

**LỜI CAM ĐOAN**

Tôi là Trần Văn Hùng, xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận án là trung thực và chưa được ai công bố trong bất kỳ công trình nào.

*Hà Nội, ngày .....tháng 11 năm 2021*

**Tác giả luận án**

**Trần Văn Hùng**

## LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn tập thể hướng dẫn: TS Trần Ngọc Đoàn và PGS.TS Vũ Quốc Trụ đã nhiệt tình hướng dẫn, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành luận án. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn các thầy trong Bộ môn Cơ học vật rắn/Khoa cơ khí, Bộ môn Thiết kế hệ thống kết cấu thiết bị bay/Khoa Hàng không vũ trụ và các đồng chí cán bộ, nhân viên Phòng Sau đại học/Học viện Kỹ thuật Quân sự đã tận tình giúp đỡ tôi trong quá trình thực hiện luận án.

Tôi xin chân thành cảm ơn Đảng ủy, Ban Giám hiệu Trường Sĩ quan Tăng thiết giáp, các cơ quan chức năng của Nhà trường, lãnh đạo và chỉ huy Khoa Kỹ thuật cơ sở cùng toàn thể đồng nghiệp đã tạo mọi điều kiện, giúp đỡ động viên tôi hoàn thành công trình nghiên cứu của mình.

Tôi cũng bày tỏ tình cảm trân trọng biết ơn tới gia đình, người thân và bạn bè đã động viên, khích lệ, giúp đỡ tôi trong quá trình thực hiện luận án.

**Tác giả luận án**

## MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN -----	i
LỜI CẢM ƠN-----	ii
MỤC LỤC-----	iii
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU -----	vi
DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT -----	vii
DANH MỤC CÁC BẢNG-----	viii
DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ -----	x
MỞ ĐẦU -----	1
Chương 1. TỔNG QUAN VỀ TÍNH TOÁN VỎ FGM -----	5
1.1. Tổng quan lý thuyết phân tích vỏ -----	5
1.1.1. Lý thuyết vỏ cổ điển -----	7
1.1.2. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất -----	8
1.1.3. Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao -----	8
1.2. Tổng quan tình hình nghiên cứu vỏ FGM -----	11
1.2.1. Tổng quan các nghiên cứu vỏ FGM trên thế giới -----	11
1.2.2. Tổng quan các nghiên cứu vỏ FGM trong nước-----	22
1.3. Kết quả nghiên cứu đạt được từ các công trình đã công bố và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu -----	26
1.4. Những nội dung nghiên cứu trong luận án-----	28
Chương 2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH TÍNH TOÁN VỎ TRỤ FGM THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC CAO QUASI-3D -----	31
2.1. Tính chất cơ học của vỏ trụ FGM -----	31
2.1.1. Đặc tính vật liệu FGM theo phân bố thể tích -----	31
2.1.2. Đặc tính vật liệu FGM theo nhiệt độ -----	34
2.1.3. Xác định phân bố nhiệt độ theo chiều dày vỏ trụ FGM -----	36
2.2. Quan hệ ứng xử cơ học của vỏ trụ FGM-----	39

2.2.1. Trường chuyển vị -----	41
2.2.2. Quan hệ biến dạng và chuyển vị -----	42
2.2.3. Quan hệ ứng suất - biến dạng -----	43
2.3. Xây dựng các phương trình cơ bản tính toán vỏ trụ FGM -----	45
2.3.1. Nguyên lý dịch chuyển khả dĩ-----	45
2.3.2. Hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên -----	54
2.3.3. Hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị-----	58
2.4. Trình tự giải bài toán xác định ứng suất, biến dạng của vỏ -----	59
Chương 3. NGHIÊN CỨU TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT-BIẾN DẠNG CỦA VỎ TRỤ FGM BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH -----	62
3.1. Chuyển hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng về hệ phương trình vi phân thường-----	62
3.1.1. Trường hợp vỏ trụ FGM -----	62
3.1.2. Trường hợp panel trụ FGM-----	65
3.2. Phương pháp Navier cho giải bài toán vỏ trụ FGM tựa đơn -----	66
3.2.1. Trường hợp panel trụ FGM tựa đơn trên bốn cạnh -----	66
3.2.2. Trường hợp vỏ trụ FGM hai đầu tựa đơn-----	69
3.3. Phương pháp tính toán vỏ trụ chịu tác dụng của tải trọng hướng kính đối xứng trục với các điều kiện biên khác nhau-----	70
3.3.1. Xác định nghiệm của hệ phương trình thuần nhất -----	71
3.3.2. Điều kiện biên -----	73
3.3.3. Xác định nghiệm riêng ứng với các dạng tải trọng cục bộ đối xứng trục khác nhau -----	75
3.4. Bài toán kiểm chứng -----	90
3.4.1. Kiểm chứng cho bài toán vỏ chịu tải trọng cơ -----	90
3.4.2. Kiểm chứng cho bài toán vỏ trụ FGM chịu tải trọng nhiệt -----	95



Chương 4. NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG CỦA MỘT SỐ THAM SỐ KẾT CẤU, VẬT LIỆU VÀ TẢI TRỌNG CƠ, NHIỆT ĐẾN TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT-BIẾN DẠNG CỦA VỎ TRỤ FGM-----	98
4.1. Nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tải trọng cơ -----	98
4.1.1. Đánh giá hiện tượng tập trung ứng suất-----	98
4.1.2. Nghiên cứu ảnh hưởng của các điều kiện biên -----	105
4.1.3. Nghiên cứu ảnh hưởng của chiều dày và chiều dài vỏ -----	110
4.1.4. Nghiên cứu ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích-----	112
4.1.5. Nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tác dụng của các dạng tải cơ-----	115
4.2. Nghiên cứu vỏ chỉ chịu tác dụng của nhiệt độ -----	120
4.2.1. Nghiên cứu ảnh hưởng chênh lệch nhiệt độ bề mặt trong và ngoài	120
4.2.2. Nghiên cứu ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích-----	123
4.2.3. Nghiên cứu ảnh hưởng của chiều dày-----	126
4.2.4. Nghiên cứu ảnh hưởng của điều kiện biên -----	128
4.3. Nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tác dụng đồng thời tải trọng cơ và nhiệt	131
4.3.1. Nghiên cứu ảnh hưởng chênh lệch nhiệt độ bề mặt trong và ngoài	133
4.3.2. Nghiên cứu ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích-----	135
4.3.3. Nghiên cứu ảnh hưởng của chiều dày-----	138
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ -----	142
DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ -----	144
TÀI LIỆU THAM KHẢO-----	146
PHỤ LỤC -----	163

## DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

<b>Kí hiệu</b>	<b>Đơn vị</b>	<b>Ý nghĩa – giải thích</b>
$\alpha$	1/K	Hệ số dẫn nở nhiệt
$E$	Pa	Module đàn hồi
$\kappa$	W/mK	Hệ số truyền nhiệt
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Khối lượng riêng
$\nu$		Hệ số Poisson
$\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}$	Pa	Các thành phần ứng suất
$\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\xi z}, \varepsilon_{\theta z}$		Các thành phần biến dạng
$\eta$		Chỉ số tỷ lệ thể tích
$N_\xi, N_\theta, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}$		Các thành phần nội lực
$M_\xi, M_\theta, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}$		
$Q_\xi, Q_\theta, Q_z, S_\xi, S_\theta, S_z$		
$u(\xi, \theta, z), v(\xi, \theta, z), w(\xi, \theta, z)$	m	Chuyển vị theo các phương $\xi, \theta$ và $z$
$C_v$	(J/kgK)	Nhiệt dung riêng
$h$	m	Chiều dày vỏ trụ FGM
$R$	m	Bán kính trung bình vỏ FGM
$T$	<sup>0</sup> K	Nhiệt độ
$V$	m <sup>3</sup>	Thể tích vật liệu

## DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

<b>Viết tắt</b>	<b>Tiếng Anh</b>	<b>Tiếng Việt</b>
3D	Three Dimensional	Ba chiều
CPT	Classical Plate Theory	Lý thuyết tấm cổ điển
CST	Classical Shell Theory	Lý thuyết vỏ cổ điển
CUF	Carrera's Unified Formulation	Công thức hợp nhất Carrera
DQM	Differential Quadrature Method	Phương pháp cầu phương sai phân
FEM	Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn
FGM	Functionally Graded Material	Vật liệu có cơ tính biến thiên
FSDT	First order Shear Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất
HOSNT	High order Shear-Normal Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng trượt-pháp bậc cao
GDQ	Generalized Differential Quadrature	Cầu phương sai phân tổng quát
HSDT	Higher order Shear Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao
ODE	Ordinary Differential Equation	Phương trình vi phân thường
RVE	Representative Volume Element	Phần tử khối quy ước
PDE	Partial Differential Equation	Phương trình đạo hàm riêng
TSdT	Third order Shear Deformation Theory	Lý thuyết biến dạng trượt bậc ba

## DANH MỤC CÁC BẢNG

Bảng 1.1. Một số mô hình chuyển vị bậc cao .....	10
Bảng 2.1. Mô hình biến thiên tỷ lệ thể tích trong các lý thuyết.....	32
Bảng 2.2. Hệ số của các đặc tính vật liệu theo nhiệt độ .....	35
Bảng 3.1. Chuyển vị $\bar{w} = w \times 10^7$ của vỏ trụ FGM ở vị trí giữa vỏ .....	91
Bảng 3.2. Chuyển vị $\bar{w} = w \times 10^{10}$ của vỏ trụ FGM ở vị trí giữa.....	92
Bảng 3.3. Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của vỏ trụ FGM .....	93
Bảng 3.4. Ứng suất pháp ngang vỏ trụ FGM theo các mô hình .....	96
Bảng 4.1. Ảnh hưởng của chiều dày và chỉ số tỷ lệ thể tích tới hiện tượng tập trung ứng suất trong vỏ trụ FGM .....	99
Bảng 4.2. Ảnh hưởng của điều kiện biên tới chuyển vị $\bar{w}$ và ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\sigma}_z$ .....	106
Bảng 4.3. Ảnh hưởng của chiều dày và chiều dài vỏ tới chuyển vị $\bar{w}$ và ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z$ .....	110
Bảng 4.4. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích $\eta$ và chiều dày tới chuyển vị $\bar{w}$ và ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z$ .....	113
Bảng 4.5. Quy luật phân bố của một số dạng tải trọng.....	116
Bảng 4.6. Ảnh hưởng của các dạng tải trọng tới chuyển vị $\bar{w}$ và ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\sigma}_z$ .....	117
Bảng 4.7. Ảnh hưởng sự chênh lệch nhiệt độ tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ .....	121
Bảng 4.8. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích phân bố vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ.....	124
Bảng 4.9. Ảnh hưởng chiều dày tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ .....	126

Bảng 4.10. Ảnh hưởng của điều kiện biên tới chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w}$ và ứng suất $\sigma_\xi, \sigma_\theta, \tau_{\xi z}, \sigma_z$ .....	129
Bảng 4.11. Ảnh hưởng của tải nhiệt, tải cơ và tải cơ-nhiệt tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM .....	132
Bảng 4.12. Ảnh hưởng sự chênh lệch nhiệt độ tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời tải cơ-nhiệt.....	133
Bảng 4.13. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt .....	136
Bảng 4.14. Ảnh hưởng chiều dày tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt .....	138

## DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ

Hình 1.1. Sơ đồ các lý thuyết trong phân tích vỏ .....	6
Hình 2.1. Biến thiên tỷ lệ thể tích $V_{mat}$ theo chiều dày vỏ trụ FGM .....	34
Hình 2.2. Mô hình, tham số hình học, hệ trục tọa độ và mô hình đặt ứng suất khi tính toán của vỏ trụ FGM .....	40
Hình 2.3. Trình tự giải bài toán xác định ứng suất, biến dạng vỏ trụ FGM ...	60
Hình 3.1. Vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm phân bố đều trên một đoạn...	79
Hình 3.2. Vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm theo quy luật hàm tam thức bậc hai .....	82
Hình 3.3. Vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm theo quy luật hàm sin ....	86
Hình 3.4. Chuyển vị không thứ nguyên theo hai mô hình chịu tải .....	96
Hình 4.1. Mô hình tính toán vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cục bộ hướng tâm, đối xứng trục .....	99
Hình 4.2. Sự thay đổi của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày $z/h$ tại vùng biên với $L = 4R$ , $R/h = 10$ , $\eta = 10$ .....	101
Hình 4.3. Sự thay đổi của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày $z/h$ tại vùng biên với $L = 4R$ , $R/h = 30$ , $\eta = 1$ .....	102
Hình 4.4. Sự thay đổi của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày $z/h$ tại vùng biên với $L = 4R$ , $R/h = 100$ , $\eta = 0.2$ .....	103
Hình 4.5. Sự thay đổi ứng suất $\bar{\sigma}_z$ tại vùng biên theo các lý thuyết với $L = 4R$ , $R/h = 10$ , $\eta = 10$ .....	104
Hình 4.6. Sự thay đổi ứng suất $\bar{\sigma}_z$ tại vùng biên theo các lý thuyết với $L = 4R$ , $R/h = 30$ , $\eta = 1$ .....	104
Hình 4.7. Sự thay đổi ứng suất $\bar{\sigma}_z$ tại vùng biên theo các lý thuyết với $L = 4R$ , $R/h = 100$ , $\eta = 0.2$ .....	105

