$$p(x) = 378.4 - 2\sum_{i=1}^{n^g} x_i = p(\sigma).$$

Khi đó lợi nhuận của công ty thứ i được cho bởi

$$f_i(x) = p(\sigma)\sum_{j\in I_i} x_j - \sum_{j\in I_i} c_j(x_j),$$

trong đó $c_j(x_j)$ là chi phí của đơn vị j khi sản xuất lượng điện năng x_j được xác định bởi

$$c_j(x_j) := \max\{c_j^0(x_j), c_j^1(x_j)\}$$

với

$$c_j^0(x_j) := \frac{\alpha_j^0}{2}x_j^2 + \beta_j^0 x_j + \gamma_j^0,\ c_j^1(x_j) := \alpha_j^1 x_j + \frac{\beta_j^1}{\beta_j^1 + 1}\gamma_j^{-1/\beta_j^1}(x_j)^{(\beta_j^1+1)/\beta_j^1},$$

trong đó $\alpha_j^k, \beta_j^k, \gamma_j^k$ $(k = 0, 1)$ là các tham số cho trước.

Ký hiệu $x_j^{\min}$ và $x_j^{\max}$ là lượng điện năng nhỏ nhất và lớn nhất có thể sản xuất được bởi đơn vị sản xuất điện thứ j. Khi đó tập chiến lược của mô hình được cho dưới dạng

$$C := \{x = (x_1, \ldots, x^{n^g})^T :\ x_j^{\min} \le x_j \le x_j^{\max},\ \forall j\}.$$

Bằng cách đặt $q^i := (q_1^i, \ldots, q_{n^g}^i)^T$ với

$$q_j^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j \in I_i, \\ 0 & \text{nếu } j \notin I_i \end{cases}$$

và định nghĩa

$$A := 2\sum_{i=1}^{n^c}(1 - q^i)(q^i)^T, \quad B := 2\sum_{i=1}^{n^c} q^i(q^i)^T, \tag{2.21}$$

$$a := -387.4 \sum_{i=1}^{n^c} q^i, \text{ và } c(x) := \sum_{j=1}^{n^g} c_j(x_j). \tag{2.22}$$

Khi đó mô hình cân bằng bán độc quyền này có thể đưa về bài toán cân bằng EP(C, f) sau ([63, Trang 155]):

$$\text{Tìm } x^* \in C : f(x^*, y) = [(A+B)x^* + By + a]^T (y - x^*) + c(y) - c(x^*) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Có thể thấy rằng, A không phải là ma trận nửa xác định dương và

$$f(x, y) + f(y, x) = -(y - x)^T A(y - x),$$

do đó song hàm f là không đơn điệu.

Mặt khác, từ biểu thức xác định song hàm f và hàm $c(x)$, ta có thể thấy f thỏa mãn các giả thiết $\mathcal{B}_1$ và $\mathcal{B}_2$.

Chúng tôi đã chạy Thuật toán 2.1 cho bài toán này với các dữ liệu tương ứng trong mô hình đầu tiên của bài báo [18], trong đó số công ty (Com.) là $n^c = 3$, số các đơn vị phát điện (Gen.) là $n^g = 6$, cụ thể công ty thứ nhất có một đơn vị phát điện là $\{1\}$, công ty thứ hai có hai đơn vị phát điện là $\{2, 3\}$ và công ty thứ ba có ba đơn vị phát là $\{4, 5, 6\}$. Giá trị của các tham số được cho trong các bảng sau:

Com.	Gen.	$x^g_{\min}$	$x^g_{\max}$	$x^c_{\min}$	$x^c_{\max}$
1	1	0	80	0	80
2	2	0	80	0	130
2	3	0	50	0	130
3	4	0	55	0	125
3	5	0	30	0	125
3	6	0	40	0	125

Bảng 2.1: Cận dưới và cận trên của sản lượng điện sản xuất bởi các đơn vị phát điện.

Gen.	α_j^0	β_j^0	γ_j^0	α_j^1	β_j^1	γ_j^1
1	0.0400	2.00	0.00	2.0000	1.0000	25.0000
2	0.0350	1.75	0.00	1.7500	1.0000	28.5714
3	0.1250	1.00	0.00	1.0000	1.0000	8.0000
4	0.0116	3.25	0.00	3.2500	1.0000	86.2069
5	0.0500	3.00	0.00	3.0000	1.0000	20.0000
6	0.0500	3.00	0.00	3.0000	1.0000	20.0000

Bảng 2.2: Các giá trị của tham số chi phí khi sản xuất ra mỗi đơn vị điện.

Chúng tôi đã tiến hành thực hiện Thuật toán 2.1 bằng phần mềm Matlab, phiên bản R2014a chạy trên Laptop với cấu hình Intel(R) Core(TM) i5-3230M CPU@2.60 GHz với Ram 4GB. Để kết thúc thuật toán, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng $\frac{\|x^{k+1}-x^k\|}{\max\{1,\|x^k\|\}} \leq \epsilon$ với sai số $\epsilon = 10^{-3}$. Các kết quả tính toán được trình bày trên Bảng 2.3 với một số điểm khởi tạo khác nhau và một số giá trị khác nhau của tham số chỉnh.

Iter(k)	ρ	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_4^k	x_5^k	x_6^k	Cpu(s)
0 691	0.1	0 46.6583	0 32.0728	0 15.0832	0 21.9862	0 12.3870	0 12.4071	136.0017
0 1166	0.5	0 46.6541	0 32.0750	0 15.0845	0 21.9224	0 12.4209	0 12.4389	151.3664
0 847	0.9	0 46.6440	0 31.9437	0 15.2014	0 21.6995	0 12.5953	0 12.4952	162.2410
0 629	0.1	30 46.6531	20 32.1041	10 15.0509	15 22.0089	10 12.4180	10 12.3606	122.1176
0 504	0.5	30 46.6416	20 31.9645	10 15.1811	15 21.6667	10 12.5630	10 12.5629	135.5798
0 711	0.9	30 46.6482	20 32.0263	10 15.1150	15 21.6827	10 12.5460	10 12.5657	147.0316

Bảng 2.3: Các kết quả tính toán ứng với một số điểm xuất phát và tham số chỉnh.

Bảng 2.1, Bảng 2.2 và Bảng 2.3 có các ký hiệu như sau:

- x^g_{min}, x^g_{max} là sản lượng điện nhỏ nhất và lớn nhất của các đơn vị sản xuất.
- x^c_{min}, x^c_{max} là sản lượng điện nhỏ nhất và lớn nhất của các công ty.
- Iter(k): bước lặp thứ k.
- Cpu(s): thời gian tính toán tính bằng giây.

Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất các Thuật toán 2.1 và Thuật toán 2.2 để giải bài toán cân bằng với song hàm là không đơn điệu trong không gian Hilbert thực. Các thuật toán đó là sự kết hợp giữa phương pháp chiếu nhúng với quy tắc tìm kiếm theo tia. Chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của các thuật toán đề xuất trong các Định lý 2.2.9 và Định lý 2.2.12, đồng thời chúng tôi đã áp dụng thuật toán được đề xuất cho một mô hình cân bằng thị trường điện bán độc quyền Nash-Cournot.

Chương 3

Hệ bài toán cân bằng và bài toán cân bằng tổ hợp

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu mối liên hệ giữa tập nghiệm của hệ bài toán cân bằng với tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp. Cụ thể, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng với giả thiết các song hàm $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ là đơn điệu thì tập nghiệm của hai bài toán này có thể không bằng nhau. Do đó, các kết quả trong một số bài báo [41, 42, 66–68] có thể không đúng. Đồng thời, chúng tôi cũng thiết lập một điều kiện đủ để hai tập nghiệm này trùng nhau trong cả hai trường hợp họ các song hàm là hữu hạn và vô hạn. Các kết quả này đã được công bố trong bài báo [CT2] thuộc Danh mục công trình liên quan đến Luận án.

[CT2] N.T.T. Ha, T.T.H. Thanh, N.N. Hai, H.D. Manh, and B.V. Dinh (2019), A note on the combination of equilibrium problems, *Mathematical Methods of Operations Research*, **91**, pp. 311-323, (SCIE).

3.1 Mở đầu

Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ và $f_i : C \times C \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, N}$ là các song hàm xác định trên C. Bài toán tìm nghiệm chung của một họ hữu hạn các bài toán cân bằng được đề cập đến trong các bài báo [41, 66–68], ký hiệu là CSEP là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f_i(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C \text{ và } i = 1, 2, \ldots, N, \qquad \mathrm{CSEP}(C, f_i)$$

hoặc tương đương,

$$\text{tìm } x^* \in \mathcal{X} := \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i).$$

Với $\alpha_i \in (0,1), i = 1, \ldots, N$ sao cho $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, xét song hàm tổ hợp:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(x,y), \ \forall x, y \in C.$$

Bài toán cân bằng tổ hợp viết tắt là CEP$(C, \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i)$ là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Ta ký hiệu Sol$(C, \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp.

Trong [66], với một số điều kiện nhất định các tác giả khẳng định rằng:

$$\cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i).$$

Do đó, các nghiệm chung của một họ hữu hạn các bài toán cân bằng có thể được tính bằng cách đơn giản là tìm nghiệm của tổ hợp lồi bất kỳ của họ các bài toán cân bằng đó. Từ kết quả này, trong các bài báo [41, 42, 66–68] các tác giả đã sử dụng nó để chuyển các bài toán của họ về bài toán liên quan đến bài toán cân bằng tổ hợp.

Trong phần này, chúng tôi chỉ ra rằng, với các điều kiện được đưa ra như trong [66], quan hệ

$$\mathrm{Sol}\left(C, \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i\right) \subset \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i)$$

không phải luôn luôn đúng. Do đó, các kết quả khác được đưa ra trong các bài báo gần đây trong [41, 42, 66–68] là không đúng bởi vì chúng dựa trên bao hàm thức sai ở trên. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ để công thức trên không chỉ đúng khi N hữu hạn mà còn đúng khi $N = +\infty$.

Trước khi chỉ ra một số mệnh đề trong các bài báo liên quan tới khẳng định trong [66], chúng tôi nhắc lại một số giả thiết đã được các tác giả sử dụng sau đây.

Giả thiết $\mathcal{C}$.

($\mathcal{C}_1$) $\varphi(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$;

($\mathcal{C}_2$) φ đơn điệu trên C;

($\mathcal{C}_3$) φ là nửa liên tục trên theo tia (upper hemicontinuous), tức là, với mỗi $x, y, z \in C$,

$$\limsup_{t\to 0^+} \varphi(tz + (1-t)x, y) \le \varphi(x,y);$$

($\mathcal{C}_4$) Với mỗi $x \in C$, $\varphi(x,\cdot)$ là nửa liên tục dưới (lower semicontinuous) và lồi trên C;

($\mathcal{C}_5$) Với $r > 0$ cố định, và $z \in C$, tồn tại tập con lồi, com pắc khác rỗng $B \subset \mathbb{H}$ và $x \in C \cap B$, sao cho

$$\varphi(y,x) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle < 0, \forall y \in C \setminus\ B.$$

Dưới đây là năm phát biểu đã được trình bày trong các bài báo [41, 42, 66–68].

Phát biểu 3.1.1. ([66, Lemma 2.7]) *Giả sử các song hàm $f_i, i = 1, 2, \dots, N$ thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ và $\cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$. Khi đó*

$$\cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, \sum_{n=1}^N \alpha_i f_i(x,y)),$$

trong đó, $\alpha_i \in (0,1)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$ và $\sum_{n=1}^N \alpha_i = 1$.

Nếu Phát biểu 3.1.1 đúng thì nó cho phép chúng ta tìm các nghiệm chung của N bài toán cân bằng bằng cách giải một bài toán cân bằng tổ hợp.

Phát biểu 3.1.2. ([67, Theorem 3.1]). *Giả sử F là một ánh xạ co với hệ số co τ trên $\mathbb{H}$ và A là một toán tử tuyến tính bị chặn, dương mạnh trên $\mathbb{H}$ với hệ số $\bar{\gamma}$, $0 < \gamma < \frac{\bar{\gamma}}{\tau}$. Với mỗi $i = 1, 2, \dots, N$, giả sử $f_i : C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn* *các giả thiết* $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ *với* $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$. *Giả sử* $\{x^k\}, \{y^k\}, \{z^k\}$ *là các dãy sinh bởi* $x^1 \in \mathbb{H}$ *và*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(z^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - z^k, z^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ y^k = \theta_k P_C(x^k) + (1-\theta_k)z^k, \\ x^{k+1} = \delta_k \gamma F(x^k) + (I - \delta_k A)y^k, \end{cases}$$

trong đó $\{\delta_k\}, \{\theta_k\}, \{\rho_k\} \subset (0,1), 0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$. *Giả sử các điều kiện* $(i) - (v)$ *sau là đúng.*

(i) $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$ *và* $\sum_{k=0}^\infty \delta_k = \infty$;

(ii) $0 < \underline{\theta} \leq \theta_k \leq \bar{\theta} < 1$, *với* $\underline{\theta}, \bar{\theta} \in (0,1)$;

(iii) $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha} < 1$, *với* $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in (0,1)$;

(iv) $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$;

(v) $\sum_{i=1}^N |\delta_{k+1} - \delta_k| < \infty$, $\sum_{i=1}^\infty |\theta_{k+1} - \delta_k| < \infty$, $\sum_{i=1}^\infty |\rho_{k+1} - \rho_k| < \infty$.