Hình 4.8. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ với $L = 0.5R$ , $R/h = 10$ , $\eta = 1$ . .....	108
Hình 4.9. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ $z/h$ với $L = 4R$ , $R/h = 10$ , $\eta = 1$ . .....	109
Hình 4.10. Sự thay đổi chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dài tương đối $L/R$ với chiều dày tương đối thay đổi .....	112
Hình 4.11. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chỉ số tỷ lệ thể tích $\eta$ với chiều dày tương đối $R/h$ khác nhau.....	114
Hình 4.12. Vị trí đặt tải trọng cục bộ .....	115
Hình 4.13. Ảnh hưởng của các dạng tải trọng tới chuyển vị và ứng suất.....	119
Hình 4.14. Ảnh hưởng của chênh lệch nhiệt độ tới biến dạng và ứng suất của vỏ trụ FGM.....	123
Hình 4.15. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích phân bố vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ.....	125
Hình 4.16. Ảnh hưởng của chiều dày tương đối tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM chịu tải trọng nhiệt độ .....	128
Hình 4.17. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ với $L = 4R$ , $R/h = 10$ , $\eta = 1$ , $\Delta T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	131
Hình 4.18. Chuyển vị $\bar{w}$ theo chiều dài $\xi$ dưới các dạng tải trọng: $\Delta T$ - tải nhiệt, $Q_{in}$ - tải cơ, $\Delta T$ & $Q_{in}$ - tải nhiệt và cơ đồng thời. ....	132
Hình 4.19. Ảnh hưởng chênh lệch nhiệt độ tới biến dạng và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời tải cơ-nhiệt.....	135
Hình 4.20. Ảnh hưởng của sự không đồng nhất của vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời tải cơ-nhiệt.....	137
Hình 4.21. Ảnh hưởng của chiều dày tương đối tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt .....	140

## MỞ ĐẦU

### 1. Tính cấp thiết của đề tài

Vật liệu composite lớp thông thường có nhược điểm chính là sự không tương thích về cơ tính của vật liệu cốt và nền. Do đó, thường xảy ra tập trung ứng suất tại bề mặt liên kết, nhất là khi làm việc ở môi trường có nhiệt độ cao. Điều này có thể dẫn đến phá hủy kết cấu dưới dạng tách lớp, nứt, v.v. [85]. Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) là vật liệu composite tiên tiến, được chế tạo từ hai hay nhiều pha thành phần với sự biến đổi liên tục của cơ tính từ bề mặt này đến bề mặt khác. Vì vậy, trong vật liệu FGM không xảy ra hiện tượng tập trung ứng suất như đối với vật liệu composite lớp thông thường. Do có nhiều ưu điểm nổi trội và được ứng dụng trong nhiều ngành kỹ thuật, nên vật liệu FGM thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học.

Trong lĩnh vực hàng không vũ trụ hay trong động cơ tên lửa, kết cấu của thiết bị thường phải đảm bảo yêu cầu khắt khe về khối lượng, nhưng phải có độ bền cao do luôn chịu tác dụng của tải cơ-nhiệt phức tạp. Việc đánh giá chính xác trạng thái ứng suất-biến dạng của kết cấu, cho phép đề ra được những biện pháp hiệu quả để tăng cường độ bền, đồng thời giảm khối lượng kết cấu. Do đó, việc đánh giá chính xác trạng thái ứng suất-biến dạng của kết cấu dưới tác dụng đồng thời của tải trọng cơ-nhiệt luôn là vấn đề mang tính cấp thiết và khoa học.

Trong tính toán trạng thái ứng suất của vỏ FGM, thường sử dụng lý thuyết vỏ mỏng [65] hoặc các lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất [73]. Khi sử dụng các lý thuyết này trong tính toán vỏ, thường bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt bậc cao, đặc biệt là biến dạng theo phương pháp tuyến, dẫn đến kết quả tính toán tại những vùng nguy hiểm của kết cấu có độ chính xác chưa cao [47, 48, 49]. Vì vậy, để đảm bảo an toàn cho kết cấu tại những vùng nguy hiểm, ta thường phải áp dụng các biện pháp gia cố, như làm dày lớp vật liệu tại vị trí liên kết, gia cố



bằng các đại gia cường, v.v. Để khắc phục các hạn chế này, cần sử dụng các lý thuyết khác như lý thuyết biến dạng trượt bậc cao có tính đến ảnh hưởng của biến dạng pháp tuyến (Quasi-3D). Việc nghiên cứu trạng thái ứng suất của vỏ trụ FGM bằng lý thuyết này còn chưa được quan tâm nghiên cứu nhiều, bởi tính phức tạp của mô hình toán và khối lượng tính toán lớn [113].

Từ những phân tích ở trên, có thể kết luận rằng, đề tài “*Nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ composite có cơ tính biến thiên chịu tải trọng cơ, nhiệt trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao quasi-3D*” là vấn đề mang tính cấp thiết, có ý nghĩa khoa học và thực tiễn.

## **2. Mục tiêu nghiên cứu của luận án**

- Xây dựng mô hình toán học trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D và chương trình tính toán số phục vụ phân tích vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt và cơ-nhiệt đồng thời trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D.

- Khảo sát ảnh hưởng của một số tham số về kết cấu, vật liệu, tải trọng đến trạng thái ứng suất, biến dạng của vỏ trụ FGM, từ đó, đề xuất các khuyến cáo trong tính toán thiết kế vỏ trụ làm từ vật liệu FGM.

## **3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của luận án**

Đối tượng nghiên cứu: Vỏ trụ composite có cơ tính biến thiên, chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt và cơ-nhiệt đồng thời.

Phạm vi nghiên cứu: Nghiên cứu trạng thái ứng suất, biến dạng tựa không gian (Quasi-3D) của vỏ trụ FGM chịu tác dụng độc lập tải cơ, nhiệt hoặc chịu tải cơ-nhiệt đồng thời trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (HOSNT) kiểu quasi-3D.

## **4. Phương pháp nghiên cứu**

Luận án sử dụng các công cụ giải tích kết hợp với tính toán số. Thực

hiện nghiên cứu cơ sở lý thuyết, xây dựng thuật toán và chương trình tính toán số để khảo sát các bài toán. So sánh kết quả nghiên cứu của luận án với các kết quả nghiên cứu bằng các phương pháp khác đã được công bố để khẳng định tính đúng đắn của mô hình toán học và chương trình tính toán. Chương trình tính toán, khảo sát số được lập trình trên nền Maple.

### **Cấu trúc luận án**

Luận án gồm phần mở đầu, 4 chương và kết luận.

**Mở đầu** : Trình bày tính cấp thiết của đề tài, mục tiêu, đối tượng, phạm vi và phương pháp nghiên cứu của luận án, cũng như ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài.

**Chương 1**: Tổng quan về tính toán vỏ FGM

**Chương 2**: Xây dựng mô hình tính toán vỏ trụ FGM theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D

**Chương 3**: Nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM bằng phương pháp giải tích.

**Chương 4**: Nghiên cứu ảnh hưởng của một số tham số kết cấu, vật liệu và tải trọng cơ, nhiệt đến trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM

**Kết luận và kiến nghị**: Trình bày các kết quả chính, những đóng góp mới của luận án và các kiến nghị khác.

## **5. Ý nghĩa khoa học và tính thực tiễn của đề tài**

Vật liệu FGM là loại vật liệu mới có nhiều ưu điểm vượt trội nên đã và đang được rất nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Việc đánh giá chính xác ứng xử cơ học của các kết cấu dạng vỏ có tính dị hướng cao như vỏ composite FGM, composite lớp, v.v. nhất là vỏ dày cần sử dụng các lý thuyết bậc cao. Tuy nhiên, các công trình nghiên cứu theo hướng này vẫn còn chưa nhiều do tính công kênh của mô hình toán học và đòi hỏi khối lượng tính toán lớn. Do đó, việc sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D trong nghiên

cứu, tính toán vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt mang ý nghĩa khoa học. Mặt khác, cách tiếp cận giải tích sử dụng phân tích trường chuyển vị, các thành phần ứng suất, biến dạng theo chuỗi lượng giác đơn và phép biến đổi Laplace để giải bài toán biên đối với vỏ trụ FGM góp phần làm phong phú thêm phương pháp nghiên cứu, tính toán kết cấu.

Trong các ngành kỹ thuật, kết cấu vỏ trụ được sử dụng khá rộng rãi như thân vỏ tàu, máy bay, tên lửa, động cơ, v.v. Do vậy, nghiên cứu phân tích ứng xử cơ học của kết cấu vỏ trụ FGM chịu tác dụng của các dạng tải trọng phức tạp cơ, nhiệt có nhiều ý nghĩa thực tiễn. Việc phân tích ảnh hưởng của các tham số kết cấu, hình học, tải trọng, điều kiện liên kết, v.v. đến ứng suất, biến dạng của kết cấu cho phép đưa ra những khuyến cáo quan trọng trong quá trình tính toán, thiết kế cũng như khai thác, sử dụng kết cấu. Mặt khác, việc sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D cho phép đánh giá chính xác hơn ứng suất, biến dạng của kết cấu tại những vùng nguy hiểm, như tại khu vực có sự tập trung ứng suất, hiệu ứng biên mạnh, v.v. Kết quả nghiên cứu tại đây có giá trị cả về khoa học lẫn thực tiễn.

## Chương 1. TỔNG QUAN VỀ TÍNH TOÁN VỎ FGM

Chương 1 nêu tổng quan các lý thuyết đã được sử dụng để phân tích vỏ, trên cơ sở đó luận án tập trung phân tích tình hình nghiên cứu về vỏ FGM trong nước và trên thế giới. Từ đó rút ra các vấn đề đã được nghiên cứu về vỏ FGM và đề xuất hướng nghiên cứu trọng tâm của luận án.

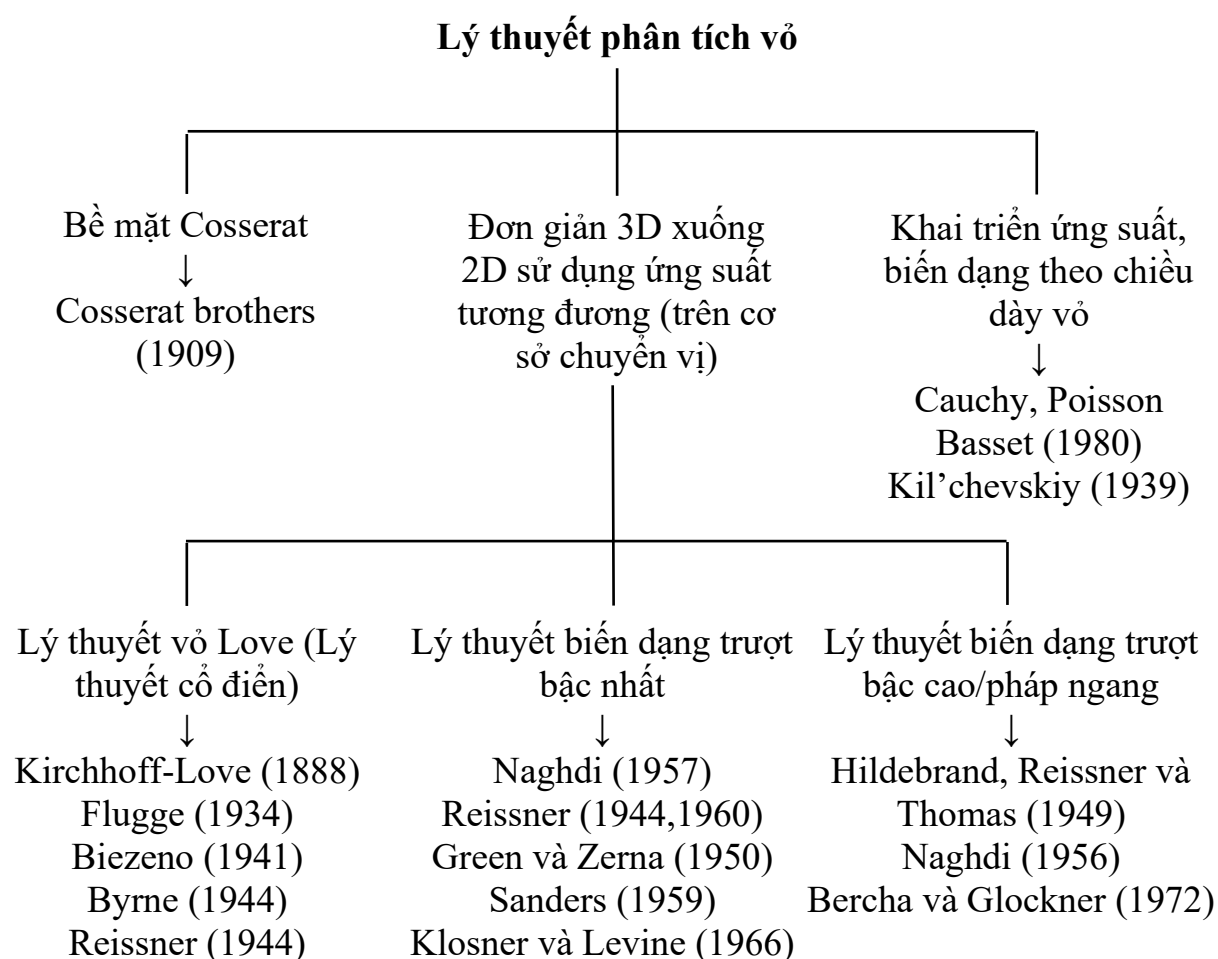
### 1.1. Tổng quan lý thuyết phân tích vỏ