Khi đó các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ *và* $\{z^k\}$ *hội tụ tới* $q = P_{\mathcal{X}}(I - A + \gamma F)q$.

Phát biểu 3.1.3. ([42, Theorem 3.1]). *Giả sử các song hàm* $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ *thỏa mãn các giả thiết* $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ *và* $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$. *Giả sử các dãy* $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *được sinh bởi* $u, x^1 \in \mathbb{H}$ *và*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(y^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - y^k, y^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k u + \mu_k x^k + \delta_k y^k \end{cases}$$

trong đó, $\{\lambda_k\}, \{\mu_k\}, \{\delta_k\} \subset (0,1)$ *và* $\lambda_k + \mu_k + \delta_k = 1$; $\{\rho_k\} \subset (\underline{\rho}, \bar{\rho}) \subset (0,1)$, $0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$. *Giả sử các điều kiện* $(i) - (iii)$ *đúng:*

(i) $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ *và* $\sum_{k=0}^\infty \lambda_k = \infty$;

(ii) $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$;

(iii) $\sum_{i=1}^N |\delta_{k+1} - \delta_k| < \infty$.

Khi đó các dãy $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *hội tụ tới* $q = P_{\mathcal{X}}(u)$.

Phát biểu 3.1.4. ([68, Theorem 3.1]). *Cho* F *là ánh xạ co với hệ số* τ *trên* $\mathbb{H}$ *và giả sử* $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ *thỏa mãn các giả thiết* $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$. *Với giả thiết* $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$, *giả sử các dãy* $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *được sinh bởi* $x^1 \in C$ *và*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(y^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - y^k, y^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k F(x^k) + \mu_k P_C(x^k) + \delta_k y^k \end{cases}$$

trong đó, $\{\lambda_k\}, \{\mu_k\}, \{\delta_k\} \subset (0,1)$ *sao cho* $\lambda_k + \mu_k + \delta_k = 1\ \forall k$; $\{\rho_k\} \subset (\underline{\rho}, \bar{\rho}) \subset (0,1)$, $0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$. *Ngoài ra, giả sử các điều kiện (i) – (iii) đúng:*

(i) $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ *và* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$;

(ii) $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$;

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} |\rho_{k+1} - \rho_k| < \infty$.

Khi đó các dãy $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *hội tụ tới* $q = P_{\mathcal{X}}(u)$.

Phát biểu 3.1.5. ([41, Theorem 4.2]). *Giả sử các song hàm* $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ *thỏa mãn giả thiết* $\mathcal{C}$ *và* $\mathcal{X} = \cap_{i=1}^N \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$. *Với* $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$, *giả sử các dãy* $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ *và* $\{z^k\}$ *được sinh bởi*

$$\begin{cases} y^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(z^k, y) + \frac{1}{\rho_k}\langle y - z^k, z^k - y^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k x^k + \mu_k z^k \end{cases}$$

trong đó, $\{\theta_k\} \subset [0, \theta], \theta \in [0;1]$, $\{\lambda_k\}, \{\mu_k\} \subset (0,1)$ *và* $\lambda_k + \mu_k = 1$ *với mọi* k; $\{\rho_k\} \subset (\underline{\rho}, \bar{\rho}) \subset (0,1)$, $0 < \alpha_i < 1, \forall i = 1, \ldots, N$. *Giả sử rằng các điều kiện sau đúng:*

(i) $\theta_k \|x^k - x^{k-1}\| < \infty$;

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$ *và* $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$;

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} |\rho_{k+1} - \rho_k| < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \infty$.

Khi đó dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới $q = P_{\mathcal{X}}(u)$.

Nhận xét 3.1.6.

- Mỗi Phát biểu 3.1.2 - 3.1.5 khẳng định rằng dãy $\{x^k\}$ nhận được theo các thuật toán tương ứng hội tụ tới một nghiệm của bài toán CSEP.
- Trong Hệ quả 3.2.2 (b) - (e) dưới đây cho thấy chúng có thể không đúng.

3.2 Mối liên hệ giữa tập nghiệm của hệ bài toán cân bằng và bài toán cân bằng tổ hợp

Trong mục này chúng tôi sẽ chỉ ra với các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$, các Phát biểu 3.1.1 - 3.1.5 có thể không đúng.

Với C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$ và $f_i, i = 1, \dots, N$ là các song hàm xác định trên C sao cho

$$\cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset.$$

Với $\alpha_i \in (0,1), i = 1, \dots, N$ và $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, ta xét song hàm tổ hợp xác định bởi

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x,y), \forall x, y \in C.$$

Rõ ràng rằng nếu $x^* \in \cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i)$ thì $f_i(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C,$ và $i = 1, 2, \dots, N$. Do đó,

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C.$$

Vì vậy $x^* \in \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x,y))$ và

$$\cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i) \subset \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x,y)). \tag{3.1}$$

Định lý sau đây chứng tỏ rằng với các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ thì bao hàm thức ngược lại của (3.1) không phải luôn đúng.

Định lý 3.2.1. *Với mỗi số nguyên $N \geq 2$, tồn tại tập C lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{H}$, tồn tại các song hàm $f_1, f_2, \ldots, f_N$ xác định trên C thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ và tồn tại các số $\alpha_i \in (0,1), i = 1, 2, \ldots, N$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, sao cho*

$$\mathrm{Sol}\left(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i\right) \not\subset \cap_{i=1}^{N} \mathrm{Sol}(C, f_i).$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh trường hợp $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$ và $N = 2$ (bởi vì ta có thể lấy $f_3 = f_4 = \ldots = 0$). Từ mục đích này, với $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ta xét tập C và các song hàm f_1, f_2 được cho như sau

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

$$f_1(x, y) = x_2 y_1 - x_1 y_2,$$

$$f_2(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Khi đó ta có: $f_1(x, x) = 0, \forall x \in C$ và với mọi $x, y \in C$, ta được

$$f_1(x, y) + f_1(y, x) = x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_2 x_1 - y_1 x_2 = 0.$$

Do vậy, f_1 là đơn điệu trên C. Với mỗi $x \in C$ ta cũng có $f_1(x, y)$ là tuyến tính theo y, và như vậy $f_1(x, \cdot)$ là hàm lồi theo y với mọi x. Hơn nữa, rõ ràng f_1 là hàm liên tục trên $C \times C$. Do đó song hàm f_1 thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$.

Tương tự, f_2 thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$. Ngoài ra, có thể thấy rằng

$$\mathrm{Sol}(C, f_1) = \{0\} \times [0, +\infty),$$

$$\mathrm{Sol}(C, f_2) = [0, +\infty) \times \{0\}.$$

Vì vậy,

$$\mathrm{Sol}(C, f_1) \cap \mathrm{Sol}(C, f_2) = \{(0, 0)\}.$$

Bây giờ, ta xét một tổ hợp của f_1, f_2 được cho như sau

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} f_1(x, y) + \frac{1}{2} f_2(x, y) \\ &= \frac{1}{2}\big[f_1(x, y) + f_2(x, y)\big] \\ &= 0, \ \forall x, y \in C. \end{aligned}$$

Rõ ràng f thỏa mãn các giả thiết $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2), (\mathcal{C}_3)$, và $(\mathcal{C}_4)$. Hơn nữa

$$\mathrm{Sol}(C, f) = C = [0, +\infty) \times [0, +\infty),$$

do đó,

$$\mathrm{Sol}(C, f) \not\subset \mathrm{Sol}(C, f_1) \cap \mathrm{Sol}(C, f_2).$$

Định lý được chứng minh xong. □

Từ định lý này, ta có hệ quả sau

Hệ quả 3.2.2. *Các Phát biểu 3.1.1 - 3.1.5 không phải luôn đúng.*

Chứng minh. Giả sử $N = 2$, với tập C và các song hàm f_1, f_2 được xác định như trong Định lý 3.2.1. Xét tổ hợp của f_1 và f_2 được cho bởi

$$f(x, y) = \frac{1}{2} f_1(x, y) + \frac{1}{2} f_2(x, y) = 0, \forall x, y \in C.$$

Do đó,

$$\mathcal{X} = \mathrm{Sol}(C, f_1) \cap \mathrm{Sol}(C, f_2) = \{(0, 0)\},$$
$$\mathrm{Sol}(C, f) = C = [0, +\infty) \times [0, +\infty).$$

Khi đó ta có các kết quả sau:

(a) Phát biểu 3.1.1 là sai bởi vì $\mathrm{Sol}(C, f) \not\subset \mathrm{Sol}(C, f_1) \cap \mathrm{Sol}(C, f_2)$.

(b) Giả sử ta xét thuật toán được cho trong Phát biểu 3.1.2. Với $x^1 \in C$ sao cho $x^1 \neq (0, 0)$ và đặt $F(x) = x^1, Ax = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$. Chọn $\gamma = 1$, ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_k} \langle y - z^k, z^k - x^k \rangle \geq 0,\ \forall y \in C, \\ y^k = \theta_k P_C(x^k) + (1 - \theta_k) z^k, \\ x^{k+1} = \delta_k x^1 + (1 - \delta_k) y^k. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{cases} z^k = P_C(x^k), \\ y^k = P_C(x^k), \\ x^{k+1} = \delta_k x^1 + (1 - \delta_k) P_C(x^k). \end{cases}$$

Vì $x^1 \in C$ ta có thể kết luận $x^k = x^1, \forall k$. Từ $x^1 \notin \mathcal{X}$ điều này có nghĩa là Phát biểu 3.1.2 là sai.

(c) Lấy $u = x^1 \in C$ sao cho $x^1 \neq (0,0)$. Dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Phát biểu 3.1.3 trở thành

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_k}\langle y - y^k, y^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k u + \mu_k x^k + \delta_k y^k. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{cases} y^k = P_C(x^k), \\ x^{k+1} = \lambda_k u + \mu_k x^k + \delta_k P_C(x^k). \end{cases}$$

Vì $x^1 = u \in C$, $y^k \in C$ và $\lambda_k + \mu_k + \delta_k = 1$, dãy $\{x^k\} \subset C$ và do vậy $x^k = u, \forall k$. Điều này dẫn đến $x^k \to u \notin \mathcal{X}$ và như vậy Phát biểu 3.1.3 là sai.

(d) Lấy $x^1 \in C$ sao cho $x^1 \neq (0,0)$ và đặt $F(x) = x^1$. Khi đó các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ được sinh bởi Phát biểu 3.1.4 có dạng

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_k}\langle y - y^k, y^k - x^k\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ x^{k+1} = \lambda_k F(x^k) + \mu_k P_C(x^k) + \delta_k y^k. \end{cases}$$

Vì vậy

$$x^{k+1} = \lambda_k x^1 + \mu_k x^k + \delta_k P_C(x^k).$$

Từ $x^1 \in C$ và $\lambda_k + \mu_k + \delta_k = 1$ ta có $x^k = x^1, \forall k$. Vì $x^1 \notin \mathcal{X}$ nên Phát biểu 3.1.4 là sai.

(e) Trước tiên, ta chỉ ra rằng song hàm f_1 thỏa mãn giả thiết $(\mathcal{C}_5)$. Với mục đích đó, cố định $r > 0$ và $z \in C$, ta có

$$\begin{aligned} f_1(y,x) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ &\quad + \frac{1}{r}\big((y_1 - z_1)(z_1 - x_1) + (y_2 - z_2)(z_2 - x_2)\big) \\ &= y_1\big(\frac{1}{r}(z_1 - x_1) - x_2\big) + y_2(x_1 + \frac{1}{r}(z_2 - x_2)) \\ &\quad - \frac{1}{r}\big(z_1(z_1 - x_1) + z_2(z_2 - x_2)\big). \end{aligned}$$

Bằng cách chọn $x = (z_1, z_2 + r(z_1 + 1))$, ta có $x \in C$ và

$$f_1(y, x) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle = -y_1(z_2 + r(z_1 + 1)) - y_2 + z_2(z_1 + 1). \quad (3.2)$$

Bằng cách đặt

$$B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_1| \le z_1 + 1, |y_2| \le z_2 + r(z_1 + 1) + z_2(z_1 + 1)\},$$

ta có B là tập con lồi, com pắc, khác rỗng trong $\mathbb{R}^2$ và

$$x = (z_1, z_2 + r(z_1 + 1)) \in C \cap B.$$

Từ (3.2) ta có

$$f_1(y, x) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle < 0, \ \forall y \in C \setminus B.$$

Tương tự, f_2 thỏa mãn giả thiết $(\mathcal{C}_5)$.

Lấy $x^1 = x^0 \in C$ sao cho $x^0 \ne (0, 0)$. Khi đó $y^k = x^k$, $z^k = x^k$ với mọi k và dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán trong Phát biểu 3.1.5 trở thành $x^k = x^1$, $\forall k$. Vì vậy, Phát biểu 3.1.5 là sai. □

Từ Định lý 3.2.1 ta có thể thấy rằng với các giả thiết $(\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_4)$ khẳng định

$$\cap_{i=1}^{N}\mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, f),$$

không phải luôn đúng. Vì vậy một câu hỏi tự nhiên là với điều kiện nào thì đẳng thức này đúng. Định lý sau cho ta câu trả lời với giả thiết:

$(\mathcal{C}'_2)$ φ là para-giả đơn điệu (*parapseudomonotone) trên* C.

Định lý 3.2.3. *Giả sử các song hàm* $f_i, i = 1, 2, \ldots$ *thỏa mãn các giả thiết* $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}'_2), (\mathcal{C}_3)$ *và* $(\mathcal{C}_4)$, *sao cho* $\cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Sol}(C, f_i) \ne \emptyset$ *và* $f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x, y)$, *với* $\alpha_i > 0, \forall i = 1, 2, \ldots$ *và* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i = 1$ *là song hàm xác định tốt trên* C, *tức là,* $f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x, y)$ *hội tụ với* $\forall x, y \in C$. *Khi đó*

$$\cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, f). \quad (3.3)$$

Chứng minh. Theo giả thiết và bao hàm thức ở (3.1), ta có

$$\emptyset \neq \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Sol}(C, f_i) \subset \mathrm{Sol}(C, f).$$

Do đó, ta chỉ cần chứng tỏ bao hàm thức ngược lại. Với mục đích đó, ta lấy $x^* \in \mathrm{Sol}(C, f)$, khi đó,

$$f(x^*, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C. \tag{3.4}$$

Lấy $\bar{x} \in \cap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Sol}(C, f_i)$ ta có

$$f_i(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in C \text{ và } \forall i = 1, 2, \ldots$$

và, đặc biệt

$$f_i(\bar{x}, x^*) \geq 0, \forall i. \tag{3.5}$$

Vì các song hàm f_i là giả đơn điệu trên C, nên

$$f_i(x^*, \bar{x}) \leq 0, \ \forall i. \tag{3.6}$$

Cố định $j \geq 1$ và thay y bởi $\bar{x}$ trong (3.4), ta nhận được

$$0 \leq \alpha_j f_j(x^*, \bar{x}) + \sum_{j \neq i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x^*, \bar{x})$$

và theo (3.6) ta có

$$f_j(x^*, \bar{x}) \geq 0. \tag{3.7}$$

Từ các bất đẳng thức (3.6) và (3.7) suy ra

$$f_j(x^*, \bar{x}) = 0, \ \forall j. \tag{3.8}$$

Do các song hàm f_i là giả đơn điệu trên C, nên ta có $f_j(\bar{x}, x^*) \leq 0$, với mọi j. Kết hợp điều này với (3.5) ta được

$$f_j(\bar{x}, x^*) = 0, \ \forall j. \tag{3.9}$$

Sử dụng (3.8) và (3.9) với tính para-giả đơn điệu của mỗi f_j, ta nhận được

$$x^* \in \mathrm{Sol}(C, f_j), \ \forall j.$$

Vì vậy

$$x^* \in \cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Sol}(C, f_i).$$

Chứng minh định lý được hoàn thành. □

Nhận xét 3.2.4.

- Từ chứng minh trên, ta thấy rằng Định lý 3.2.3 vẫn đúng khi $\mathbb{H}$ là không gian Banach thực.

- Với các giả thiết $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}'_2), (\mathcal{C}_3)$, $(\mathcal{C}_4)$ và $\cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Sol}(C, f_i) \neq \emptyset$, song hàm f có thể không xác định tốt trên C, thậm chí song hàm f không xác định tại mọi điểm $(x, y) \in C \times C$ mà $x \neq 0$ hoặc $x \neq y$. Thật vậy, ta xét ví dụ sau:

  $$f_i(x, y) = 4^i x(y - x), \ \forall x, y \in C = [0, +\infty) \text{ và } i = 1, 2, \ldots$$

  Khi đó có thể thấy rằng các song hàm f_i thỏa mãn:

  i) $f_i(x, x) = 0$, $\forall x \in C$;

  ii) f_i là para-giả đơn điệu trên C;

  iii) f là liên tục trên C;

  iv) Với mỗi $x \in C, f_i(x, \cdot)$ là nửa liên tục dưới và lồi trên C,

  với $\forall i \geq 1$ và $\cap_{i=1}^{\infty}\mathrm{Sol}(C, f_i) = \{0\}$. Tuy nhiên, với $\alpha_i = 2^{-i}$, song hàm tổ hợp $f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i x(y - x)$ là không xác định tốt trên C. Chẳng hạn, ta có: $f(1, 2) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i = \infty$.

- Lấy $f_i(x, y) = 0$ với mọi $i > N$, công thức (3.3) trở thành

  $$\cap_{i=1}^{N}\mathrm{Sol}(C, f_i) = \mathrm{Sol}(C, f).$$

  Do đó, Phát biểu 3.1.1 là đúng khi giả thiết $(\mathcal{C}_2)$ được thay thế bởi giả thiết $(\mathcal{C}'_2)$.

- Các tác giả trong [66] đã khẳng định rằng với các giả thiết $(\mathcal{C}_1)-(\mathcal{C}_4)$ thì $f_i(\bar{x}, x^*) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, N$, trong đó $\bar{x} \in \mathrm{Sol}(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i)$ và $x^* \in \Omega$. Nhưng điều này với giả thiết $(\mathcal{C}_1)$ không nhất thiết dẫn đến $\bar{x} = x^*$. Thật vậy, trong Định lý 3.2.1, ta đã có:

$$\mathrm{Sol}\left(C, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i\right) = [0, \infty) \times [0, \infty) \ni (1, 1) = \bar{x} \neq x^* = (0, 0) = \Omega.$$

- Các Phát biểu 3.1.2 - 3.1.5 là đúng nếu giả thiết $(\mathcal{C}_2)$ được thay thế bởi giả thiết $(\mathcal{C}_{2bis})$:
$(\mathcal{C}_{2bis})$ φ là para-đơn điệu trên C.

- Khi bài toán cân bằng trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân thì Phát biểu 3.1.1 vẫn không đúng. Chẳng hạn, ta xét tập $C = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, và các ánh xạ F_1, F_2 xác định trên C, được cho bởi:

$$F_1(x) = (x_2, -x_1), F_2(x) = (-x_2, x_1).$$

Khi đó, ta nhận được

$$\langle F_1(x), y - x\rangle = x_2 y_1 - x_1 y_2 = f_1(x, y),$$

$$\langle F_2(x), y - x\rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 = f_2(x, y),$$

tức là, các bài toán bất đẳng thức biến phân đó chính là các bài toán cân bằng với các song hàm f_1 và f_2 đã xét trong chứng minh Định lý 3.2.1.

- Mặc dù có thể xét một cách hình thức bài toán cân bằng tổ hợp cho một họ vô hạn đếm được các song hàm, tuy nhiên song hàm tổ hợp, dù có xác định tốt, chưa chắc đã có những tính chất tốt như những song hàm thành phần (tính nửa liên tục trên theo tia và tính nửa liên tục dưới). Vì thế các thuật toán trong các phát biểu 3.1.2 - 3.1.5 cho một họ đếm được các bài toán cân bằng đơn điệu, chưa chắc đã hội tụ.

Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi đã chỉ ra rằng với giả thiết các song hàm $f_i, i = 1, 2, \ldots, N$ là đơn điệu, tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng không bằng nhau. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra được điều kiện đủ để hai tập nghiệm đó bằng nhau không chỉ trong trường hợp họ các song hàm là hữu hạn $(f_i, i = 1, 2, \ldots, N)$ mà còn trong cả trường hợp vô hạn $(f_i, i = 1, 2, \ldots)$.

Chương 4

Một thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động

Trong những năm gần đây, bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động và các biến thể của nó đã được nghiên cứu bởi rất nhiều nhà khoa học. Có thể kể đến một số công trình tiêu biểu như [2, 5, 15, 16, 30, 74–76]. Đặc biệt, trong luận án tiến sĩ của mình, tác giả T.N. Hải [2] đã đề xuất thuật toán tìm kiếm theo tia Armijo kết hợp với kỹ thuật lai ghép để tìm nghiệm chung của họ hữu hạn các bài toán cân bằng với các song hàm là giả đơn điệu và bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn. Trong chương này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới tìm điểm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu và bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa không giãn trong không gian Hilbert. Thuật toán này có thể được xem như là sự kết hợp giữa phương pháp dưới đạo hàm tăng cường (subgradient extragradient) cho bài toán cân bằng và phương pháp Ishikawa cho bài toán điểm bất động. Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp sinh ra bởi thuật toán tới nghiệm chung của bài toán thu được dưới các giả thiết chính là ánh xạ điểm bất động nửa đóng (demiclosed) tại 0 và các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f có thể không biết. Phần cuối của chương là một số ví dụ số được triển khai để minh họa cho hiệu quả tính toán của thuật toán được đề xuất.

Nội dung chính của chương này đã được công bố trong bài báo [CT3] thuộc Danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

[CT3] H.D. Manh, N.T.T. Ha, T.T.H. Thanh, and B.V. Dinh (2020), The

Ishikawa subgradient extragradient method for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, *Numerical Functional Analysis and Optimization.* **41** (9), pp. 1065–1088, (SCIE).

4.1 Mở đầu

Giả sử C là tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng trên C, $T : C \to C$ là ánh xạ tựa không giãn, với $\mathrm{Fix}(T)$ là tập các điểm bất động của ánh xạ T. Trong chương này, chúng tôi xét bài toán sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \begin{cases} f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C \\ T(x^*) = x^*. \end{cases} \tag{4.1}$$

Chúng ta bắt đầu chương này bằng việc nhắc lại một thuật toán trong bài báo [31]. Để tìm nghiệm chung của tập nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ và tập các điểm bất động của ánh xạ κ-nửa co T, trong [31] tác giả đã đề xuất sửa đổi phương pháp dưới đạo hàm tăng cường đối với bài toán bất đẳng thức biến phân trong [17, 44] để có được thuật toán sau:

Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường Halpern [31] (Thuật toán HSEM)

Chọn $x^0 \in C$ và các tham số λ, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ sao cho $0 < \lambda < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$.

$0 < \alpha_k < 1$, $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} = +\infty$; $0 < a \leq \beta_k \leq \frac{1-\kappa}{2}$.

Trong đó c_1, c_2 là các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f, và κ là hệ số nửa co của ánh xạ T.

Bước 1. Giải hai bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\begin{cases} y^k = \arg\min\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}, \\ z^k = \arg\min\{\lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in H_k\}, \end{cases}$$

trong đó, $H_k = \{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \lambda w^k - y^k, x - y^k\rangle \leq 0\}$ và $w^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$.

Bước 2. Tính $t^k = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k) z^k$,

$$x^{k+1} = \beta_k T(t^k) + (1 - \beta_k) t^k.$$

Đặt $k := k + 1$ và quay lại *Bước 1.*

Thuật toán HSEM trong [31] là sự kết hợp giữa phương pháp dưới đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng với phương pháp lặp Halpern đối với ánh xạ T, trong đó song hàm f là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, T là ánh xạ nửa co với hệ số κ và nửa đóng tại 0. Ưu điểm chính của thuật toán này là chỉ yêu cầu giải một bài toán lồi mạnh trên tập C, còn bài thứ hai là trên một nửa không gian H_k. Hơn nữa, dãy lặp $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới một nghiệm $x^* = P_{\mathcal{S}}(x^0)$ của bài toán với giả thiết bài toán có nghiệm, tức là tập nghiệm $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Tuy nhiên, trong thuật toán này, tham số λ phải thỏa mãn điều kiện $0 < \lambda < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$, trong đó c_1, c_2 là các hằng số kiểu Lipschitz. Khi các hằng số kiểu Lipschitz c_1, c_2 có thể không biết hoặc khó ước lượng thì ta không thể áp dụng một cách trực tiếp thuật toán này.