Lý thuyết vỏ là lĩnh vực nghiên cứu hấp dẫn đã được phát triển từ cuối thế kỷ 19. Việc giải bài toán đàn hồi 3D với kết quả chính xác, hoặc có độ chính xác cao là rất phức tạp, do đó ít được quan tâm nghiên cứu, phát triển. Để khắc phục những khó khăn trong tính toán, bài toán nghiên cứu vỏ được đơn giản hóa như bài toán 2D bằng cách xem xét nó như một kết cấu đặc trưng có chiều dày nhỏ so với các kích thước khác. Trên thực tế nghiên cứu, lý thuyết vỏ có thể được phân loại như Hình 1.1.

Ở lớp lý thuyết vỏ thứ nhất, kết cấu vỏ được nghiên cứu trên cơ sở khai triển các hàm ứng suất, biến dạng theo chiều dày. Cauchy và Poisson [58] xây dựng các mô hình tính toán theo hướng này để đơn giản hóa bài toán 3D. Kil'chevskiy [63] thực hiện khai triển các hàm biến dạng, ứng suất theo chuỗi MacLaurin bậc lũy thừa theo tọa độ chiều dày. Đối với lớp lý thuyết vỏ thứ hai, lý thuyết này được biết đến với tên gọi “Bề mặt Cossenat” [12], vỏ được xem xét như vật thể biến dạng cùng với tập hợp các đường chuẩn biến dạng. Lớp lý thuyết vỏ dạng này là các mô hình lý thuyết đàn hồi phi cổ điển, có tính đến ảnh hưởng của một số yếu tố phi tuyến. Trong lớp lý thuyết vỏ thứ ba thực hiện tích phân ứng suất theo chiều dày. Sử dụng các ứng suất trung bình hoặc ứng suất tương đương đã được định nghĩa theo mặt trung hòa cho phép đưa bài toán 3D về phương pháp bài toán 2D trên cơ sở ứng suất tương đương. Phần lớn các nghiên cứu hiện nay đang dừng ở lớp lý thuyết này. Sử dụng phép gần đúng nêu trên cho phép đơn giản hóa những vấn đề rất phức

tạp gặp phải khi giải bài toán 3D của lý thuyết vỏ, đồng thời hướng tiếp cận này có thể áp dụng hiệu quả trong việc giải các bài toán biên, bài toán trị riêng phức tạp. Lý thuyết vỏ được xây dựng trên cơ sở ứng suất tương đương có thể chia thành ba kiểu lý thuyết dưới đây:

- 1) Lý thuyết vỏ cổ điển (CST) hay lý thuyết vỏ Love.
- 2) Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT).
- 3) Các lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (HSDTs), Các lý thuyết biến dạng trượt-pháp bậc cao (HOSNTs).



Hình 1.1. Sơ đồ các lý thuyết trong phân tích vỏ

### 1.1.1. Lý thuyết vỏ cô điển

Phần lớn các nghiên cứu theo lý thuyết vỏ cô điển sử dụng lý thuyết vỏ tuyến tính. Bằng cách sử dụng các giả thiết đơn giản của lý thuyết tấm Poisson-Kirchhoff, lý thuyết tấm cô điển cũng được phát triển cho vỏ. Người đầu tiên sử dụng lý thuyết tấm Poisson-Kirchhoff để phát triển cho lý thuyết vỏ chính là Aron [16]. Aron đã đưa ra các phương trình uốn của vỏ với biên dạng nhỏ và chuyển vị hữu hạn. Lý thuyết của Aron chứa một vài khiếm khuyết, sau đó được Love khắc phục. Love đã đưa ra các giả thiết đơn giản sau:

1. Vỏ mỏng, có tỷ số chiều dày với bán kính cong nhỏ nhất  $h / R_{\min} \ll 1$ , ở đây,  $h$  là chiều dày của vỏ,  $R_{\min}$  là bán kính cong nhỏ nhất của vỏ.
2. Độ võng là nhỏ so với kích thước của vỏ.
3. Pháp tuyến của mặt giữa ( $z = 0$ ) vẫn thẳng góc với mặt giữa trước và sau khi biến dạng.
4. Giá trị ứng suất pháp ngang là rất nhỏ so với ứng suất mặt.

Lý thuyết vỏ cô điển sử dụng trường chuyển vị [85] có dạng sau:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

ở đây,  $z$  là tọa độ theo pháp tuyến tính từ mặt  $Oxy$ ,  $u_0, v_0$  và  $w_0$  là chuyển vị của mặt trung hòa theo các phương  $x, y, z$ .

Tuy nhiên, lý thuyết cô điển vẫn chỉ áp dụng được cho các vỏ mỏng. Với vỏ có chiều dày trung bình hoặc vỏ dày, lý thuyết này không còn chính xác nữa. Do đó, để đánh giá tốt hơn ứng xử của vỏ cần sử dụng những lý thuyết khác.

### 1.1.2. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất

Phát triển tiếp theo của lý thuyết biến dạng cô điển, lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất như một đề cập đầu tiên và phổ biến là lý thuyết tám Mindlin [73], trong đó tác giả đã đưa ra ảnh hưởng biến dạng trượt ngang (ứng suất tiếp theo chiều dày) trong kết cấu tấm. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất cho rằng đường thẳng vuông góc với mặt trung hòa vẫn thẳng sau biến dạng nhưng không còn vuông góc với mặt trung hòa nữa. Trường chuyển vị [85] trong lý thuyết này được biểu diễn dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \phi_y = \frac{\partial v}{\partial z}$$

ở đây,  $u_0, v_0$  và  $w_0$  là chuyển vị của mặt trung hòa,  $\phi_x$  và  $\phi_y$  là góc xoay của pháp tuyến so với mặt trung hòa lân cận tiếp tuyến của các đường tọa độ  $x$  và  $y$  tương ứng.

Lý thuyết FSDT cho phép xem xét vỏ có chiều dày tốt hơn so với CST. Tuy nhiên để đánh giá ứng suất tiếp theo chiều dày cần đưa thêm hệ số hiệu chỉnh cắt vào trong lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất.

### 1.1.3. Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao

Hildebrand, Reissner và Thomas [53] thực hiện khai triển chuyển vị theo chuỗi Taylor đến ba số hạng, đây như là sự phát triển ban đầu của lý thuyết vỏ bậc cao. Naghdi [76] tiếp tục đưa ra công thức cho bài toán với sự khai triển đến hai số hạng đối với chuyển vị mặt và khai triển đến ba số hạng đối với thành phần chuyển vị theo chiều dày khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng pháp. Kant [59] cũng đã thiết lập đầy đủ các phương trình cơ bản đối với vỏ

dày composite lớp làm từ vật liệu trục hướng bằng cách khai triển chuỗi Taylor đến ba số hạng cho trường chuyển vị. Tiếp tục hướng nghiên cứu này, Kant và Ramesh [57] đưa ra lý thuyết vỏ trục hướng trong tọa độ cong tổng quát với trường chuyển vị được phân tích theo [53], từ đó xây dựng lý thuyết bậc cao cho vỏ trục hướng và cũng như vỏ nhiều lớp. Lý thuyết này cho phép tính đến ảnh hưởng của biến dạng trượt của pháp tuyến, cũng như biến dạng pháp tuyến. Firsanov và Doan thực hiện khai triển Taylor đến bậc  $N$  đối với chuyển vị mặt, bậc  $N-1$  đối với chuyển vị theo phương pháp tuyến để xây dựng các phương trình cơ bản của lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D [48, 49]. Các ứng suất mặt được tìm từ phương trình vật lý liên hệ giữa biến dạng và ứng suất, còn các ứng suất cắt được xác định từ các phương trình của lý thuyết đàn hồi 3D. Reddy và Liu [84] đã phát triển lý thuyết bậc cao cho vỏ với khai triển bậc ba đối với chuyển vị mặt và là hằng số đối chuyển vị theo phương pháp tuyến. Với việc sử dụng điều kiện biên tự do đối với mặt trên và dưới, số ẩn trong hệ phương trình vi phân giảm xuống còn năm ẩn. Trường chuyển vị [85] theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (bậc ba theo Reddy) được mô tả như công thức sau:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + 2z^2\theta_x(x, y, t) + 6z^3\lambda_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + 2z^2\theta_y(x, y, t) + 6z^3\lambda_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

ở đây,  $u_0, v_0, w_0$  là chuyển vị của mặt trung hòa,  $\phi_x$  và  $\phi_y$  góc quay của pháp tuyến so với mặt trung hòa lân cận tiếp tuyến của các đường tọa độ  $x$  và  $y$  tương ứng,  $\theta_x, \theta_y, \lambda_x$  và  $\lambda_y$  là thành phần chuyển vị bậc cao.

$$\phi_x = \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad \phi_y = \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad \theta_x = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=0},$$



$$\theta_y = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{z=0}, \quad \lambda_x = \left( \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right)_{z=0}, \quad \lambda_y = \left( \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right)_{z=0}$$

Việc xây dựng các lý thuyết với bậc khác nhau phụ thuộc vào khai triển của chuyển vị chính theo chuỗi Taylor với số mũ khác nhau. Trong những năm gần đây, đã xuất hiện việc khai triển phi đa thức như: hàm hypebol, lượng giác và hàm mũ [6]. Để mô tả tốt hơn biến dạng trượt tại các biên tự do kéo nén cùng với tính liên tục các lớp của chuyển vị mặt, người ta sử dụng lý thuyết zig-zag cho vật liệu composite nói chung. Bảng 1.1 liệt kê một số mô hình chuyển vị bậc cao đã áp dụng cho vỏ FGM trong các nghiên cứu gần đây. Mặc dù một số mô hình đa thức cũng như phi đa thức đã được nghiên cứu cho bài toán tấm, nhưng việc áp dụng cho vỏ FGM vẫn còn hạn chế.

Bảng 1.1. Một số mô hình chuyển vị bậc cao

STT	Trường chuyển vị	Trích dẫn
1	$u = u_0 + zu_1 + z^3 u_3$ $v = v_0 + zv_1 + z^3 v_3$ $w = w_0 + zw_1 + z^2 w_2$	[79]
2	$u = u_0 + zu_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3$ $v = v_0 + zv_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3$ $w = w_0 + zw_1 + z^2 w_2 + z^3 w_3$	[83]
3	$u = u_0 + zu_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3$ $v = v_0 + zu_1 + z^2 v_2 + z^3 v_3$ $w = w_0 + zw_1 + z^2 w_2$	[80]
4	$u = u_0 + zu_1 - \frac{z^2}{2} \frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_1} + u_1 \right)$ $v = v_0 + zv_1 - \frac{4z^3}{3h^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_1} + v_1 \right)$	[28]

	$w = w_0 + zw_1 + z^2w_2$	
5	$u = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)u_0 + z \left[ y^* u_1 + q^* \frac{\partial w_1}{a_1 \partial \alpha_1} - \frac{\partial w_0}{a_1 \partial \alpha_1} \right] + f(z)u_1$ $v = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)v_0 + z \left[ y^* v_1 + q^* \frac{\partial w_1}{a_2 \partial \alpha_2} - \frac{\partial w_0}{a_2 \partial \alpha_2} \right] + f(z)v_1$ $w = w_0 + g(z)w_1$ $y^* = -\frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{h}{2} \right), \quad q^* = -\frac{\partial g}{\partial z} \left( \frac{h}{2} \right)$	[71]
6	$u = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)u_0 + zu_1 - \frac{4z^3}{3h^2} \left( u_1 + \frac{\partial w_0}{a_1 \partial \alpha_1} \right)$ $v = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)v_0 + zv_1 - \frac{4z^3}{3h^2} \left( v_1 + \frac{\partial w_0}{a_2 \partial \alpha_2} \right)$ $w = w_0$	[64, 95]

ở đây,  $u_i, v_i, w_i$  là các thành phần chuyển vị,  $f(z), g(z)$  là các hàm lượng giác,  $a_1$  và  $a_2$  là giá trị tỷ lệ.