Để khắc phục hạn chế này, trong phần tiếp theo chúng tôi đề xuất một thuật toán mới bằng cách mở rộng thuật toán trên để tìm nghiệm của bài toán (4.1), trong đó song hàm f là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và T là ánh xạ tựa không giãn. Một cách chính xác, chúng tôi đề xuất sử dụng thuật toán dưới đạo hàm tăng cường trong [8, 39] để giải bài toán cân bằng kết hợp với phương pháp lặp Ishikawa đối với ánh xạ T thay thế cho quá trình lặp của Halpern như trong Thuật toán 4.1 trong [31]. Hơn nữa, thuật toán của chúng tôi có thể được áp dụng trực tiếp cho trường hợp các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f chưa biết bằng cách thay đổi bước lặp λ một cách thích hợp, cập nhật liên tục.

4.2 Một thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động

Để giải bài toán (4.1) tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động, chúng tôi giả sử song hàm f thỏa mãn các giả thiết sau đây.

Giả thiết $\mathcal{D}$.

$(\mathcal{D}_1)$ f là liên tục yếu trên $C \times C$;

($\mathcal{D}_2$) $f(x, \cdot)$ là lồi và khả dưới vi phân trên C với mọi $x \in C$;

($\mathcal{D}_3$) f là giả đơn điệu trên C tương ứng với $\mathrm{Sol}(C, f)$;

($\mathcal{D}_4$) f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz trên C;

($\mathcal{D}_5$) T là ánh xạ tựa không giãn sao cho $I - T$ là nửa đóng tại 0, tức là thỏa mãn tính chất: $\forall \{x^k\} \subset C$, $x^k \rightharpoonup x$, và $T(x^k) - x^k \to 0$, thì $T(x) = x$.

Giả sử $\varphi : C \to (-\infty; +\infty]$ là một hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và $\rho > 0$, ánh xạ gần kề của φ với tham số ρ được định nghĩa bởi

$$\mathrm{prox}_{\rho\varphi}(x) = \arg\min\{\rho\varphi(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 : y \in C\}, x \in \mathbb{H}.$$

Ánh xạ gần kề có một số tính chất sau (xem [10]).

Bổ đề 4.2.1. *Với mọi $x \in \mathbb{H}$, $u \in C$, ba khẳng định sau đây là tương đương:*

(i) $u = \mathrm{prox}_{\rho\varphi}(x)$.

(ii) $\frac{x-u}{\rho} \in \partial\varphi(u)$.

(iii) $\langle x - u, y - u\rangle \le \rho\big(\varphi(y) - \varphi(u)\big)$ *với mọi* $y \in C$.

Tiếp theo là một số bổ đề quan trọng được sử dụng cho những nghiên cứu tiếp theo.

Bổ đề 4.2.2. [81, Lemma 2.5] *Giả sử $\{s_k\}$ là một dãy các số thực không âm sao cho:*

$$s_{k+1} \le (1 - \lambda_k)s_k + \lambda_k\delta_k + \eta_k, \forall k \ge 0,$$

trong đó $\{\lambda_k\}, \{\delta_k\}, \{\eta_k\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $\{\lambda_k\} \subset [0, 1]$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$, *hoặc* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - \lambda_k) = 0$;

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty} \delta_k \le 0$;

(iii) $\eta_k \ge 0$ $\forall k \ge 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \eta_k < \infty$.

Khi đó $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = 0.$

Bổ đề 4.2.3. [51, Lemma 2.1]. *Giả sử* $\{r_k\}$ *là một dãy các số thực không âm sao cho tồn tại một dãy con* $\{r_{k_j}\}$ *của* $\{r_k\}$ *thỏa mãn* $r_{k_j} < r_{k_{j+1}}, \forall j \in \mathbb{N}$. *Khi đó tồn tại một dãy không giảm* $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ *sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} m_k = \infty$, *và các tính chất sau được thỏa mãn với mọi* $k \in \mathbb{N}$ *(đủ lớn):*

$$r_{m_k} \leq r_{m_k+1}, \text{ và } r_k \leq r_{m_k+1}.$$

Thực tế, m_k *là số* m *lớn nhất trong tập* $\{1, 2, \ldots, k\}$ *sao cho* $r_m < r_{m+1}$.

Ta biết rằng nếu song hàm f và ánh xạ T thỏa mãn Giả thiết $\mathcal{D}$, thì tập nghiệm $\mathrm{Sol}(C, f)$ của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$ là lồi, đóng (xem [12]) và tập các điểm bất động $\mathrm{Fix}(T)$ cũng lồi và đóng ([10, 33]). Do đó, $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T)$ là tập lồi và đóng. Tuy nhiên, nó không được xác định một cách rõ ràng, chúng ta không thể tìm được điểm $x^* \in \mathcal{S}$ một cách trực tiếp. Trên cơ sở các thuật toán hiện có và các giả thiết trên, thuật toán sau đây cho ta cách tìm $x^* \in \mathcal{S}$.

Thuật toán 4.1

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, $\rho_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$, và chọn dãy $\{\mu_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}, \{\gamma_k\}$ sao cho $\{\mu_k\} \subset [0, 1]$, $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 1$, $\{\alpha_k\} \subset [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \subset (0, 1)$, $\{\beta_k\} \subset [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \subset (0, 1)$, $\{\gamma_k\} \subset [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] \subset (0, 1)$ và $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, \forall k$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải các bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 : \ y \in C\Big\}. \qquad CP(x^k)$$

Bước 2. Chọn $w^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$ sao cho $x^k - \rho_k w^k - y^k \in N_C(y^k)$ và tính

$$z^k = \arg\min\Big\{f(y^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 : \ y \in H_k\Big\},$$

trong đó

$$H_k = \big\{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \rho_k w^k - y^k, x - y^k\rangle \leq 0\}.$$

Bước 3. Tính

$$t^k = \lambda_k x^g + (1-\lambda_k) z^k,$$
$$u^k = \mu_k x^k + (1-\mu_k) T(x^k),$$
$$x^{k+1} = \alpha_k u^k + \beta_k z^k + \gamma_k T(t^k).$$

Đặt $\rho = f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)$ và đặt

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \min\left\{\frac{\delta}{2\rho}\big(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2\big),\ \rho_k\right\}, & \text{nếu } \rho > 0 \\ \rho_k, & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

và quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k+1$.

Nhận xét 4.2.4.

- *Nếu* $f(x,y) = \langle F(x), y - x\rangle$, *với ánh xạ* $F : C \to \mathbb{H}$. *Khi đó Bước 1 và Bước 2 trở thành tìm*

$$y^k = P_C(x^k - \rho_k F(x^k)),$$

  và

$$z^k = P_{H_k}(x^k - \rho_k F(y^k)).$$

  Vì H_k *là một nửa không gian,* z^k *được xác định bởi công thức tường minh.*

- *Luôn tồn tại* $w^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$ *để* $x^k - \rho_k w^k - y^k \in N_C(y^k)$.

- *Từ định nghĩa của dãy* $\{\rho_k\}$ *trong Thuật toán 4.1, có thể thấy rằng* $\{\rho_k\}$ *là dãy giảm. Ngoài ra, nếu* f *thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với các hằng số* L_1 *và* L_2 *trên* C *thì ta có:*

$$\begin{aligned} \rho &= f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k) \\ &\le L_1\|x^k - y^k\|^2 + L_2\|y^k - z^k\|^2 \\ &\le \max\{L_1, L_2\}\big(\|x^k - y^k\|^2 + \|y^k - z^k\|^2\big). \end{aligned}$$

  Do đó $\rho_k \ge \min\{\frac{\delta}{2\max\{L_1, L_2\}},\ \rho_0\}, \forall k.$

Định lý sau cho ta sự hội tụ của Thuật toán 4.1.

Định lý 4.2.5. *Giả sử* $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$, *và dãy* $\{\lambda_k\} \subset (0, 1)$, *thỏa mãn* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. *Khi đó với Giả thiết* $\mathcal{D}$ *các dãy* $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{z^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 4.1 hội tụ mạnh tới nghiệm* $x^* = P_{\mathcal{S}}(x^g)$.

Trước khi trình bày chứng minh Định lý 4.2.5, ta cần chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 4.2.6. *Các dãy* $\{x^k\}, \{z^k\}, \{t^k\}$ *và* $\{u^k\}$ *là bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử $x^* \in \mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T)$. Xuất phát từ định nghĩa của t^k ta có

$$\begin{aligned}
\|t^k - x^*\| &= \|\lambda_k x^g + (1-\lambda_k)z^k - x^*\| \\
&= \|\lambda_k(x^g - x^*) + (1-\lambda_k)(z^k - x^*)\| \\
&\leq \lambda_k\|x^g - x^*\| + (1-\lambda_k)\|z^k - x^*\|.
\end{aligned}$$

Từ định nghĩa của u^k ta có

$$\begin{aligned}
\|u^k - x^*\| &= \|\mu_k x^k + (1-\mu_k)T(x^k) - x^*\| \\
&= \|\mu_k(x^k - x^*) + (1-\mu_k)(T(x^k) - x^*)\| \\
&\leq \mu_k\|x^k - x^*\| + (1-\mu_k)\|x^k - x^*\| \\
&= \|x^k - x^*\|.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Vì

$$z^k = \arg\min\left\{f(y^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 : \; y \in H_k\right\},$$

nên theo Bổ đề 4.2.1, ta suy ra

$$\rho_k(f(y^k, y) - f(y^k, z^k)) \geq \langle x^k - z^k, y - z^k\rangle, \forall y \in H_k.$$

Thay $y = x^*$ vào bất đẳng thức trên, ta được

$$\rho_k(f(y^k, x^*) - f(y^k, z^k)) \geq \langle x^k - z^k, x^* - z^k\rangle. \tag{4.3}$$

Vì $x^* \in \mathrm{Sol}(C, f)$, $y^k \in C$ và $f(x^*, y^k) \geq 0$, từ tính giả đơn điệu của f ta có $f(y^k, x^*) \leq 0$. Do đó, từ (4.3) suy ra

$$-\rho_k f(y^k, z^k) \geq \langle x^k - z^k, x^* - z^k\rangle. \tag{4.4}$$

Bởi vì $\omega^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$, cho nên

$$f(x^k, y) - f(x^k, y^k) \geq \langle \omega^k, y - y^k \rangle, \forall y \in C,$$

do đó,

$$f(x^k, z^k) - f(x^k, y^k) \geq \langle \omega^k, z^k - y^k \rangle,$$

hay

$$\rho_k(f(x^k, z^k) - f(x^k, y^k)) \geq \rho_k \langle \omega^k, z^k - y^k \rangle. \tag{4.5}$$

Lại vì $z^k \in H_k$, nên ta có

$$\langle x^k - \rho_k \omega^k - y^k, z^k - y^k \rangle \leq 0,$$

suy ra

$$\rho_k \langle \omega^k, z^k - y^k \rangle \geq \langle x^k - y^k, z^k - y^k \rangle. \tag{4.6}$$

Từ (4.4), (4.5), và (4.6) ta kết luận rằng

$$2\rho_k(f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)) \geq 2(\langle x^k - z^k, x^* - z^k \rangle + \langle x^k - y^k, z^k - y^k \rangle),$$

hay

$$\begin{aligned} 2\rho_k\big(f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)\big) \geq & \|z^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \\ & + \|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2. \end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \|z^k - x^*\|^2 \leq & \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|z^k - y^k\|^2 \\ & + 2\rho_k(f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)). \end{aligned}$$

Theo định nghĩa của ρ_k ta có

$$\begin{aligned} \|z^k - x^*\|^2 \leq & \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|z^k - y^k\|^2 \\ & + 2\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\rho_{k+1}(f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)) \\ \leq & \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|z^k - y^k\|^2 \\ & + \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2) \\ = & \|x^k - x^*\|^2 - \big(1 - \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta\big)(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Vì $\lim_{k\to\infty} \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta = \delta \in (0;1)$, tồn tại $N \geq 0$ sao cho

$$\|z^k - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|, \forall k \geq N.$$

Rõ ràng là

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\| &= \|\alpha_k u^k + \beta_k z^k + \gamma_k T(t^k) - x^*\| \\ &= \|\alpha_k(u^k - x^*) + \beta_k(z^k - x^*) + \gamma_k(T(t^k) - x^*)\| \\ &\leq \alpha_k\|u^k - x^*\| + \beta_k\|z^k - x^*\| + \gamma_k\|T(t^k) - x^*\|,\end{aligned}$$

do đó, với mọi $k \geq N$ ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\| &\leq (\alpha_k + \beta_k)\|x^k - x^*\| + \gamma_k\|t^k - x^*\| \\ &\leq (\alpha_k + \beta_k)\|x^k - x^*\| + \gamma_k(\lambda_k\|x^g - x^*\| + (1-\lambda_k)\|x^k - x^*\|) \\ &= [\alpha_k + \beta_k + \gamma_k(1-\lambda_k)]\|x^k - x^*\| + \gamma_k\lambda_k\|x^g - x^*\| \\ &= (1 - \gamma_k\lambda_k)\|x^k - x^*\| + \gamma_k\lambda_k\|x^g - x^*\| \\ &\leq \max\{\|x^g - x^*\|, \|x^k - x^*\|\} \leq \cdots \leq \max\{\|x^g - x^*\|, \|x^N - x^*\|\},\end{aligned}$$

vì vậy dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Từ đó, các dãy $\{z^k\}, \{y^k\}, \{t^k\}$, và $\{u^k\}$ bị chặn. Điều này đã hoàn thành chứng minh Bổ đề 4.2.6. □

Bây giờ chúng ta chứng minh Định lý 4.2.5.