## 1.2. Tổng quan tình hình nghiên cứu vỏ FGM

Sự hấp dẫn bởi tính ưu việt của vật liệu composite mới, FGM, nên hiện nay vẫn được nhiều nhà nghiên cứu tiếp tục quan tâm. Từ các mô hình lý thuyết cho tới thực nghiệm nhằm hoàn thiện nghiên cứu và ứng dụng vật liệu FGM. Tuy nhiên luận án chỉ tập trung đánh giá tổng quan về vỏ FGM đã được nghiên cứu trong nước và trên thế giới có liên quan đến đề tài luận án.

### 1.2.1. Tổng quan các nghiên cứu vỏ FGM trên thế giới

#### 1.2.1.1. Một số bài toán điển hình sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển

Phân tích ứng xử của tấm và vỏ FGM theo lý thuyết cổ điển được rất nhiều nhà nghiên cứu quan tâm và thực hiện khá đầy đủ. Đối với bài toán phân tích ứng xử của vỏ FGM trên nền đàn hồi hoặc không có nền đàn hồi khi

chịu tải cơ, nhiệt, có thể kể đến một số công trình tiêu biểu sau: Woo và Meguid [120] đã nghiên cứu uốn phi tuyến của vỏ mỏng FGM chịu tải hướng kính và trường nhiệt độ. Hệ phương trình cân bằng được xây dựng trên cơ sở CPT và giả thiết Von Karman, việc giải bài toán xác định độ võng, ứng suất và mô men uốn của vỏ tựa đơn được thực hiện khi sử dụng khai triển Fourier. Hong-Liang Dai và Ting Dai đã phân tích uốn nhiệt đàn hồi cho vỏ trụ FGM [32]. Trong nghiên cứu này, phương pháp giải tích được áp dụng để phân tích uốn nhiệt đàn hồi đối với vỏ trụ FGM chịu tải trọng hướng tâm phân bố đều và tải nhiệt không đồng đều. Điều kiện biên đối với vỏ trụ FGM bao gồm một đầu tựa đơn và một đầu được ngàm chặt, trường chuyển vị nhận được theo lý thuyết vỏ tuyến tính cổ điển.

Bài toán về phân tích dao động vỏ FGM chịu tải nhiệt hoặc không chịu tải nhiệt, dưới tác dụng của tải cưỡng bức hoặc bài toán dao động tự do cũng được quan tâm nghiên cứu nhiều. Loy và cộng sự [69] đã nghiên cứu dao động của vỏ trụ FGM với điều kiện biên tựa đơn bằng cách sử dụng CPT và phương pháp Rayleigh-Ritz. Một cách tiếp cận tương tự, Arshad và cộng sự [18] đã nghiên cứu đặc tính dao động của vỏ trụ FGM cho ba luật phân bố tỷ lệ thể tích khác nhau. Đặc tính dao động của vỏ trụ với điều kiện biên khác nhau đã được khảo sát bởi Pradhan và cộng sự [82] khi sử dụng phương pháp Rayleigh và CPT. Bài toán này đã được đánh giá lại bởi Naeem và cộng sự [75] khi sử dụng phương pháp Ritz. Dao động cưỡng bức phi tuyến của vỏ thoải hai độ cong FGM được nghiên cứu bởi Alijani và cộng sự [10] khi sử dụng CPT, mô hình phi tuyến Von Karman và phương pháp rời rạc đa phổ Galerkin (multi-modal Galerkin discretization). Du và cộng sự [35] đã nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ FGM chịu kích thích trên cơ sở CPT, giả thiết Von Karman, kết hợp với phương pháp tỷ lệ phức. Du và Li [36] đã nghiên cứu đặc tính dao động phi tuyến của vỏ trụ FGM trong môi trường

nhật theo phương pháp tương tự. Ebrahimi và Najafizadeh [45] nghiên cứu dao động tự do của vỏ trụ FGM trên cơ sở CPT. Để tính toán số, các tác giả sử dụng kết hợp phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (generalized differential quadrature method) và phương pháp cầu phương tích phân tổng quát (generalized integral quadrature method). Sofiyev [110] đã phân tích đặc tính động lực học của vỏ trụ FGM chịu tải di động với vận tốc không đổi khi sử dụng CST. Vỏ trụ FGM có phân bố thể tích theo quy luật lũy thừa chịu tải dọc trục, tải nén trong và tải nén dạng vành tròn di động. Nghiên cứu này trình bày ứng xử động lực học của kết cấu và ảnh hưởng của chỉ số mũ của hàm phân bố vật liệu lên tốc độ tới hạn.

Phân tích ổn định của vỏ FGM chịu tải trọng nhiệt hoặc không đã có nhiều tác giả tập trung nghiên cứu. Shen [97, 99, 105] đã nghiên cứu ứng xử sau ổn định của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của lực nén dọc trục [97] hoặc áp lực cạnh [99] hoặc tăng nhiệt độ đồng đều [105] bằng cách sử dụng CPT và mô hình phi tuyến Von Karman. Cả biến dạng phi tuyến trước ổn định và sự không hoàn hảo hình học ban đầu, phân tích sau ổn định sử dụng lý thuyết lớp biên cho ổn định vỏ. Woo và cộng sự [121] đã nghiên cứu ứng xử sau ổn định của tấm và vỏ hình trụ mỏng dưới tải cơ và nhiệt bằng cách sử dụng CPT và giả thiết Von Karman. Ổn định của vỏ hình trụ FGM chịu tải tổ hợp dọc trục, xung quanh và xoắn được nghiên cứu bởi Huang và cộng sự [55] bằng cách sử dụng CPT, kết hợp với phương pháp Ritz và phương pháp phần tử hữu hạn. Nghiên cứu cho thấy ảnh hưởng áp lực xung quanh có tính quyết định hơn tới ổn định so với nén đúng tâm hoặc xoắn, trường hợp này ảnh hưởng của nén đúng tâm và xoắn là như nhau. Sun và cộng sự [112] đã phân tích ổn định của vỏ trụ không hoàn hảo FGM dưới tải nhiệt và cơ bằng cách sử dụng lý thuyết CPT và phương pháp Galerkin.

### 1.2.1.2. Lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất

Đánh giá ứng xử của tấm khi sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất cơ bản đã được nghiên cứu khá đầy đủ. Sử dụng FSDT trong đánh giá ứng suất, nhiệt và ổn định cho vỏ FGM cũng được các nhà nghiên cứu quan tâm.

Trong bài toán nhiệt - đàn hồi, Zhao và Liew [127] đã phân tích cơ-nhiệt phi tuyến hình học của panel trụ FGM. Các tác giả đã sử dụng FSDT và tham số động lực Sander cho biến dạng hữu hạn. Bahtui và Eslami [20] đã nghiên cứu bài toán nhiệt đàn hồi tổng quát của vỏ trụ tròn mỏng FGM dưới tải nhiệt xung trên cơ sở FSDT. Đặc tính vật liệu biến thiên theo chiều dày với luật phân bố theo hàm lũy thừa. Phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin và biến đổi Laplace được sử dụng để giải bài toán, bài báo trình bày kết quả tính toán chuyển vị, nhiệt độ và ứng suất nhiệt. Bài toán dao động tự do, uốn tĩnh và động của panel FGM hai độ cong dưới tác động đồng thời của tải cơ và nhiệt cũng được nghiên cứu bởi Kiani và cộng sự [61] khi sử dụng FSDT và biến đổi hỗn hợp Laplace-Fourier. Sheng và Wang [109] thực hiện phân tích dao động của vỏ trụ FGM chứa đầy chất lỏng đặt trên nền đàn hồi chịu tải cơ và nhiệt khi sử dụng FSDT. Kiani và cộng sự [61] đã nghiên cứu dao động tự do nhiệt đàn hồi của panel vỏ hai độ cong bằng FSDT với giả thiết Sander và sử dụng phương pháp Navier và biến đổi Laplace để giải các hệ phương trình nhận được.

Trong nghiên cứu vỏ FGM có biến dạng lớn, Arciniega và Reddy [15] đã trình bày phương trình phần tử hữu hạn dựa trên cách biểu diễn tensor cho phân tích biến dạng lớn của vỏ FGM chịu áp lực bên trong và lực kéo sử dụng FSDT. Kim cùng cộng sự [64] đã sử dụng phần tử vỏ tựa dạng bốn nút cho bài toán phi tuyến hình học của tấm và vỏ FGM. Trong nghiên cứu này, các tác giả sử dụng FSDT với tensor biến dạng Green cho ứng suất màng, uốn và ứng suất cắt, kết hợp sử dụng mô hình phi tuyến hình học Von Karman.

Tornabene và Ceruti [115] đã trình bày giản đồ tối ưu cho phân tích động và phân tích tĩnh vỏ FGM hai độ cong khi sử dụng FSDT kết hợp với phương pháp GDQ.

Bài toán điều khiển dao động vỏ áp điện FGM dưới tải nhiệt, tải cơ học và tải di động cũng được quan tâm nghiên cứu nhiều. Liew và cộng sự [67] đã thực hiện nghiên cứu điều khiển động và tĩnh trong miền tần số thông qua bộ khởi động và sensor áp điện của tấm và vỏ FGM đặt trong môi trường nhiệt độ thay đổi. Nghiên cứu được thực hiện dựa trên FSDT và phương pháp phần tử hữu hạn. Phân tích phi tuyến hình học của vỏ FGM được thực hiện bởi Arciniega và Reddy [15] bằng FSDT và phương pháp phần tử hữu hạn. Behjat và cộng sự [21] đã nghiên cứu đặc tính uốn tĩnh, dao động tự do của panel trụ áp điện FGM chịu tải cơ, nhiệt, điện bằng cách sử dụng FSDT và phương pháp phần tử hữu hạn. Sheng và Wang [106] đã nghiên cứu bài toán về ứng xử động lực của vỏ trụ FGM với lớp áp điện PZT chịu nhiệt độ biến đổi theo chiều dày và tải di động khi sử dụng FSDT. Bài toán này cũng được tác giả phát triển cho điều khiển dao động của vỏ trụ FGM gắn vào hai lớp áp điện cũng trên cơ sở FSDT.

Phân tích phi tuyến tấm, vỏ dựa trên FSDT là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng. Carla cùng cộng sự [89] đã thực hiện phân tích đặc tính tức thời động lực học của tấm và vỏ FGM khi sử dụng FSDT. Reddy và Chin [87] nghiên cứu đặc tính động lực học của tấm và vỏ trụ FGM chịu hai dạng tải nhiệt khác nhau dựa trên FSDT và phương pháp phần tử hữu hạn. Chorfi và Houmat [29] thực hiện phân tích dao động tự do phi tuyến của vỏ hai độ cong khi sử dụng FSDT với giả thiết Von Karman.

Trong phân tích ổn định vỏ, đặc tính dao động dưới điều kiện tải khác nhau được xem xét bởi nhiều nhà nghiên cứu. Sheng và Wang [107] đã nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ đến dao động và ổn định của vỏ trụ FGM

đặt trên nền đàn hồi sử dụng FSDT và phương pháp Bolotin. Zhang và Hao [126] nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ FGM chịu tác động kết hợp của tải nhiệt và kích thích ngoài trên cơ sở FSDT và phương pháp Galerkin. Ổn định của vỏ trụ FGM chịu áp lực xung quanh và nén dọc trục được nghiên cứu bởi Khazaeinejad và cộng sự [60], trong đó đã sử dụng FSDT và phương pháp giải tích. Isvandzibaei và cộng sự [56] nghiên cứu đặc tính dao động của vỏ trụ FGM chịu áp lực. Dựa trên FSDT và phương pháp giải tích đối với tần số dao động tự do của vỏ trụ FGM dưới điều kiện biên khác nhau khi sử dụng phương pháp Ritz. Sepiani cùng cộng sự [93] đã nghiên cứu đặc tính dao động và ổn định của vỏ trụ với lớp trong lõi là FGM, lớp ngoài là vật liệu đẳng hướng chịu tác động của tải tĩnh và tải chu kỳ. Kết quả được trình bày đối với vỏ trụ tựa đơn khi sử dụng CST và FSDT. Su và cộng sự [111] đã phân tích dao động của vỏ FGM với điều kiện biên tổng quát. Phương pháp FSDT và quy luật phân bố đặc tính vật liệu theo chiều dày là hàm lũy thừa bốn tham số đã được sử dụng. Phương pháp Rayleigh-Ritz được dùng để giải các phương trình vi phân nhận được. Sheng và Wang [108] đã trình bày bài toán dao động và ổn định của vỏ trụ FGM áp điện dưới tải nhiệt và tải dọc trục. Hệ phương trình cân bằng nhận được trên cơ sở FSDT, nguyên lý Hamilton và phương trình Maxwell mô tả trường điện áp theo chiều dày.