Chứng minh. Vì $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ là tập lồi đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, tồn tại duy nhất phần tử $x^* \in \mathcal{S}$ sao cho $x^* = P_{\mathcal{S}}(x^g)$. Theo Mệnh đề 1.1.5, ta có

$$\langle x^g - x^*, p - x^* \rangle \leq 0, \forall p \in \mathcal{S}. \tag{4.8}$$

Từ định nghĩa của x^{k+1}, ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 =& \|\alpha_k u^k + \beta_k z^k + \gamma_k T(t^k) - x^*\|^2 \\ =& \|\alpha_k(u^k - x^*) + \beta_k(z^k - x^*) + \gamma_k(T(t^k) - x^*)\|^2 \\ =& \alpha_k\|u^k - x^*\|^2 + \beta_k\|z^k - x^*\|^2 + \gamma_k\|T(t^k) - x^*\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \alpha_k\beta_k\|u^k - z^k\|^2 - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2 \\
\leq &\alpha_k\|u^k - x^*\|^2 + \beta_k\|z^k - x^*\|^2 + \gamma_k\|T(t^k) - x^*\|^2 \\
&- \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2 \\
\leq &\alpha_k\|u^k - x^*\|^2 + \beta_k\|z^k - x^*\|^2 + \gamma_k\|t^k - x^*\|^2 \\
&- \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Vì vậy

$$
\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq &\alpha_k\|u^k - x^*\|^2 + \beta_k\|z^k - x^*\|^2 + \gamma_k\|\lambda_k x^g + (1-\lambda_k)z^k - x^*\|^2 \\
&- \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2 \\
\leq &\alpha_k\|u^k - x^*\|^2 + \beta_k\|z^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle \\
&+ (1-\lambda_k)\gamma_k\|z^k - x^*\|^2 - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2 \\
= &\alpha_k\|u^k - x^*\|^2 + [\beta_k + (1-\lambda_k)\gamma_k]\|z^k - x^*\|^2 \\
&+ 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2.
\end{aligned}
$$

Kết hợp với (4.2) và (4.7), với mọi $k \geq N$, ta có

$$
\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq &\alpha_k\|x^k - x^*\|^2 \\
&+ [\beta_k + (1-\lambda_k)\gamma_k](\|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|z^k - y^k\|^2) \\
&+ [\beta_k + (1-\lambda_k)\gamma_k]\frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2) \\
&+ 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2 \\
= &(1-\lambda_k\gamma_k)\|x^k - x^*\|^2 - \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta\right)\tau_k\left(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2\right) \\
&+ 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2,
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

trong đó $\tau_k = 1 - \alpha_k - \lambda_k\gamma_k$.

Do đó,

$$
\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq &\|x^k - x^*\|^2 - \left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta\right)\tau_k(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2) \\
&+ 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Chúng ta xét hai trường hợp riêng biệt sau.

Trường hợp 1. Tồn tại $M \geq N$ sao cho

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|, \forall k \geq M,$$

trong trường hợp này, giới hạn của dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ tồn tại, giả sử

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^*\| = a \geq 0.$$

Từ (4.10), ta có

$$\left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta\right)\tau_k(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2) \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2$$
$$+ 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle.$$

Vì $\alpha_k \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \subset (0,1)$ và $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, ta có $\liminf_{k\to\infty} \tau_k \geq 1 - \overline{\alpha} > 0$. Ngoài ra, $\lim\limits_{k\to\infty}(1 - \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}}\delta) = 1 - \delta > 0$, dãy $\{t^k\}$ bị chặn, ta nhận được trong giới hạn của bất đẳng thức trên là

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - y^k\| = 0 \text{ và } \lim_{k\to\infty} \|z^k - y^k\| = 0. \tag{4.11}$$

Do đó, $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - z^k\| = 0$.
Vì $\|u^k - x^k\| = (1 - \mu_k)\|T(x^k) - x^k\|$ và $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 1$, ta được

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - x^k\| = 0. \tag{4.12}$$

Vì vậy, $\lim\limits_{k\to\infty} \|z^k - u^k\| = 0$.
Tương tự, ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \|t^k - z^k\| = 0, \text{ và } \lim_{k\to\infty} \|t^k - x^k\| = 0. \tag{4.13}$$

Vì dãy $\{x^k\}$ bị chặn, tồn tại một dãy con $\{x^{n_k}\}$ hội tụ yếu tới $p^0 \in \mathbb{H}$, sao cho

$$\limsup_{k\to\infty}\langle x^g - x^*, x^k - x^*\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x^g - x^*, x^{n_k} - x^*\rangle = \langle x^g - x^*, p^0 - x^*\rangle. \tag{4.14}$$

Kết hợp với (4.11) và (4.13) ta nhận được các dãy $\{y^{n_k}\}, \{z^{n_k}\}, \{t^{n_k}\}$, $\{u^{n_k}\}$ hội tụ yếu tới p^0 và $p^0 \in C$.

Vì $y^{n_k} = \text{prox}_{\rho_{n_k} f(x^{n_k},.)}(x^{n_k})$, theo Bổ đề 4.2.1, ta có

$$\rho_{n_k}(f(x^{n_k}, y) - f(x^{n_k}, y^{n_k})) \geq \langle x^{n_k} - y^{n_k}, y - y^{n_k}\rangle, \forall y \in C.$$

Cho $k \to \infty$, sử dụng tính liên tục của f và $\lim_{n\to\infty} \rho_{n_k} = \rho > 0$, ta nhận được

$$f(p^0, y) - f(p^0, p^0) \geq 0.$$

Vì vậy

$$f(p^0, y) \geq 0, \forall y \in C.$$

Điều này có nghĩa rằng p^0 là một nghiệm của bài toán $\mathrm{EP}(C, f)$.

Tiếp theo, ta cần chứng tỏ rằng $p^0 \in \mathrm{Fix}(T)$.

Thật vậy, từ (4.9), ta có

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \lambda_k\gamma_k)\|x^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle \\ &\quad - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 - \beta_k\gamma_k\|T(t^k) - z^k\|^2 \\ &\leq (1 - \lambda_k\gamma_k)\|x^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle \\ &\quad - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2.\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{k\to\infty}(\|x^{k+1} - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}(-\lambda_k\gamma_k\|x^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle - \alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2) \\ &= -\limsup_{k\to\infty}\alpha_k\gamma_k\|T(t^k) - u^k\|^2 \leq -\underline{\alpha}\underline{\gamma}\limsup_{k\to\infty}\|T(t^k) - u^k\|^2.\end{aligned}$$

Cho nên,

$$\lim_{k\to\infty}\|T(t^k) - u^k\| = 0.$$

Rõ ràng là

$$\|T(t^k) - t^k\| \leq \|T(t^k) - u^k\| + \|u^k - x^k\| + \|x^k - t^k\|.$$

Kết hợp điều này với (4.12) và (4.13) ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty}\|T(t^k) - t^k\| = 0.$$

Vì dãy $\{t^{n_k}\}$ hội tụ yếu tới p^0, $\lim_{k\to\infty}\|T(t^{n_k}) - t^{n_k}\| = 0$ và $I - T$ là nửa đóng tại 0, ta có thể kết luận rằng $p^0 \in \mathrm{Fix}(T)$. Do vậy

$$p^0 \in \mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, f) \cap \mathrm{Fix}(T).$$

Từ (4.8), (4.14), ta nhận được

$$\limsup_{k\to\infty}\langle x^g - x^*, x^k - x^*\rangle = \langle x^g - x^*, p^0 - x^*\rangle \leq 0.$$

Vì vậy

$$\limsup_{k\to\infty}\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle = \limsup_{k\to\infty}\langle x^g - x^*, t^k - x^k\rangle + \limsup_{k\to\infty}\langle x^g - x^*, x^k - x^*\rangle \leq 0.$$

Từ (4.9), $\forall k \geq M$, ta có

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \lambda_k\gamma_k)\|x^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k\gamma_k\langle x^g - x^*, t^k - x^*\rangle.$$

Theo Bổ đề 4.2.2, ta có

$$\lim_{k\to\infty}\|x^k - x^*\|^2 = 0.$$

Do đó x^k hội tụ mạnh tới x^*.

Trường hợp 2. Tồn tại một dãy con $\{\|x^{n_k} - x^*\|\}$ của dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ sao cho

$$\|x^{n_k} - x^*\| < \|x^{n_k+1} - x^*\|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Từ Bổ đề 4.2.3, tồn tại một dãy không giảm $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$ và bất đẳng thức sau đây thỏa mãn với mọi $k \in \mathbb{N}$

$$\|x^{m_k} - x^*\| \leq \|x^{m_k+1} - x^*\|, \text{và } \|x^k - x^*\| \leq \|x^{m_k+1} - x^*\|. \tag{4.15}$$

Từ (4.10), ta có

$$\left(1 - \frac{\rho_{m_k}}{\rho_{m_k+1}}\delta\right)\tau_{m_k}(\|x^{m_k} - y^{m_k}\|^2 + \|z^{m_k} - y^{m_k}\|^2) \leq \|x^{m_k} - x^*\|^2 - \|x^{m_k+1} - x^*\|^2 + 2\lambda_{m_k}\alpha_{m_k}\langle x^g - x^*, t^{m_k} - x^*\rangle.$$

Vì $\liminf_{k\to\infty}\tau_{m_k} \geq 1 - \overline{\alpha} > 0$ và $\lim\limits_{k\to\infty}(1 - \frac{\rho_{m_k}}{\rho_{m_k+1}}\delta) = 1 - \delta > 0$, nên từ bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\|x^{m_k} - y^{m_k}\| = 0, \ \lim_{n\to\infty}\|z^{m_k} - y^{m_k}\| = 0.$$

Sử dụng biến đổi tương tự như trong chứng minh của Trường hợp 1, ta nhận được

$$\limsup_{k\to\infty}\langle x^g - x^*, t^{m_k} - x^*\rangle \le 0.$$

Với mọi $m_k \ge N$, ta có

$$\|x^{m_k+1} - x^*\|^2 \le (1-\lambda_{m_k}\gamma_{m_k})\|x^{m_k} - x^*\|^2 + 2\lambda_{m_k}\gamma_{m_k}\langle x^g - x^*, t^{m_k} - x^*\rangle.$$

Từ (4.15) ta có

$$\|x^{m_k+1} - x^*\|^2 \le (1-\lambda_{m_k}\gamma_{m_k})\|x^{m_k+1} - x^*\|^2 + 2\lambda_{m_k}\gamma_{m_k}\langle x^g - x^*, t^{m_k} - x^*\rangle.$$

Do đó,

$$\|x^{m_k+1} - x^*\|^2 \le 2\langle x^g - x^*, t^{m_k} - x^*\rangle, \forall m_k \ge N.$$

Từ

$$\limsup_{k\to\infty}\langle x^g - x^*, t^{m_k} - x^*\rangle \le 0,$$

ta nhận được giới hạn

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{m_k+1} - x^*\| = 0 \text{ và } \lim_{k\to\infty}\|x^{m_k} - x^*\| = 0.$$

Từ (4.15), nên ta có $\|x^k - x^*\| \le \|x^{m_k+1} - x^*\|$, do đó, $\lim_{k\to\infty}\|x^k - x^*\| = 0$. Chứng minh định lý được hoàn thành. □

Khi $T \equiv I$- là ánh xạ đồng nhất của $\mathbb{H}$, ta nhận được thuật toán sau để giải bài toán EP(C, f), trong đó các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f không đòi hỏi phải biết.