Qua phân tích ở trên, có thể thấy rằng lý thuyết vỏ cổ điển và biến dạng trượt bậc nhất được sử dụng trong hầu hết các dạng bài toán điện hình tính toán vỏ FGM mỏng. Điều này có thể được lý giải bởi tính đơn giản của mô hình tính toán. Tuy nhiên, như đã phân tích trong mục 1.1, việc áp dụng lý thuyết cổ điển và lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất còn gặp nhiều hạn chế về độ chính xác của kết quả tính toán trong những trường hợp cụ thể, nên các lý thuyết biến dạng trượt bậc cao ngày càng được sử dụng nhiều hơn trong nghiên cứu tấm, vỏ composite nói chung và vỏ FGM nói riêng.

### 1.2.1.3. Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao

#### a) Lý thuyết biến dạng trượt bậc ba

Lý thuyết biến dạng trượt bậc ba (TSDT) được biết đến và sử dụng rộng rãi là phương án của Reddy [86], nhất là nghiên cứu ứng xử của tấm. Áp dụng TSDT trong nghiên cứu vỏ bao gồm phân tích ứng suất, ổn định và dao động chịu tác dụng của tải cơ trong môi trường nhiệt hoặc không chịu tác động của nhiệt độ, trên nền đàn hồi hoặc không có nền đàn hồi.

Bài toán phân tích dao động vỏ FGM cũng được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm thực hiện. Shen [96] nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ FGM trên nền đàn hồi, chịu tải trọng nhiệt độ sử dụng lý thuyết TSDT kiểu Reddy kết hợp với giả thiết phi tuyến hình học Von Karman. Để mô tả phân bố vật liệu theo chiều dày sử dụng mô hình Voigt và Mori-Tanaka. Najafzadeh và Isvandzibaei [77] đã phân tích dao động của vỏ trụ mỏng FGM với vòng tựa ở giữa khi sử dụng TSDT, vỏ có phân bố vật liệu theo chiều dày với quy luật hàm lũy thừa. Lang và Xuewu [66] nghiên cứu dao động và ổn định của vỏ trụ tròn đàn nhiệt-điện từ chịu tải xung quanh cũng như tải hướng trục khi sử dụng TSDT. Quy luật phân bố vật liệu theo chiều dày là luật lũy thừa.

Bài toán ổn định cũng đã được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Shen [98], Shen và Leung [104] đã thực hiện phân tích sau ổn định của panel trụ FGM trong môi trường nhiệt độ, chịu tải nén dọc trục [98], hoặc áp lực xung quanh [104]. Các phương trình nhận được từ TSDT với giả thiết Von Karman. Cả biến dạng phi tuyến trước ổn định và sự không hoàn hảo hình học ban đầu của panel trụ FGM đều được phân tích sau ổn định khi sử dụng lý thuyết lớp biên về ổn định vỏ. Bagherizadeh và cộng sự [19] đã trình bày phương pháp giải tích cho tải ổn định tới hạn của vỏ trụ FGM tựa đơn bao quanh nền đàn hồi khi sử dụng TSDT và phương pháp chuỗi. Shen và Noda [102] nghiên cứu sau ổn định của vỏ trụ FGM dưới tải cơ học hướng tâm và



đọc trục trong môi trường nhiệt khi sử dụng TSDT của Reddy với giả thiết phi tuyến hình học Von Karman. Đặc tính vật liệu phụ thuộc nhiệt độ theo chiều dày với quy luật hàm lũy thừa và bài toán được thực hiện với điều kiện biên trên các cạnh là ngàm hoặc tựa đơn.

Bài toán phân tích ứng xử vỏ FGM lớp áp điện cũng đã có nhiều nghiên cứu. Shen [100], Shen và Noda [103] phát triển cho vỏ trụ FGM với bộ dẫn động áp điện. Nghiên cứu được thực hiện khi khảo sát ổn định của vỏ trụ FGM chịu tải áp lực xung quanh hoặc áp lực thủy tĩnh trong môi trường nhiệt trên cơ sở TSDT với giả thiết Von Karman. Tính chất vật liệu phân bố theo chiều dày với luật hàm lũy thừa và phụ thuộc nhiệt độ. Shen và Liew [101] phát triển nghiên cứu [98] cho panel trụ FGM với lớp áp điện dưới tác dụng đồng thời của nén dọc trục, tải điện và nhiệt. Phân tích sau ổn định được thực hiện khi sử dụng TSDT với giả thiết phi tuyến hình học Von Karman. Tính chất vật liệu biến đổi theo chiều dày với luật lũy thừa và phụ thuộc nhiệt độ.

*b) Lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D*

Mô hình HSDT/HOSNT khảo sát ứng xử của tấm và vỏ theo lý thuyết biến dạng bậc cao cho cả ba chiều. Mô hình bậc cao được xây dựng trên cơ sở khai triển trường chuyển vị dưới dạng tổng các hàm đa thức hoặc phi đa thức theo tọa độ chiều dày.

Bài toán phân tích ứng suất. Cinefra và cộng sự [30] đã phát triển công thức hợp nhất Carrera (CUF) cho vỏ trụ FGM tựa đơn chịu tải cơ và nhiệt. Hệ phương trình cân bằng nhận được bằng cách sử dụng nguyên lý dịch chuyển khả dĩ, lý thuyết HSDT và quy luật biến thiên nhiệt độ phi tuyến theo chiều dày. Các tác giả thực hiện phân tích ứng suất vỏ khi sử dụng kỹ thuật Navier để giải bài toán. Mantari và Soares [70] đã phát triển lý thuyết bậc cao kiểu lượng giác cho vỏ FGM. Lý thuyết bậc cao dạng sin đã được sử dụng để nghiên cứu ứng suất và chuyển vị của vỏ trụ FGM chịu tải ngang. Phân bố vật

liệu theo chiều dày là hàm lũy thừa và hàm mũ, kết quả khảo sát được trình bày đối với điều kiện biên tựa đơn ở các cạnh và phương pháp giải Navier được áp dụng cho bài toán. Devesh và cộng sự [83] đã phân tích ứng suất và chuyển vị của panel trụ composite lớp và sandwich FGM chịu tải cơ và nhiệt khi sử dụng HSDT và HOSNT. Giả thiết nhiệt độ phân bố theo chiều dày là hàm đa thức và vỏ có chiều dày trung bình. Phương pháp Navier và nguyên lý năng lượng tối thiểu được áp dụng để giải hệ phương trình vi phân đối với panel có các cạnh tựa đơn. Quy luật phân bố vật liệu theo chiều dày là hàm lũy thừa.

Ngoài bài toán tĩnh, nghiên cứu dao động vỏ dựa trên lý thuyết HSDT/HOSNT cũng được quan tâm nghiên cứu. Patel BB và cộng sự [80] nghiên cứu đặc trưng dao động tự do của vỏ trụ elip FGM khi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) trên cơ sở lý thuyết Quasi-3D. Quy luật biến thiên vật liệu theo chiều dày là quy luật lũy thừa. Matsunaga [72] đã phát triển lý thuyết Quasi-3D cho phân tích ổn định và dao động tự do của vỏ mỏng FGM, với quy luật phân bố vật liệu theo chiều dày là hàm lũy thừa. Phương pháp phân tích Navier được sử dụng đối với biểu thức chuyển vị và ứng suất vỏ có các cạnh tựa đơn. Alijani và cộng sự [11] đã nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ đến dao động phi tuyến hình học của vỏ FGM hai độ cong có các cạnh tựa đơn chịu tác dụng của nhiệt biến đổi và điều hòa. Quy luật biến thiên vật liệu theo chiều dày là hàm lũy thừa. Neves cùng cộng sự [79] đã phân tích dao động tự do của vỏ FGM trên cơ sở HSDT. Phương trình chuyển động và điều kiện biên nhận được bằng công thức hợp nhất Carrera dựa trên nguyên lý dịch chuyển khả dĩ. Kết quả phân tích số nhận được trong trường hợp khảo sát panel vỏ cầu và panel trụ FGM với các cạnh tựa đơn. Fazzolari và Carrera [46] đã xem xét mô hình bậc cao cải tiến với ảnh hưởng của biến dạng pháp tuyến và biến dạng trượt để nghiên cứu dao động tự do

của vỏ sandwich có lõi FGM và vỏ hai độ cong FGM. Phương pháp năng lượng tối thiểu Ritz, nguyên lý dịch chuyển khả dĩ, kết hợp với mô hình vỏ zigzag và lớp đơn tương đương theo công thức hợp nhất Carrera được sử dụng để giải bài toán. Quy luật phân bố vật liệu theo chiều dày là hàm lũy thừa, và thực hiện khảo sát số bài toán với điều kiện biên ngàm chặt hoặc tựa đơn trên tất các cạnh. Chen và cộng sự [28] nghiên cứu dao động tự do của vỏ mỏng hai độ cong sandwich FGM trên cơ sở lý thuyết Quasi-3D. Phương pháp Navier được sử dụng để giải bài toán cho điều kiện biên tựa đơn.

Như vậy, việc sử dụng mô hình lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D cũng đã được nhiều nhà nghiên cứu sử dụng trong tính toán vỏ FGM. Các phương pháp tính toán được sử dụng chủ yếu bao gồm: phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp cầu phương sai phân, phương pháp biến phân (Ritz, Galerkin), phương pháp Navier cho biên tựa đơn, v.v. Việc tính toán vỏ theo hướng tiếp cận giải tích đối với các trường hợp điều kiện biên khác nhau còn chưa được tập trung nghiên cứu. Đồng thời, các hiệu ứng mới, có ý nghĩa khoa học từ việc sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D trong nghiên cứu vỏ FGM chưa được chỉ ra rõ nét.

#### *1.2.1.4. Lý thuyết đàn hồi ba chiều*

Nghiên cứu ứng xử của vỏ khi sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều cũng được nhiều tác giả quan tâm. Tuy nhiên, các nghiên cứu chủ yếu tập trung phân tích ứng xử cho tấm, vỏ với điều kiện biên tựa đơn, một số ít nghiên cứu với điều kiện biên ngàm.

Đối với bài toán phân tích ứng suất vỏ FGM, có thể liệt kê một số nghiên cứu điển hình như: Wu và Tsai [122] đã đưa ra lời giải 3D cho phân tích tĩnh của vỏ chòm cầu khi sử dụng phương pháp cầu phương sai phân. Bài toán được giải cho điều kiện biên tựa đơn với tải phân bố dạng sin và phân bố đều. Sedighi và Shakeri [92] đã đưa ra lời giải bài toán đàn hồi 3D cho phân tích

trạng thái ứng suất-biến dạng của panel trụ áp điện FGM trục hướng tựa đơn chịu tác động của áp lực và tĩnh điện. Quy luật phân bố vật liệu theo chiều dày với luật hàm lũy thừa. Phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin được sử dụng để giải bài toán với điều kiện biên tương ứng. Pelletier và Vel [81] đã nghiên cứu lời giải chính xác cho đặc tính nhiệt-đàn hồi của vỏ trụ FGM trục hướng với cạnh tựa đơn. Hàm chuyển vị và nhiệt độ được phân tích theo các hàm cơ sở thỏa mãn điều kiện biên, từ đó hệ phương trình cân bằng được chuyển thành các hệ phương trình vi phân thường. Các tác giả sử dụng phương pháp chuỗi lũy thừa để nghiên cứu cho trường hợp vỏ trụ dài vô hạn. Alibeigloo [9] đã trình bày lời giải cho vỏ trụ áp điện FGM có các cạnh tựa đơn chịu tải áp lực và kích thích điện trường. Các phương trình của lý thuyết đàn hồi 3D được chuyển về các phương trình vi phân thường, sử dụng khai triển theo chuỗi Fourier. Liu và cộng sự [68] đã phát triển phương pháp đàn hồi không gian cho vỏ cầu thoải áp điện FGM chịu tải nhiệt dừng. Nghiên cứu đã sử dụng ba thành phần chuyển vị và hai hàm ứng suất để xác định trạng thái ứng suất-biến dạng không gian của vỏ và áp dụng khai triển chuỗi lượng giác để giải bài toán biên.