Thuật toán 4.2

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, $\rho_0 > 0$, $\delta \in (0,1)$ và các dãy $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}$ sao cho $\{\alpha_k\} \subset [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \subset (0,1)$, $\{\beta_k\} \subset [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \subset (0,1)$, $\{\gamma_k\} \subset [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] \subset (0,1)$ và $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, \forall k$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh tìm

$$y^k = \arg\min\Big\{f(x^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 : \ y \in C\Big\}. \qquad \mathrm{CP}(x^k)$$

Bước 2. Chọn $w^k \in \partial_2 f(x^k, y^k)$ sao cho $x^k - \rho_k w^k - y^k \in N_C(y^k)$ và tính

$$z^k = \arg\min\Big\{f(y^k, y) + \frac{1}{2\rho_k}\|y - x^k\|^2 : \ y \in H_k\Big\},$$

trong đó,

$$H_k = \big\{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \rho_k w^k - y^k, x - y^k\rangle \leq 0\}.$$

Bước 3. Tính

$$t^k = \lambda_k x^g + (1 - \lambda_k) z^k,$$

$$x^{k+1} = \alpha_k x^k + \beta_k z^k + \gamma_k t^k.$$

Đặt $\rho = f(x^k, z^k) - f(y^k, z^k) - f(x^k, y^k)$ và đặt

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \min\big\{\frac{\delta}{2\rho}\big(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2\big),\ \rho_k\big\}, & \text{nếu } \ \rho > 0 \\ \rho_k, & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

và quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k + 1$.

Hệ quả sau đây khẳng định sự hội tụ mạnh của Thuật toán 4.2 được suy ra trực tiếp từ Định lý 4.2.5.

Hệ quả 4.2.7. *Giả sử tập* $\mathrm{Sol}(C, f) \neq \emptyset$*, dãy* $\{\lambda_k\} \subset (0, 1)$ *sao cho* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$ *và* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$*. Khi đó với các giả thiết* $(\mathcal{D}_1) - (\mathcal{D}_4)$*, các dãy* $\{x^k\}$*,* $\{y^k\}$ *và* $\{z^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 4.2 hội tụ mạnh tới nghiệm* $x^* = P_{\mathrm{Sol}(C,f)}(x^g)$*.*

Khi $f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle$ với mọi $x, y \in C$, với ánh xạ $F : C \to \mathbb{H}$, bài toán cân bằng $\mathrm{EP}(C, f)$ trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x), y - x\rangle \geq 0,\ \forall y \in C.$$

Ký hiệu $\mathrm{Sol}(C, F)$ là tập nghiệm của bài toán (VIP). Trong trường hợp này, ta nhận được thuật toán tìm phần tử chung của tập nghiệm $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, F) \cap \mathrm{Fix}(T)$ của bài toán (VIP) và tập các điểm bất động của T là ánh xạ tựa không giãn trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ dưới đây.

Thuật toán 4.3

Bước khởi tạo. Chọn $x^0 = x^g \in C$, $\rho_0 > 0$, $\delta \in (0,1)$ và các dãy $\{\mu_k\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ sao cho $\{\mu_k\} \subset [0,1], \lim_{k\to\infty} \mu_k = 1$, $\{\alpha_k\} \subset [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \subset (0,1)$, $\{\beta_k\} \subset [\underline{\beta}, \overline{\beta}] \subset (0,1)$, $\{\gamma_k\} \subset [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] \subset (0,1)$ và $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1$, $\forall k$.

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Có x^k thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính

$$y^k = P_C(x^k - \rho_k F(x^k)).$$

Bước 2. Lấy $w^k = x^k$ và tính

$$z^k = P_{H_k}(x^k - \rho_k F(y^k)),$$

trong đó,

$$H_k = \big\{x \in \mathbb{H} : \langle x^k - \rho_k w^k - y^k, x - y^k\rangle \le 0\}.$$

Bước 3. Tính

$$\begin{aligned} t^k &= \lambda_k x^g + (1 - \lambda_k) z^k, \\ u^k &= \mu_k x^k + (1 - \mu_k) T(x^k), \\ x^{k+1} &= \alpha_k u^k + \beta_k z^k + \gamma_k T(t^k). \end{aligned}$$

Đặt $\rho = \langle F(x^k), z^k - x^k\rangle - \langle F(y^k), z^k - y^k\rangle - \langle F(x^k), y^k - x^k\rangle$ và đặt

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \min\big\{\frac{\delta}{2\rho}\big(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2\big),\ \rho_k\big\}, & \text{nếu } \ \rho > 0 \\ \rho_k, & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

quay về **Bước lặp** k với k được thay bởi $k+1$.

Từ Định lý 4.2.5, chúng ta có hệ quả sau đây về sự hội tụ mạnh của Thuật toán 4.3.

Hệ quả 4.2.8. *Giả sử* $\mathcal{S} = \mathrm{Sol}(C, F) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$, *và dãy* $\lambda_k \in (0,1)$ *thỏa mãn* $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. *Khi đó với Giả thiết* $\mathcal{D}$ *các dãy* $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{z^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 4.3 hội tụ mạnh tới nghiệm* $x^* = P_{\mathcal{S}}(x^g)$.

4.3 Một số ví dụ minh họa

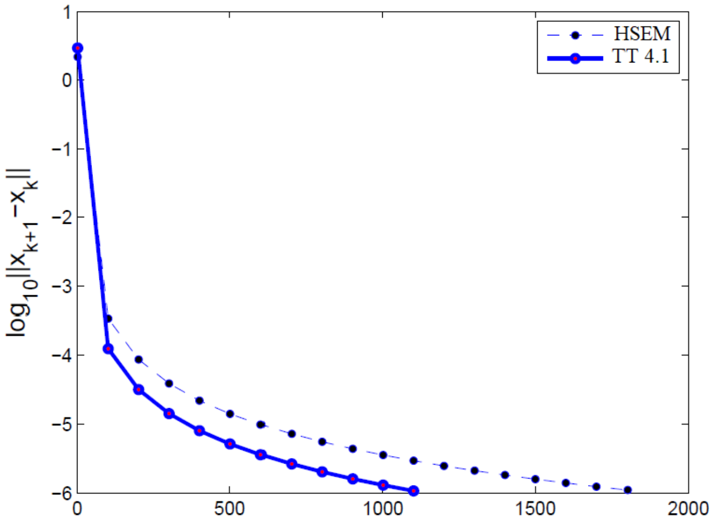
Trong phần cuối cùng của chương, ta xét một số ví dụ minh họa cho sự hội tụ của Thuật toán 4.1, đồng thời so sánh nó với một thuật toán dưới đạo hàm tăng cường Halpern (xem Thuật toán HSEM) trong [31].

Chúng tôi tiến hành các tính toán cho Thuật toán 4.1 và Thuật toán HSEM trong [31] bằng ngôn ngữ lập trình Matlab, phiên bản R2014 và được thực hiện trên Laptop với cấu hình Intel(R) Core (TM) i3-4005U @ 1.70GHz, 1700 Mhz, 2 Core(s), 4G Ram. Để kết thúc các thuật toán, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn dừng $Err = \left\|x^{k+1} - x^k\right\| \le \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$.

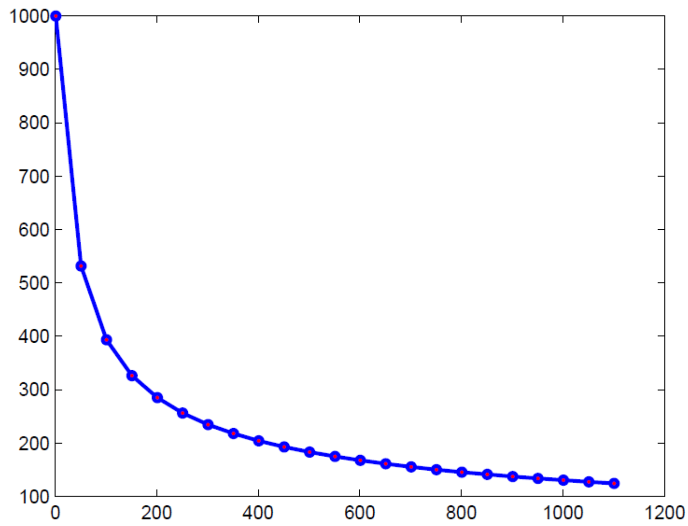
Ví dụ 4.3.1. Trong ví dụ này, chúng tôi xét bài toán trong không gian $\mathbb{H} = \mathbb{R}^5$ và song hàm $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ xuất phát từ mô hình cân bằng Nash-Cournot [18, 62] được định nghĩa như sau.

$$f(x, y) = \langle Px + Qy + q, y - x \rangle,$$

trong đó, $P, Q \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ là hai ma trận cấp năm sao cho ma trận Q là đối xứng, nửa xác định dương và ma trận $Q - P$ là nửa xác định âm. Từ các kết quả trong [62],



Hình 4.1: Số bước lặp của các Thuật toán 4.1 và HSEM trong Ví dụ 4.3.1



Hình 4.2: Sự thay đổi của ρ_k trong Ví dụ 4.3.1

song hàm f thỏa mãn các điều kiện $(\mathcal{D}_1) - (\mathcal{D}_4)$ với các hằng số kiểu Lipschitz $L_1 = L_2 = \frac{\|P-Q\|}{2}$. Chúng tôi lấy dữ liệu trong [62], chi tiết như sau,

$$P = \begin{bmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

và $q = (1, -2, -1, 2, -1)^T$, $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \sum\limits_{i=1}^{5} x_i \geq -1, -5 \leq x_i \leq 5, i = \overline{1;5} \right\}$.

Ta xét ánh xạ $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ được cho bởi công thức sau:

$$T(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} T_i(x),$$

trong đó

$$T_i(x) = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_5) & \text{nếu } x_i \leq a_i \\ (x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_5) & \text{nếu } x_i > a_i, \end{cases}$$

với $i = \overline{1;5}$ và $a = (1, 1, 1, 1, 1)^T$.

Từ [82] ta có thể thấy rằng T là ánh xạ tựa không giãn và $\mathrm{Fix}\,(T) = \bigcap_{i=1}^{5} \mathrm{Fix}\,(T_i)$. Chúng tôi minh họa sự hội tụ của Thuật toán 4.1 và so sánh nó với Thuật toán HSEM [31] như sau. Trong Thuật toán HSEM, ta lấy $\lambda = \frac{\|P-Q\|}{4}$, $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$, $\beta_k = \frac{1}{2}$. Còn trong Thuật toán 4.1, ta chọn $\rho = 1000$, $\delta = 0.9$, $\lambda = \frac{1}{k+1}$, $\mu_k = 1 - \frac{1}{k+1}$, $\alpha_k = 0.2$, $\beta_k = 0.4$, $\gamma_k = 0.4$. Điểm xuất phát là $x_0 = (1, 3, 1, 1, 2)^T$. Tiêu chuẩn dừng là $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \varepsilon$ với $\varepsilon = 10^{-6}$. Trong trường hợp này,

- nghiệm xấp xỉ được tính cho Thuật toán 4.1 là

$$(-0.724815, 0.803666, 0.720101, -0.866164, 0.200635)^T,$$

- nghiệm xấp xỉ được tính cho Thuật toán HSEM [31] là

$$(-0.724586, 0.80402, 0.719916, -0.865651, 0.201025)^T.$$

Kết quả chi tiết được đưa ra trong Bảng 4.1 và trong Hình 4.1. Ngoài ra, sự thay đổi của tham số ρ_k cũng được đưa ra trong Hình 4.2.

	Thuật toán 4.1	Thuật toán HSEM
Iter(k)	1139	1888
Cpu(s)	45.74	74.02

Bảng 4.1: Số bước lặp và thời gian CPU (tính bằng giây) được tính theo các Thuật toán 4.1 và HSEM trong Ví dụ 4.3.1

Từ Bảng 4.1 ta có thể thấy rằng Thuật toán 4.1 chiếm ưu thế hơn Thuật toán HSEM trong [31] về cả số bước lặp và thời gian chạy thuật toán.

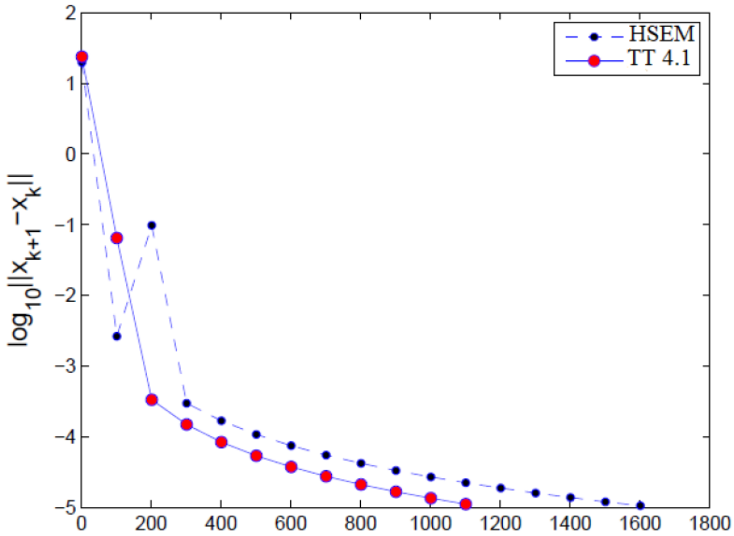
Ví dụ 4.3.2. Với song hàm f như trong Ví dụ 4.3.1, trong ví dụ này, hai ma trận $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ được sinh ngẫu nhiên và véc tơ q được chọn ngẫu nhiên với các phần tử của nó thuộc $[-n, n]$. Tập chấp nhận được C là một tập lồi đa diện và được xác định như sau

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, lb \leq x \leq ub\},$$

trong đó A là một ma trận cấp $m \times n$ ($n = 5, 10, 15, 20$ và $m = 50, 100$) với các phần tử của nó được sinh ngẫu nhiên trong $[-2, 2]$, và $b \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ với các thành phần của nó được tạo ngẫu nhiên trong $[1, 3]$, lb là véc tơ không, ub là một véc tơ với các phần tử được tạo ngẫu nhiên trong $[0, n]$. Ánh xạ T được xác định bởi

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } \|x\| \le 2, \\ \frac{2x}{\|x\|} & \text{nếu } \|x\| > 2. \end{cases}$$

Các tham số trong cả hai thuật toán được chọn như trong Ví dụ 4.3.1. Tiêu chuẩn dừng là $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \le \varepsilon = 10^{-5}$. Các kết quả được tính toán theo Thuật toán 4.1 và HSEM được hiển thị trong bảng Bảng 4.2 và trong Hình 4.3 (với $m = 100, n = 20$).



Hình 4.3: Số bước lặp của các Thuật toán 4.1 và HSEM trong Ví dụ 4.3.2.

Ví dụ 4.3.3. Trong ví dụ tiếp theo, hai ma trận $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tập chấp nhận được C, và các tham số trong các Thuật toán 4.1 và HSEM được chọn như trong Ví dụ 4.3.2, q là véc tơ không. Ánh xạ T được cho bởi

$$T(x) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} T_i(x),$$

n	m = 50				m=100			
	Thuật toán 4.1		Thuật toán HSEM		Thuật toán 4.1		Thuật toán HSEM	
	Cpu(s)	Iter(k)	Cpu(s)	Iter(k)	Cpu(s)	Iter(k)	Cpu(s)	Iter(k)
5	20.82	430	23.99	594	23.96	440	26.09	622
10	41.15	805	49.89	1136	40.60	800	56.22	1134
15	43.91	1139	67.91	1888	53.83	923	71.93	1306
20	137.37	1133	172.51	1602	160.82	1160	215.40	1640

Bảng 4.2: Kết quả tính toán cho Ví dụ 4.3.2.

n	m = 50				m = 100			
	Thuật toán 4.1		Thuật toán HSEM		Thuật toán 4.1		Thuật toán HSEM	
	Cpu(s)	Iter(k)	Cpu(s)	Iter(k)	Cpu(s)	Iter(k)	Cpu(s)	Iter(k)
5	13.28	454	19.48	643	17.83	399	23.87	563
10	21.41	747	31.80	1056	30.89	709	45.20	1006
15	37.23	886	49.39	1252	44.29	941	64.85	1330
20	55.26	1106	70.33	1564	53.84	1130	78.34	1601

Bảng 4.3: Kết quả tính toán cho Ví dụ 4.3.3.

trong đó

$$T_i(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } \|x - a^i\| \leq 2 \\ \frac{2(x-a^i)}{\|x-a^i\|} & \text{nếu } \|x - a^i\| > 2, \end{cases}$$

với $i = 1; 2$ và

$$T_3(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } \langle c, x\rangle \leq 1 \\ x - \frac{\langle c,x\rangle c}{\|c\|^2} & \text{nếu } \langle c, x\rangle > 1, \end{cases}$$

$a^1 = (-2, 0, \dots, 0)^T, a^2 = (2, 0, \dots, 0)^T, c = (1, 1, \dots, 1)^T.$

Như trước đó, ta chọn sai số $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \varepsilon = 10^{-5}$. Các kết quả được hiển thị trong Bảng 4.3.

Từ các ví dụ trên, chúng ta có thể thấy rằng, với cùng ngưỡng sai số, Thuật toán 4.1 có lợi thế hơn so với Thuật toán HSEM, đặc biệt là về số bước lặp (Iter.)

và thời gian thực hiện (CPU(s)).

Ví dụ 4.3.4. Trong ví dụ cuối cùng, chúng tôi giả sử rằng $\mathbb{H} = L^2([0,1])$ với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle := \int_0^1 x(t)y(t)dt,$$

và chuẩn cảm sinh

$$\|x\| := \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 dt}, \ \forall x \in \mathbb{H}.$$

Chúng tôi xét tập chấp nhận được

$$C = \{x \in \mathbb{H} : \ \|x\| \leq 1\},$$

và song hàm $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ được cho bởi (xem [79])

$$f(x,y) = \left\langle \left(\frac{3}{2} - \|x\|\right) x, y - x \right\rangle.$$

Từ kết quả của [79], song hàm thỏa mãn Điều kiện $(\mathcal{D}_4)$ với các hằng số kiểu Lipschitz $L_1 = L_2 = \frac{7}{4}$. Ánh xạ T được cho bởi

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } \|x\| \leq 1, \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{nếu } \|x\| > 1. \end{cases}$$

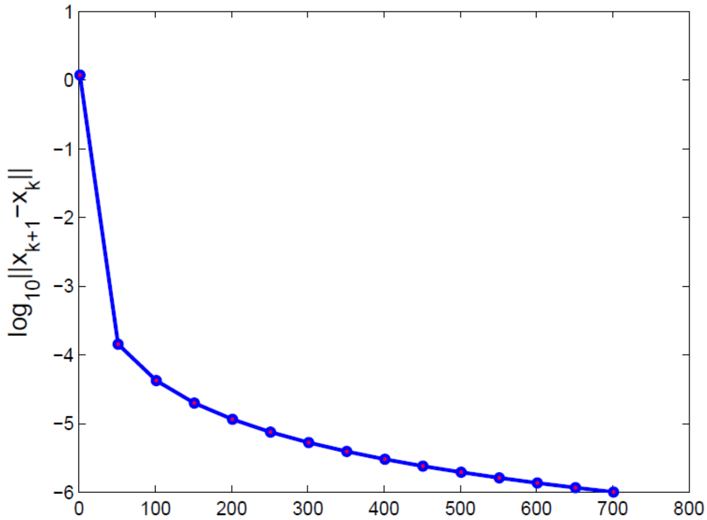
Ta chọn $\rho_0 = 6, \delta = 0.9, \lambda_k = \frac{1}{k+1}, \mu_k = 1 - \frac{1}{k+1}, \beta_k = 0.4, \gamma_k = 0.4$. Điểm xuất phát là $x^0 = \frac{1}{20}(\sin(-3t) + \cos(-10t))$, tiêu chuẩn dừng là $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon = 10^{-6}$. Các kết quả được hiển thị ở Bảng 4.4 và Hình 4.4.

	Iter(k)	Cpu(s)
Thuật toán 4.3	705	1.28

Bảng 4.4: Thử nghiệm cho Ví dụ 4.3.4

Bảng 4.1, Bảng 4.2, Bảng 4.3 và Bảng 4.4 có các ký hiệu như sau:

- Iter(k): bước lặp thứ k.
- Cpu(s): thời gian tính toán tính bằng giây.



Hình 4.4: Số bước lặp của Thuật toán 4.3 trong Ví dụ 4.3.4.

Kết luận Chương 4

Trong chương này chúng tôi đã đưa ra một thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động. Thuật toán này là sự kết hợp giữa phương pháp dưới đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng với song hàm là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz, và phương pháp lặp Ishikawa đối với ánh xạ tựa không giãn. Sự hội tụ mạnh của thuật toán thu được khi các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm có thể không được biết trước. Cuối chương chúng tôi đưa ra một vài ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của thuật toán đề xuất.

Kết luận

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu một số vấn đề về bài toán cân bằng tổ hợp, xây dựng thuật toán giải bài toán cân bằng không đơn điệu, và phương pháp tìm nghiệm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- *Xây dựng được hai Thuật toán 2.1 và 2.2 bằng cách kết hợp phương pháp chiếu nhúng và các quy tắc tìm kiếm tia tương ứng để giải bài toán cân bằng mà song hàm là không đơn điệu. Chứng minh được dãy lặp sinh bởi các thuật toán đó hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng (Định lý 2.2.9 và Định lý 2.2.12), đồng thời áp dụng thuật toán vào mô hình cân bằng thị trường điện bán độc quyền Nash-Cournot. Kết quả này được thể hiện ở [CT1].*

- *Chứng minh được tập nghiệm của bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của họ các bài toán cân bằng là không bằng nhau khi các song hàm là đơn điệu (Định lý 3.2.1). Chúng tôi cũng đưa ra một điều kiện đủ để hai tập nghiệm đó bằng nhau trong cả trường hợp hữu hạn ($f_i, i = 1, 2, ..., N$) và trường hợp vô hạn ($f_i, i = 1, 2, ...$) (Định lý 3.2.3). Kết quả này được thể hiện ở [CT2].*

- *Bằng cách kết hợp phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với phương pháp lặp Ishikawa, chúng tôi đã đề xuất thuật toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng $EP(C, f)$ với song hàm f là giả đơn điệu, thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz và bài toán điểm bất động của ánh xạ tựa* *không giãn T (Thuật toán 4.1). Chúng tôi đã chứng minh được dãy lặp sinh bởi thuật toán hội tụ mạnh tới nghiệm chung của bài toán đang xét (Định lý 4.2.5), đồng thời trình bày một số ví dụ minh họa cho thuật toán đề xuất. Kết quả này được thể hiện ở [CT3].*

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề chúng tôi tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới là:

- *Xây dựng một số thuật toán không phải kiểu chiếu nhúng giải bài toán cân bằng không đơn điệu trong không gian Hilbert và không gian Banach.*

- *Tiếp tục nghiên cứu mối quan hệ giữa tập nghiệm của Bài toán cân bằng tổ hợp và giao các tập nghiệm của các bài toán cân bằng với các giả thiết nhẹ hơn về tính para-đơn điệu, para-giả đơn điệu, đồng thời áp dụng vào một lớp bài toán liên quan đến tập nghiệm chung của một họ các bài toán cân bằng.*

- *Xây dựng thuật toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động trong trường hợp song hàm là không đơn điệu.*

Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án

[CT1] B.V. Dinh, N.T.T. Ha, N.N. Hai, and T.T.H. Thanh (2018), Strong convergence algorithms for equilibrium problems without monotonicity, *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization,* **9** (2), pp. 139-150.

[CT2] N.T.T. Ha, T.T.H. Thanh, N.N. Hai, H.D. Manh, and B.V. Dinh (2019), A note on the combination of equilibrium problems, *Mathematical Methods of Operations Research*, **91**, pp. 311-323, (SCIE).

[CT3] H.D. Manh, N.T.T. Ha, T.T.H. Thanh, and B.V. Dinh (2020), The Ishikawa subgradient extragradient method for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, *Numerical Functional Analysis and Optimization,* **41** (9), pp. 1065–1088, (SCIE).

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Bùi Văn Định (2014), *Một số phương pháp giải bài toán cân bằng giả đơn điệu và ứng dụng*, Luận án tiến sĩ, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

[2] Trịnh Ngọc Hải (2018), *Một số phương pháp giải bài toán cân bằng có cấu trúc*, Luận án tiến sĩ, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội.

[3] Đỗ Văn Lưu và Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi.* Nxb Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[4] Lê Dũng Mưu (1998), *Nhập môn các phương pháp tối ưu.* Nxb Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

Tiếng Anh

[5] P.K. Anh, D.V. Hieu (2016), Parallel hybrid methods for variational inequalities, equilibrium problems and common fixed point problems, *Vietnam J. Math,* **44**(2), pp. 351-374.

[6] P.N. Anh (2013), A hybrid extragradient method for pseudomonotone equilibrium problems and fixed problems, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **36**(1), pp. 107-116.

[7] P.N. Anh (2013), A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems, *Optimization,* **62**(2), pp. 271-283.