Bài toán nghiên cứu dao động vỏ 3D cũng được các tác giả quan tâm nghiên cứu. Chen cùng cộng sự [27] đã trình bày lời giải dao động tự do 3D cho vỏ cầu thoải đẳng hướng và vỏ cầu FGM. Phân bố vật liệu theo hướng chiều dày với quy luật lũy thừa. Các tác giả đã sử dụng phương pháp khai triển theo chuỗi ba hàm chuyển vị và đưa các phương trình đạo hàm riêng về các phương trình vi phân thường. Vel [118] đã nghiên cứu dao động tự do và cưỡng bức của vỏ trụ trục hướng dài vô hạn. Nghiên cứu sử dụng mô hình lý thuyết đàn hồi 3D, quy luật phân bố vật liệu Mori-Tanaka và khai triển chuỗi Taylor, hàm chuyển vị được phân tích theo các hàm cơ sở thỏa mãn điều kiện biên. Các phương trình vi phân thường được giải bằng cách sử dụng phương

pháp chuỗi lũy thừa. Ye cùng cộng sự [123, 124] đã trình bày lời giải 3D cho dao động tự do của vỏ cầu FGM và vỏ sandwich khi sử dụng phương pháp năng lượng Ritz. Phân bố vật liệu theo chiều dày với quy luật lũy thừa. Các tác giả đã biểu diễn hàm chuyển vị dưới dạng chuỗi Fourier được hiệu chỉnh với số hạng đa thức bổ trợ để thỏa mãn các điều kiện biên tổng quát. Alibeigloo cùng cộng sự [8] đã nghiên cứu dao động tự do 3D của vỏ trụ FGM gắn thêm lớp áp điện sử dụng phương pháp đàn hồi không gian và phương pháp cầu phương sai phân cho các điều kiện biên tựa đơn, cũng như các điều kiện biên khác.

### 1.2.2. Tổng quan các nghiên cứu vỏ FGM trong nước

Ở trong nước, nghiên cứu về kết cấu được làm bằng vật liệu có cơ tính biên thiên đã có nhiều nhà nghiên cứu quan tâm. Nghiên cứu được trình bày ở hội nghị, tạp chí trong và ngoài nước, cũng như trong luận án. Điển hình của các tác giả như của Đào Huy Bích, Nguyễn Đình Đức, Đào Văn Dũng, v.v.

Tác giả Dao Huy Bich và Dinh Gia Ninh [22] đã nghiên cứu ổn định động phi tuyến của vỏ hình xuyên sandwich FGM tăng cứng không hoàn hảo chứa chất lỏng chịu tải cơ-nhiệt bên ngoài. Trong bài báo, các tác giả đã nghiên cứu tần số dao động tự do, cũng như đặc tính dao động phi tuyến của vỏ chịu nhiệt độ bên ngoài trên cơ sở lý thuyết vỏ cô điển. Trong nghiên cứu của mình các tác giả Dao Huy Bich, Dao Van Dung và Le Kha Hoa [23] đã thực hiện phân tích ổn định tĩnh và động của vỏ cầu mỏng chịu tải nhiệt khi sử dụng CST, phương pháp Galerkin sử dụng cho phân tích tĩnh và phương pháp Runge-Kutta cho phân tích động. Ứng xử phi tuyến của panel FGM được tăng cứng trên nền đàn hồi được nghiên cứu bởi các tác giả Nguyen Dinh Duc [40], Nguyen Dinh Duc và Tran Quoc Quan [41], Nguyen Dinh Duc và Pham Toan Thang [42]. Trong các nghiên cứu của mình các tác giả đã sử dụng lý thuyết tấm cô điển và kỹ thuật san đều tác dụng gân Lekhnitsky. Trong nghiên cứu

[38], các tác giả Nguyen Dinh Duc và Tran Quoc Quan đã phân tích động lực học phi tuyến của vỏ mỏng hai độ cong FGM không hoàn hảo, điều kiện biên tựa đơn trên nền đàn hồi chịu tải nhiệt và trên cơ sở sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển và giả thiết Von Karman. Vu Thi Thuy Anh và cộng sự [13] sử dụng phương pháp giải tích để phân tích ổn định phi tuyến của vỏ cầu composite có cơ tính biến thiên trên nền đàn hồi chịu tác dụng của ngoại lực trong môi trường nhiệt độ.

Trên cơ sở sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) và giả thiết Von Karman, Nguyen Dinh Duc và Pham Toan Thang [39] đã nghiên cứu đặc trưng động lực học phi tuyến và đặc tính dao động của vỏ trụ FGM không hoàn hảo trên nền đàn hồi. Phương pháp số Runge-Kutta đã được sử dụng để đánh giá đặc trưng động lực của vỏ FGM chịu tải cơ học hướng trục và ngang, tải damping. Nghiên cứu của các tác giả Dao Huy Bich, Nguyen Dinh Duc và Tran Quoc Quan [24] đã thực hiện khảo sát dao động phi tuyến của vỏ mỏng hai độ cong FGM tăng cứng không hoàn hảo trên nền đàn hồi khi sử dụng FSDT. Các tác giả Dao Van Dung và Le Kha Hoa [44] đã sử dụng phương pháp bán giải tích để phân tích ổn định động xoắn phi tuyến của vỏ trụ tròn FGM gia cường bao quanh bởi nền đàn hồi, lý thuyết vỏ Donnell với giả thiết hình học phi tuyến Von Karman được các tác giả sử dụng để xây dựng các phương trình tính toán. Tran Minh Tu và cộng sự [116] nghiên cứu dao động tự do của vỏ trụ composite có cơ tính biến thiên. Trong nghiên cứu này tác giả sử dụng phương pháp giải tích dựa trên lý thuyết vỏ mỏng và kỹ thuật san đều gân để giải bài toán. Duong Thanh Huan, Tran Minh Tu và Tran Huu Quoc [54] đã trình bày phân tích dao động tự do của panel vỏ hai độ cong FGM trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt, trong đó nguyên lý Hamilton và lý thuyết FSDT đã được áp dụng trong xây dựng mô hình tính toán. Nguyen Dinh Duc và cộng sự [43] đã phân tích ổn định nhiệt của vỏ

nón cụt sandwich FGM được gia cường bằng các thanh FGM tựa trên nền đàn hồi khi sử dụng FSDT, kết hợp với phương pháp Galerkin.

Trong nghiên cứu của Hoang Van Tung và Nguyen Dinh Duc [117], các tác giả đã thực hiện đánh giá đặc tính phi tuyến của panel cong FGM tựa trên nền đàn hồi. Ở đây, phương pháp giải tích được áp dụng cho bài toán panel tựa đơn chịu tải cơ và nhiệt khi sử dụng TSDT và phương pháp Galerkin. Nguyen Dinh Duc cùng cộng sự cũng đã tiếp tục phát triển nghiên cứu [117] cho vỏ trụ FGM trên nền đàn hồi chịu tải nhiệt và cơ. Nguyen Dinh Duc và Hoang Thi Thiem [37] đã phân tích động lực của vỏ trụ tròn FGM không hoàn hảo trên nền đàn hồi chịu tải nén dọc trục trong môi trường nhiệt khi sử dụng TSDT của Reddy và giả thiết phi tuyến hình học Von Karman. Pham Hong Cong và cộng sự [31] nghiên cứu đáp ứng động phi tuyến cho vỏ sandwich hai độ cong có lớp ngoài là nhôm và lớp lõi là auxetic trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng nổ. Trong nghiên cứu, các tác giả đã sử dụng phương pháp giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc ba của Reddy, phi tuyến hình học theo giả thiết Von Karman, hàm ứng suất Airy, phương pháp Galerkin và phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để thiết lập và giải các hệ phương trình động lực học phi tuyến.

Phân tích dao động của vỏ thoải hai độ cong FGM Nano các bon gia cường khi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến 4 biến đã được tác giả Tran Huu Quoc và cộng sự [114] đánh giá chi tiết trong nghiên cứu của mình. Trong đó phương trình cân bằng thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton và phương pháp giải Navier. Bui Quoc Tinh và cộng sự [125] thực hiện phân tích đẳng hình học cho sự ảnh hưởng phụ thuộc độ lớn của dầm micro biến thiên bằng lý thuyết quasi-3D phi cổ điển khai triển thành phần chuyển vị bậc cao theo chiều dài và chiều dày, lúc này hệ số hiệu chỉnh cắt được loại bỏ. Trong nghiên cứu của mình, các tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu

hạn cho bài toán và thực hiện nghiên cứu bài toán uốn tĩnh và bài toán dao động. Nghiên cứu dao động và ổn định của dầm sandwich biến thiên khi sử dụng lý thuyết biến dạng trượt quasi-3D, chuyển bị bậc cao theo chiều dày và chiều dài đã được Nguyen Trung Kien và cộng sự [62] thực hiện. Trong công trình của mình tác giả sử dụng phương pháp Ritz để phân tích tần số dao động riêng và giới hạn tải ổn định cho dầm với các điều kiện biên khác nhau. Nguyen Xuan Hung và cộng sự [78] nghiên cứu dao động tự do và uốn tĩnh cho tấm biến thiên sandwich rỗng khi sử dụng lý thuyết quasi-3D cải tiến và phương pháp phân tử hữu hạn.

Tác giả Lê Khả Hòa [2] đã phân tích ổn định phi tuyến của vỏ FGM khi sử dụng lý thuyết Donnell-Karman cho chuyển vị, áp dụng phương pháp Galerkin cho việc giải quyết bài toán. Trên cơ sở mô hình tính toán nhận được, luận án đã phân tích ổn định tĩnh của vỏ FGM không hoàn hảo không gân gia cường, phân tích phi tuyến ổn định tĩnh của vỏ trụ mỏng có gân gia cường lệch tâm, phân tích ổn định tĩnh của vỏ trụ nón cụt FGM có gân gia cường. Vũ Hoài Nam [4], đã thực hiện phân tích phi tuyến của vỏ FGM khi sử dụng lý thuyết vỏ Donnell và giả thiết Von Karman. Phương pháp giải tích kết hợp phương pháp số đã được áp dụng để giải quyết bài toán. Nguyễn Thị Nga [5], đã phân tích ổn định của tấm và vỏ cơ tính biến thiên có gân gia cường chịu tải cơ và nhiệt khi sử dụng CST, FSDT, TSDT và phương pháp san đều tác dụng gân của Lekhnitskii. Phương pháp Galerkin được sử dụng để tìm tải giới hạn cũng như xây dựng đường cong tải-độ võng sau tới hạn. Phạm Quốc Hòa [3] sử dụng phương pháp làm tròn trên cạnh kết hợp với phần tử vỏ MITC3 để phân tích đáp ứng tuyến tính và phi tuyến vỏ như vỏ cầu, vỏ trụ và vỏ yên ngựa làm bằng vật liệu composite lớp đồng phương gồm nhiều lớp và composite có cơ tính biến thiên. Trong đó tác giả sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất cho chuyển vị, phương pháp Acr-length kết hợp với phương pháp Newton Raphson



để giải quyết các hiện tượng mất ổn định tĩnh của vỏ, phương pháp Newmark và phương pháp lặp Newton Raphson để xử lý bài toán động lực học phi tuyến. Lê Thúc Định [1] đã thực hiện phân tích động lực học của tấm và vỏ trụ thoải làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên chịu tải trọng khí động. Tác giả sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu ứng xử động lực học tuyến tính của tấm và vỏ trụ thoải FGM, dạng tải trọng là tải khí động theo mô hình Scanlan.

### **1.3. Kết quả nghiên cứu đạt được từ các công trình đã công bố và những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu**

Trên cơ sở tìm hiểu kết quả các nghiên cứu đã tổng hợp ở trên, có thể rút ra một số nhận xét như sau:

- Tính toán kết cấu làm từ vật liệu FGM được rất nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu, số lượng các công trình nghiên cứu theo hướng này lớn. Trong đó, phần lớn các tác giả sử dụng mô hình lý thuyết cổ điển, lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất do tính đơn giản của mô hình toán học và kết quả tính toán có độ chính xác đảm bảo đối với kết cấu thành mỏng. Đã nghiên cứu, phân tích nhiều bài toán tĩnh, dao động tự do, dao động cưỡng bức cho các bài toán tuyến tính, phi tuyến, các bài toán ổn định tĩnh và ổn định động khác nhau cho vỏ như: vỏ trụ, vỏ nón, vỏ nón cụt, vỏ cầu, vỏ hyperbol, vỏ có lỗ giảm yếu, vỏ có gân gia cường, v.v. Vỏ chịu tác dụng của các dạng tải trọng khác nhau như tải trọng phân bố đều, tải áp lực, tải trọng tập trung, tải trọng dạng điều hòa, tải trọng xung, tải trọng nhiệt, v.v.

- Việc sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D, lý thuyết đàn hồi 3D vẫn còn khiêm tốn và dừng lại ở các bài toán có điều kiện biên tựa đơn. Trong phân tích ứng xử của vỏ FGM áp dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp cầu phương sai phân, phương pháp biến phân (Ritz,

Garlerkin), phương pháp Navier cho biên tựa đơn, v.v. Việc tính toán vỏ theo hướng tiếp cận giải tích đối với các trường hợp điều kiện biên khác còn chưa được tập trung nghiên cứu.

- Việc thuần nhất hóa vật liệu FGM được thực hiện chủ yếu bằng quy tắc biến thiên tỷ lệ thể tích Voigt theo hàm lũy thừa và hàm mũ.

- Số lượng các nghiên cứu về tối ưu hóa kết cấu FGM có tính đến các vấn đề về điều khiển dao động kết cấu, kết cấu thông minh, đáp ứng ổn định, v.v. nghiên cứu kết cấu FGM được gia cường bởi vật liệu nano, đặc biệt là nano cacbon, v.v. vẫn còn khá hạn chế.

- Phần lớn các nghiên cứu được thực hiện dựa trên các phương pháp giải tích, bán giải tích, phương pháp số (phần tử hữu hạn, cầu phương sai phân, v.v.) hay nghiên cứu thực nghiệm kết cấu FGM hầu như chưa được thực hiện.

Từ các nhận xét nêu trên tác giả đề xuất một số vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu sau:

- Nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ học, nhiệt độ, v.v. bằng phương pháp giải tích với các điều kiện biên khác nhau trên cơ sở sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao HSDT/HOSNT kiểu Quasi-3D.

- Nghiên cứu ổn định, dao động kết cấu tấm vỏ FGM theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D theo lý thuyết tuyến tính và phi tuyến.

- Nghiên cứu về tối ưu hóa kết cấu FGM có tính đến các vấn đề về điều khiển dao động kết cấu, kết cấu thông minh, đáp ứng ổn định, v.v. nghiên cứu kết cấu FGM được gia cường bởi vật liệu nano.

- Nghiên cứu thực nghiệm kết cấu FGM.

Theo kết quả nghiên cứu của Rohwer và cộng sự [88], việc sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) trong bài toán nghiên cứu ứng suất nhiệt của kết cấu composite dày cho kết quả có nhiều sai lệch so với lý thuyết

đàn hồi 3D. Sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (HSDT) khi nghiên cứu kết cấu composite dày cho kết quả tính toán phù hợp hơn so với lý thuyết đàn hồi 3D trong trường hợp kết cấu chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt. Mặt khác, khi phân tích trạng thái ứng suất của tấm, vỏ tại khu vực biên ngàm, khu vực chịu tải trọng tập trung [48, 49], Firsanov và Doan đã chỉ ra việc sử dụng lý thuyết HSDT có tính đến ảnh hưởng của ứng suất cắt theo cả phương ngang và pháp tuyến cho phép đánh giá chính xác hơn trạng thái ứng suất của kết cấu tại những khu vực có xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất. Do đó, trong luận án này tác giả tập trung sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu quasi-3D để nghiên cứu trạng thái ứng suất của vỏ trụ FGM chịu tải trọng cơ, nhiệt, đặc biệt là tại khu vực có hiện tượng tập trung ứng suất, hiệu ứng biên mạnh.

Như đã phân tích ở trên, việc sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao HSDT/HOSNT kiểu Quasi-3D, phương pháp giải tích trong nghiên cứu đánh giá ứng xử vỏ FGM dưới tác dụng tải trọng cơ-nhiệt, với các điều kiện biên khác nhau là vấn đề có tính thời sự và có ý nghĩa khoa học. Mặt khác, các công bố theo hướng này còn khá khiêm tốn.

#### **1.4. Những nội dung nghiên cứu trong luận án**

- Xây dựng mô hình toán học và chương trình tính toán số trong nghiên cứu vỏ trụ FGM dưới tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt và cơ-nhiệt đồng thời dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D.

- Sử dụng phương pháp giải tích giải bài toán biên đối với vỏ trụ FGM với các điều kiện biên khác nhau để nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ. Ở đây chuỗi lượng giác đơn được sử dụng để chuyển hệ phương trình đạo hàm riêng về các hệ phương trình vi phân thường, còn phép biến đổi Laplace được sử dụng để giải các phương trình vi phân thường với các điều kiện biên khác nhau.

- Thực hiện phân tích hiện tượng tập trung ứng suất, nghiên cứu ảnh hưởng các điều kiện biên, nghiên cứu ảnh hưởng của chiều dày và chiều dài vỏ, ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích, ảnh hưởng đặc trưng của các dạng tải trọng, ảnh hưởng của các tham số nhiệt độ đến trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ. Từ đó, đề xuất các khuyến cáo trong tính toán thiết kế vỏ trụ làm từ vật liệu FGM.

### **Kết luận chương 1**

Nghiên cứu kết cấu làm từ vật liệu FGM là đề tài hấp dẫn đối với nhiều nhà nghiên cứu trong nước cũng như quốc tế. Nhiều mô hình tính toán đã được đưa ra để nghiên cứu ứng xử động lực học, ổn định, phân tích tĩnh cho các kết cấu thành mỏng dạng dầm, tấm, vỏ, v.v. làm từ vật liệu FGM. Dựa trên nội dung đã tổng hợp, phân tích, đánh giá các kết quả của các nghiên cứu về vỏ FGM đã công bố trên thế giới và trong nước có thể rút ra một số nhận xét sau:

- Các nghiên cứu ứng xử của kết cấu FGM theo mô hình lý thuyết CST và FSDT cho cả tấm và vỏ rất phong phú và được nghiên cứu tương đối đầy đủ.

- Các nghiên cứu ứng xử của kết cấu FGM sử dụng mô hình lý thuyết đàn hồi 3D vẫn còn khá khiêm tốn, các nghiên cứu chủ yếu tập trung cho các bài toán đơn giản với điều kiện biên được tựa đơn.

- Nghiên cứu tính toán kết cấu tấm, vỏ FGM theo mô hình lý thuyết biến dạng trượt bậc cao (HSDT) bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng pháp ngang cũng được nhiều tác giả quan tâm. Việc sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao có tính đến ảnh hưởng của biến dạng pháp ngang (HOSNT) theo hiểu biết của tác giả vẫn còn khá ít, các nghiên cứu chủ yếu tập trung phân tích ứng suất và dao động của tấm, vỏ FGM với điều kiện biên tựa đơn, và phương pháp giải thường áp dụng là phương pháp phân tử hữu hạn, phương pháp cầu phương sai phân, v.v. kết hợp với kỹ thuật Navier.

- Nghiên cứu vỏ làm từ vật liệu FGM dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao có tính đến ảnh hưởng của biến dạng pháp ngang (HOSNT)

(Quasi-3D) theo hướng tiếp cận giải tích là vấn đề nghiên cứu mới, có tính khoa học và chưa được quan tâm thực hiện. Trong luận án này, tác giả tập trung nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM với các điều kiện biên khác nhau trên cơ sở lý thuyết HOSNT (Quasi-3D) chịu tải trọng cơ, nhiệt và cơ-nhiệt đồng thời.

## **Chương 2. XÂY DỰNG MÔ HÌNH TÍNH TOÁN VỎ TRỤ FGM THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC CAO QUASI-3D**

Đặt bài toán: Vỏ trụ được chế tạo từ vật liệu FGM, chịu tác dụng của tải cơ, nhiệt. Trong chương này tiến hành các nghiên cứu sau:

- Phân tích các đặc tính cơ lý của vỏ trụ FGM.
- Xây dựng các quan hệ ứng xử cơ học đối với dạng kết cấu vỏ từ vật liệu FGM.
- Xây dựng mô hình tính toán vỏ trụ FGM theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D.

### **2.1. Tính chất cơ học của vỏ trụ FGM**

#### **2.1.1. Đặc tính vật liệu FGM theo phân bố thể tích**

Để mô hình hóa quy luật phân bố thể tích của vật liệu FGM, các nhà nghiên cứu đã đưa ra các quy luật biến thiên tỉ lệ thể tích vật liệu dựa trên một số phương pháp thuần nhất hóa khác nhau. Phương pháp thuần nhất được phân thành ba loại dựa vào hướng tiếp cận để giải quyết bài toán. Phương pháp trực tiếp sử dụng mô hình vật lý chính xác, phương pháp này dựa trên mô hình hóa toán học phức tạp và thường khó thực hiện. Phương pháp thứ hai là phương pháp biến phân, trong đó nghiên cứu các nguyên lý liên kết với tính chất tương ứng. Cụ thể, lý thuyết đàn hồi cho module đàn hồi, lý thuyết truyền nhiệt cho tính dẫn nhiệt, lý thuyết điện từ cho độ thẩm từ, v.v. để xác định giới hạn trên và dưới của tính chất. Phương pháp thứ ba là kỹ thuật lấy xấp xỉ dựa trên các tham số khác nhau của các pha cấu thành, phương pháp này được quan tâm và sử dụng nhiều.

- Quy tắc gần đúng hỗn hợp được Voigt hay Reuss [128] áp dụng lần đầu và tính chất hiệu dụng vật liệu FGM có dạng sau:

$$P_{FGM} = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (2.1)$$

ở đây,  $V_1$ ,  $V_2$  là tỷ lệ thể tích của pha 1 và 2 tương ứng.

- Quy tắc miền trung bình đạt được độ chính xác hơn so với quy tắc nêu

trên. Diễn hình và cũng được ứng dụng nhiều là phương pháp Mori-Tanaka. Hàm lũy thừa theo biến thiên tỷ lệ thể tích FGM kết hợp với mô hình thực nghiệm Mori-Tanaka [74] được biểu diễn dưới dạng sau:

$$\frac{E_{FGM} - E_1}{E_2 - E_1} = \frac{V_2}{1 + \frac{V_1(E_2 - E_1)}{E_1 + \frac{4}{3}\mu_1}}, \quad \frac{\mu_{FGM} - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{V_2}{1 + \frac{V_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + f_1}} \quad (2.2)$$

$$\frac{\alpha_{FGM} - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/E_{FGM}) - (1/E_1)}{(1/E_2) - (1/E_1)}, \quad \frac{\kappa_{FGM} - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{V_2}{1 + \frac{V_1(\kappa_2 - \kappa_1)}{3\kappa_1}}$$

$$f_1 = \frac{\mu_1(9E_1 + 8\mu_1)}{6(E_1 + 2\mu_1)}, \quad V_2 = \left(\frac{z}{h}\right)^\eta, \quad V_1 = 1 - V_2 \quad (2.3)$$

ở đây,  $E$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  và  $\kappa$  lần lượt là module đàn hồi, hệ số Poisson, hệ số nở nhiệt và hệ số dẫn nhiệt, hàm lũy thừa với số mũ  $\eta$  và chiều dày của vật liệu là  $h$ .

Bảng 2.1. Trình bày danh sách quy luật biến thiên tỷ lệ thể tích theo các mô hình khác nhau trong các nghiên cứu về vỏ FGM.

Bảng 2.1. Mô hình biến thiên tỷ lệ thể tích trong các lý thuyết

TT	Quy luật	Tính chất hiệu dụng	Công thức mô tả tỷ lệ thể tích	Tài liệu trích dẫn
1	Lũy thừa Voigt	$P_{FGM} = P_1V_1 + P_2V_2$  $P_{FGM} = P_2V$	$V_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^\eta$  $V_2 = 1 - V_1$  $V = \left(\frac{r_z}{r_{in}}\right)^\eta$	[18, 127]    [7, 68]
2	Hàm mũ Voigt	$P_{FGM} = P_2e^{a\left(\frac{z+h}{2}\right)}$	$a = \frac{1}{h} \ln \frac{P_1}{P_2}$	[9, 17]

3	Sigmoid Voigt	$P_{FGM} = P_1V_1 + P_2V_2$	$V_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \left( -\frac{h}{2} < z < 0 \right)$ $V_1 = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \left( 0 < z < \frac{h}{2} \right)$ $V_2 = 1 - V_1$	[52, 64]
4	Lũy thừa bốn tham số Voigt	$P_{FGM} = P_1V_1 + P_2V_2$	$V_1 = \left[ 1 - a \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) + b \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right]^p$ $V_2 = 1 - V_1$	[14, 119]
5	Mori Tanaka	Theo phương trình (2.2)	Theo phương trình (2.3)	[30, 95]

ở đây,  $h$  là chiều dày lớp FGM và  $z$  là tọa độ theo chiều dày tính từ mặt trung hòa,  $r_{in}$  là bán kính mặt trong của vỏ và bán kính vỏ là  $r_z$ . Các hệ số  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$  và  $\eta$  là các tham số biểu diễn cho quy luật biến thiên thể tích.

Phạm vi nghiên cứu của luận án chỉ xét đối với vật liệu FGM được xây dựng từ hai vật liệu thành phần là kim loại và gốm. Xét vỏ trụ FGM với quy luật phân bố tỷ lệ thể tích vật liệu theo chiều dày vỏ FGM là quy luật lũy thừa Voigt. Tỷ lệ thể tích của vật liệu 1 (kim loại) xác định theo công thức (2.4) và được minh họa trên Hình 2.1.a.