[8] P.N. Anh, L.T.H. An (2015), The subgradient extragradient method extended to equilibrium problems, *Optimization,* **64**(2), pp. 225-248.

[9] L. Armijo (1966), Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives, *Pacific J. Math.*, **16**, pp. 1-3.

[10] H.H. Bauschke and P.L. Combettes (2011), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces,* New York, Springer.

[11] M. Bianchi, S. Schaible (1996), Generalized monotone bifunction and equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **90**, pp. 31-43.

[12] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, and M. Passacantando (2013), Existence and solution methods for equilibria, *Eur. J. Oper. Res.*, **227**, pp. 1-11.

[13] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, and M. Passacantando (2019), *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria,* Springer.

[14] E. Blum, W. Oettli (1994), From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student*, **63**, pp. 127-149.

[15] N. Buong, N.D. Duong (2011), A method for a solution of equilibrium problem and fixed point problem of a nonexpansive semigroup in Hilbert's spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, **2011**, 208434 (2011).

[16] L.C. Ceng, S. Al-Homidan, Q.H. Ansari, and J.C. Yao (2009), An iterative scheme for equilibrium problems and fixed point problems of strict pseudo-contraction mappings, *J. Comput. Appl. Math.*, **223**(2), pp. 967-974.

[17] Y. Censor, A. Gibali, and S. Reich (2011), The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space, *J. Optim. Theory Appl.*, **148**, pp. 318-335.

[18] J. Contreras, M. Klusch, and J.B. Krawczyk (2004), Numerical solution to Nash-Cournot equilibria in coupled constraint electricity markets, *EEE Trans. Power Syst.*, **19**(1), pp. 195-206.

[19] P. Daniele, F. Giannessi, and A. Maugeri (2003), *Equilibrium Problems and Variational Models*, Kluwer.

[20] B.V. Dinh (2017), An hybrid extragradient algorithm for variational inequalities with pseudomonotone equilibrium constraints, *J. Nonlinear Anal. Optim.*, **8**, pp. 71-83.

[21] B.V. Dinh, D.S. Kim (2016), Projection algorithms for solving nonmonotone equilibrium problems in Hilbert space, *J. Comput. Appl. Math.*, **302**, pp. 106-117.

[22] B.V. Dinh, D.S. Kim (2017), Extragradient algorithms for equilibrium problems and symmetric generalized hybrid mappings, *Optim. Lett.*, **11**, pp. 537-553.

[23] B.V. Dinh, D.X. Son, L. Jiao, and D.S. Kim (2016), Linesearch algorithms for split equilibrium problems and nonexpansive mappings, *Fixed Point Theory Appl.*, **2016**, 27 (2016).

[24] B.V. Dinh and L.D. Muu (2015), A projection algorithm for solving pseudomonotone equilibrium problems and it's application to a class of bilevel equilibria, *Optimization*, **64**(3), pp. 559-575.

[25] B.V. Dinh, P.G. Hung, and L.D. Muu (2014), Bilevel optimization as a regularization approach to pseudomonotone equilibrium problems, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **35**(5), pp. 539-563.

[26] F. Facchinei, J.S. Pang (2003), *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems,* Springer, New York.

[27] K. Fan (1972), A minimax inequality and applications, in: O. Shisha, *Inequality III, Proceeding of the Third Symposium on Inequalities* Academic Press, New York. pp. 103-113

[28] A. Genel and J. Lindenstrauss (1975), An example concerning fixed points, *Isarel J. Math.*, **22**, pp. 81-86.

[29] B. Halpern (1967), Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Am. Math. Soc.*, **73**, pp. 957-961.

[30] D.V. Hieu, L.D. Muu, P.K. Anh (2016), Parallel hybrid extragradient methods for pseudomonotone equilibrium problems and nonexpansive mappings, *Numer. Algorithms,* **73**, pp. 197-217.

[31] D.V. Hieu (2017), Halpern subgradient extragradient method extended to equilibrium problems, *RACSAM.*, **111**(3), pp. 823-840.

[32] H. Iiduka and I. Yamada (2009), A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its applications, *Optimization,* **58**(2), pp. 251-261.

[33] S. Itoh and W. Takahashi (1978), The common fixed point theory of single-valued mappings and multi-valued mappings, *Pacific J. Math.*, **79**, pp. 493-508.

[34] S. Ishikawa (1974), Fixed points by a new iteration method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **40**, pp. 147-150.

[35] A.N. Iusem and V. Mohebbi (2020), Extragradient methods for nonsmooth equilibrium problems in Banach spaces, *Optimization,* **69**(11), pp. 2383-2403.

[36] A.N. Iusem and W. Sosa (2003), New existence results for equilibrium problems, *Nonlinear Analysis*, **52**(2), pp. 621-635.

[37] A.N. Iusem and W. Sosa (2003), Iterative algorithms for equilibrium problems, *Optimization*, **52**(3), pp. 301-316.

[38] G. Kassay, V. Rădulescu, (2018), *Equilibrium Problems and Application,* Elsevier.

[39] G. Kassay, T.N. Hai, N.T. Vinh, (2018), Coupling Popov's algorithm with subgradient extragradient method for solving equilibrium problems, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **19**(6), pp. 959-986.

[40] B.T. Kien, J.C. Yao, N.D. Yen (2008), On the solution existence of pseudomonotone variational inequalities, *J. Global Optim.*, **41**(1), pp. 135-145.

[41] S.A. Khan, W. Cholamjiak, and K.R. Kazmi (2018), An inertial forward–backward splitting method for solving combination of equilibrium problems and inclusion problems, *Comput. Appl. Math.*, **37**(5), pp. 6283-6307.

[42] W. Khuangsatung, A. Kangtunyakarn (2014), Algorithm of a new variational inclusion problem and strictly pseudononspreading mapping with application, *Fixed Point Theory Appl.*, 2014:209.

[43] G.M. Korpelevich (1976), The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Ekon. Math. Methody*, **12**, pp. 747-756.

[44] R. Kraikaew and S. Saejung (2014), Strong convergence of the Halpern subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert spaces, *J. Optim. Theory Appl.*, **163**, pp. 399-412.

[45] I.V. Konnov (2001), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities,* Springer-Verlag Berlin.

[46] I.V. Konnov (2003), Application of the proximal point method nonmonotone equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **119**, pp. 317-333.

[47] I.V. Konnov (2009), Regularization methods for nonmonotone equilibrium problems, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **10**, pp. 93-101.

[48] P. Kumam, N. Petrot, and R. Wangkeeree (2010), A hybrid iterative scheme for equilibrium problems and fixed point problems of asymptotically k-strict pseudo-contractions, *J. Comput. Appl. Math.*, **233**, pp. 2013-2026.

[49] W. Kumam, U. Witthayarat, P. Kumam, S. Suantai, and K. Wattanawitoon (2016), Convergence theorem for equilibrium problem and Bregman strongly nonexpansive mappings in Banach spaces, *Optimization,* **65**, pp. 265-280.

[50] P.E. Maingé (2008), A hybrid extragradient viscosity methods for monotone operators and fixed point problems, *SIAM J. Control. Optim.*, **47**, pp. 1499-1515.

[51] P.E. Maingé (2010), The viscosity approximation process for quasi-nonexpansive mapping in Hilbert space, *Comput. Math. Appl.*, **59**, pp. 74-79.

[52] W.R. Mann (1953), Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, pp. 506-510.

[53] G. Mastroeni (2003), Gap functions for equilibrium problems, *J. Global Optim.*, **27**, pp. 411–426.

[54] G. Mastroeni (2003), On auxiliary principle for equilibrium problems, *Equilibrium Problems and Variational Models*, pp. 289-298.

[55] A. Moudafi (1999), Proximal point algorithm extended to equilibrium problems, *J. of Natural Geometry*, **15**, pp. 91-100.

[56] L.D. Muu, W. Oettli (1992), Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria, *Nonlinear Anal. TMA.*, **18**, pp. 1159-1166.

[57] L.D. Muu and T.D. Quoc (2009), Regularization algorithms for solving

monotone Ky Fan inequalities with application to a Nash-Cournot equilibrium model, *J. Optim. Theory Appl.*, **142**, pp. 185-204.

[58] L.D. Muu, N.V. Quy, and V.H. Nguyen (2007), On Nash-Cournot oligopolistic market equilibrium models with concave cost functions, *J. Glob. Optim.*, **41**, pp. 351-364.

[59] H. Nikaido, K. Isoda (1955), Note on noncooperative convex games, *Pac. J. Math.*, **5**, pp. 807-815.

[60] M.A. Noor (2004), Auxiliary principle technique for equilibrium problems. *J. Optim. Theory Appl.*, **122**, pp. 371-386 .

[61] N. Petrot, K. Wattanawitoonb, and P. Kumam (2010), A hybrid projection method for generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, **4**, pp. 631-643.

[62] D.Q. Tran, M.L. Dung, and V.H. Nguyen (2008), Extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *Optimization,* **57**, pp. 749-776.

[63] T.D. Quoc, P.N. Anh, and L.D. Muu (2012), Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems, *J. Global Optim.*, **52**, pp. 139-159.

[64] R.T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis,* Princeton University Press.

[65] J.J. Strodiot, P.T. Vuong, N.T.T. Van (2016), A class of shrinking projection extragradient methods for solving non-monotone equilibrium problems in Hilbert spaces, *J. Global. Optim.*, **64**, pp. 159-178.

[66] S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn (2013), The combination of the set of solutions of equilibrium problem for convergence theorem of the set of fixed points of strictly pseudo-contractive mappings and variational inequalities problem, *Fixed Point Theory Appl.*, 291:26.

[67] S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn (2014), Convergence analysis for the equilibrium problems with numerical results, *Fixed Point Theory Appl.*, 167:26.

[68] S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn (2016), Convergence theorem for solving the combination of equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, *Thai J. Math.*, **14**, pp. 77-97.

[69] A.Tada and W. Takahashi (2007), Weak and strong convergence theorem for nonexpansive mapping and equilibrium problem, *J. Optim. Theory Appl.*, **133**, pp. 359-370.

[70] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota (2008), Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **341**, pp. 276-286.

[71] W. Takahashi, M. Toyoda (2003), Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, *J. Optim. Theory Appl.*, **118**, pp. 417-428.

[72] N.N. Tam, J.C. Yao, N.D. Yen (2008), Solution methods for pseudomonotone variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.*, **138**(2), pp. 253–273.

[73] A.N. Tikhonov (1963), On the solutions of Ill-posed problems and the method of egularization, *Dokl. Akad. Nauk SSSA.*, **151**, pp. 501-504.

[74] D.V. Thong, D.V. Hieu (2018), New extragradient methods for solving variational inequality problems and fixed point problems, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **20**(3), pp. 1-20.

[75] L.Q. Thuy, P.K. Anh, L.D. Muu, and T.N. Hai (2017), Novel hybrid methods for pseudomonotone equilibrium problems and common fixed point problems, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **38**, pp. 443-465.

[76] N.T.T. Thuy, P.T. Hieu (2019), A hybrid method for solving variational inequalities over the common fixed point sets of infinite families of nonexpansive mappings in Banach spaces, *Optimization,* **69**(9), pp. 2155-2176.

[77] H. Tuy (1998), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.

[78] P.T. Vuong, J.J. Strodiot, and V.H. Nguyen (2013), Extragradient methods and linesearch algorithms for solving Ky Fan inequalities and fixed point problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **155**, pp. 605-627.

[79] N.T. Vinh, (2018), Golden ratio algorithms for solving equilibrium problems in Hilbert spaces, ArXiv, https://arxiv.org/abs/1804.01829.

[80] R. Wangkeeree, U. Kamraksa (2009), An iterative approximation method for solving a general system of variational inequality problems and mixed equilibrium problems, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, **3**, pp. 615-630.

[81] H.K. Xu (2002), Iterative algorithm for nonlinear operators, *J. London Math. Soc.*, **66**, pp. 240-256.

[82] I. Yamada (2001), The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings, In: Butnariu, D., Censor, Y., Reich, S. (eds.) *Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization and Their Applications,* Elsevier, Amsterdam. **8**, pp. 473-504.

[83] I. Yamada and N. Ogura (2005), Hybrid steepest descent method for variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **25**, pp. 619-655.

[84] C.M. Yanes, H.K. Xu (2006), Strong convergence of the *CQ* method for fixed point iteration processes, *Nonlinear Anal. TMA.*, **64**, pp. 2400-2411.

[85] M. Ye, Y. He (2014), A double projection method for solving variational inequalities without monotonicity, *Comput. Optim. Appl.*, **60**, pp. 141-150.

[86] E. Zeidler (1986), *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I.* Springer-Verlag, New York.