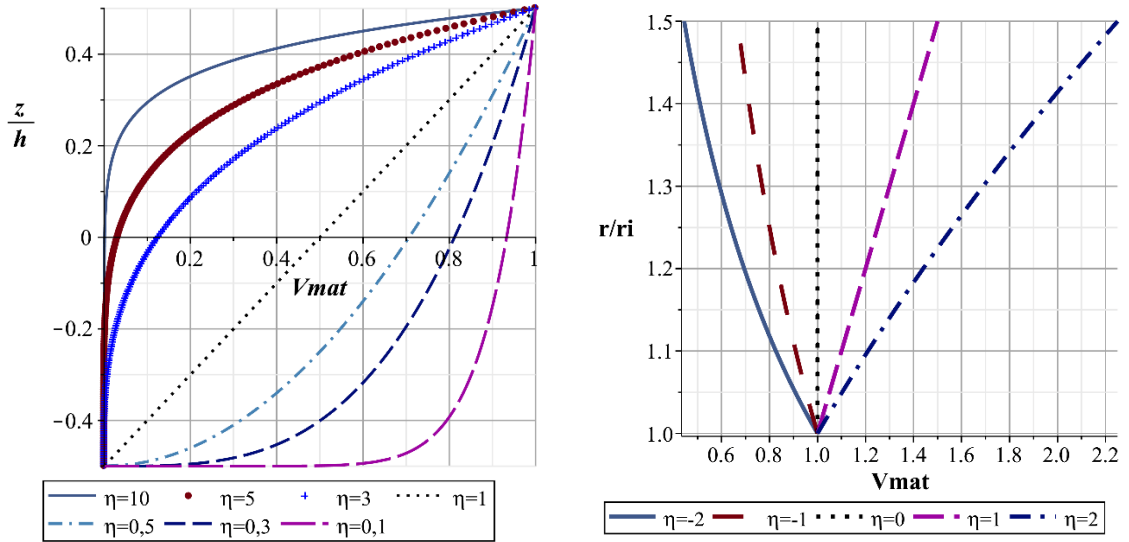
$$V_{mat} = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^\eta \quad (2.4)$$

Tỷ lệ thể tích pha vật liệu 2 (gốm) là  $V_2 = 1 - V_{mat}$ .

ở đây,  $\eta$  - chỉ số tỷ lệ thể tích  $0 \leq \eta \leq \infty$ .

$h$  - chiều dày vỏ trụ FGM.





a)  $V_{mat}$  tính theo (2.4)

b)  $V_{mat}$  tính theo (2.6)

Hình 2.1. Biến thiên tỷ lệ thể tích  $V_{mat}$  theo chiều dày vỏ trụ FGM

Đặc tính của vật liệu  $P_{FGM}(z)$  phụ thuộc chiều dày [94] có thể tính theo công thức sau:

$$P_{FGM}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V_{mat}. \quad (2.5)$$

Ngoài quy luật (2.4), quy luật biến thiên tỷ lệ thể tích vật liệu còn có thể xác định theo công thức (2.6), đồ thị minh họa biến thiên tỷ lệ thể tích theo chiều dày được trình bày trên Hình 2.1.b.

$$V_{mat} = \left( \frac{r_z}{r_{in}} \right)^\eta. \quad (2.6)$$

trong đó,  $r_z$  - bán kính vỏ trụ có giá trị  $r_z = r_{in} \div r_{in} + h$ ,  $r_{in}$  và  $h$  lần lượt là bán kính trong và chiều dày vỏ trụ FGM,  $\eta$  - là số thực.

Đặc tính  $P_{FGM}(z)$  của vật liệu phụ thuộc chiều dày trong trường hợp này được tính theo công thức sau:

$$P_{FGM}(z) = P_{in}V_{mat}. \quad (2.7)$$

### 2.1.2. Đặc tính vật liệu FGM theo nhiệt độ

Khi FGM làm việc ở nhiệt độ cao, thường thấy trong các kết cấu chịu

nhật, cơ tính của vật liệu sẽ thay đổi theo nhiệt độ. Trong trường hợp tổng quát, sự biến đổi của tham số  $P_i$  [94] theo nhiệt độ  $T(K)$  được xác định theo công thức sau:

$$P_i = C_0 \left( C_{-1} T^{-1} + 1 + C_1 T + C_2 T^2 + C_3 T^3 \right) \quad (2.8)$$

trong đó,  $P_i$  là đặc tính của vật liệu như Module đàn hồi ( $E$ ), mật độ ( $\rho$ ), hệ số Poisson ( $\nu$ ), hệ số giãn nở nhiệt ( $\alpha$ ), hệ số truyền nhiệt ( $\kappa$ ), nhiệt dung riêng ( $C_v$ ) và  $T = T_0 + \Delta T$  với  $T_0 = 300$  K (nhiệt độ phòng),  $\Delta T$  là biến thiên nhiệt độ,  $C_0, C_{-1}, C_1, C_2$  và  $C_3$  là các hệ số duy nhất đối với mỗi vật liệu cụ thể. Bảng 2.2 trình bày các giá trị hệ số của  $C_i$  đối một số vật liệu hay sử dụng: Stainless steel (SUS304), Zirconia oxide ( $ZrO_2$ ), Titanium alloy (Ti-6Al-4V), Nikel (Ni), Silicon nitride ( $Si_3N_4$ ), Aluminum Oxide ( $Al_2O_3$ ), Aluminum (Al) [87, 94, 127].

Bảng 2.2. Hệ số của các đặc tính vật liệu theo nhiệt độ

Vật liệu	Tính chất	$C_0$	$C_{-1}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$ZrO_2$	$E$ [Pa]	$244,266.10^9$	0	$-1,371.10^{-3}$	$1,214.10^{-6}$	$-3,681.10^{-10}$
	$\nu$	0,2882	0	$1,133.10^{-4}$	0	0
	$\alpha$ [ $K^{-1}$ ]	$12,766.10^{-6}$	0	$-14,91.10^{-4}$	$1,006.10^{-5}$	$-6,778.10^{-11}$
	$\kappa$ [W/mK]	1,7	0	$1,276.10^{-4}$	$6,648.10^{-8}$	0
	$\rho$ [ $kg/m^3$ ]	5700	0	0	0	0
	$C_v$ [J/kgK]	478,34279	0	$3,04908.10^{-4}$	$-6,0372.10^{-8}$	0
$Si_3N_4$	$E$ [Pa]	$348,43.10^9$	0	$-3,070.10^{-4}$	$2,160.10^{-7}$	$-8,946.10^{-11}$
	$\nu$	0,2400	0	0	0	0
	$\alpha$ [ $K^{-1}$ ]	$5,8723.10^{-6}$	0	$9,095.10^{-4}$	0	0
	$\kappa$ [W/mK]	13,723	0	$-1,032.10^{-3}$	$5,466.10^{-7}$	$-7,876.10^{-11}$
	$\rho$ [ $kg/m^3$ ]	2370	0	0	0	0
	$C_v$ [J/kgK]	555,11	0	$1,016.10^{-3}$	$2,92.10^{-7}$	$-1,67.10^{-10}$
$Al_2O_3$	$E$ [Pa]	$349,27.10^9$	0	$-3,853.10^{-4}$	$4,027.10^{-7}$	$-1,673.10^{-10}$
	$\nu$	0,2600	0	0	0	0
	$\alpha$ [ $K^{-1}$ ]	$6,8269.10^{-6}$	0	$1,838.10^{-4}$	0	0
	$\kappa$ [W/mK]	-14,087	-1123,6	$-6,227.10^{-3}$	0	0
	$\rho$ [ $kg/m^3$ ]	-	-	-	-	-
	$C_v$ [J/kgK]	1471,97	-138,87	$-2,241.10^{-7}$	0	0
Ni	$E$ [Pa]	$223,95.10^9$	0	$-2,794.10^{-4}$	$-3,998.10^{-9}$	0

	$\nu$	0,31	0	0	0	0
	$\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]	9,9209.10 <sup>-6</sup>	0	8,705.10 <sup>-4</sup>	0	0
	$\kappa^a$ [W/mK]	187,66	0	-2,869.10 <sup>-3</sup>	4,005.10 <sup>-6</sup>	-1,938.10 <sup>-9</sup>
	$\kappa^b$ [W/mK]	58,754	0	-4,614.10 <sup>-4</sup>	6,670.10 <sup>-7</sup>	-1,523.10 <sup>-10</sup>
	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8900	0	0	0	0
	$C_v^{a,b}$ [J/kgK]	-296,86	0	-1,712.10 <sup>-3</sup>	3,883.10 <sup>-5</sup>	3,123.10 <sup>-8</sup>
	$C_v^c$ [J/kgK]	637,38	0	-6,405.10 <sup>-4</sup>	6,520.10 <sup>-7</sup>	-1,542.10 <sup>-10</sup>
Ti-6Al-4V	$E$ [Pa]	122,56.10 <sup>9</sup>	0	-4,586.10 <sup>-4</sup>	0	0
	$\nu$	0,2884	0	1,121.10 <sup>-4</sup>	0	0
	$\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]	7,5788.10 <sup>-6</sup>	0	6,638.10 <sup>-4</sup>	-3,147.10 <sup>-6</sup>	0
	$\kappa$ [W/mK]	1,0	0	1,704.10 <sup>-2</sup>	0	0
	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	4429	0	0	0	0
	$C_v$ [J/kgK]	625,29692	0	-4,2239.10 <sup>-4</sup>	7,17865.10 <sup>-7</sup>	0
SUS304	$E$ [Pa]	201,04.10 <sup>9</sup>	0	3,079.10 <sup>-4</sup>	-6,534.10 <sup>-7</sup>	0
	$\nu$	0,3262	0	-2,002.10 <sup>-4</sup>	3,797.10 <sup>-7</sup>	0
	$\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]	12,330.10 <sup>-6</sup>	0	8,086.10 <sup>-4</sup>	0	0
	$\kappa$ [W/mK]	15,379	0	-12,64.10 <sup>-4</sup>	2,092.10 <sup>-6</sup>	-7,223.10 <sup>-10</sup>
	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	8166	0	0	0	0
	$C_v$ [J/kgK]	496,56	0	-1,151.10 <sup>-3</sup>	1,636.10 <sup>-6</sup>	-5,863.10 <sup>-10</sup>
Al	$E$ [Pa]	70.10 <sup>9</sup>	-	-	-	-
	$\nu$	0.3	-	-	-	-
	$\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]	23.10 <sup>-6</sup>	-	-	-	-
	$\kappa$ [W/mK]	204	-	-	-	-
	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2707	-	-	-	-
	$C_v$ [J/kgK]	-	-	-	-	-

$\kappa^a$  khi  $300 \text{ K} \leq T \leq 635 \text{ K}$  và  $\kappa^b$  khi  $635 \text{ K} \leq T$

$C_v^a$  khi  $300 \text{ K} \leq T \leq 635 \text{ K}$ ,  $C_v^b = \exp\left(\frac{6,253 - 9,893 \times 10^{-3} T}{1 - 1,582 \times 10^{-3} T}\right)$  khi  $635 \text{ K} \leq T \leq$

$750 \text{ K}$  và  $C_v^c$  khi  $750 \text{ K} \leq T$ .

### 2.1.3. Xác định phân bố nhiệt độ theo chiều dày vỏ trụ FGM

Lý thuyết nhiệt-đàn hồi cổ điển dựa trên cơ sở sử dụng quy luật truyền nhiệt của Fourier [91] như sau:

$$\mathbf{q} = -\kappa \cdot \nabla T \quad (2.9)$$

ở đây,  $\mathbf{q}$ ,  $\kappa$  và  $T$  là vector dòng nhiệt, tensor dẫn nhiệt và nhiệt độ.

Phương trình bảo toàn năng lượng như sau:

$$-\nabla \mathbf{q} + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.10)$$

trong đó,  $Q$  là cường độ nhiệt nội năng,  $\rho$  là khối lượng riêng,  $C$  nhiệt dung riêng và  $t$  là thời gian. Đối với vô trụ, biểu thức  $\nabla$ ,  $\kappa$  và  $\mathbf{q}$  với vector cơ sở  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  trong hệ tọa độ trụ  $(r, \theta, z)$  có dạng sau:

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \\ \kappa &= \kappa_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \kappa_\theta \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \kappa_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{q} &= q_r \mathbf{e}_r + q_\theta \mathbf{e}_\theta + q_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Thay thế  $\mathbf{q}$  từ hai phương trình (2.9) và (2.10) ta nhận được phương trình truyền nhiệt sau:

$$\kappa \nabla^2 T + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

Thông thường xem xét ba điều kiện biên nhiệt đối với vô trụ là:

- Trường hợp thứ nhất: Cho trước hàm nhiệt độ ở biên:

$$T|_\Gamma = T_B \text{ hoặc } T|_\Gamma = T_B(r, \theta, z, t) \quad (2.13)$$

ở đây,  $\Gamma$  biểu thị điều kiện biên,  $T_B$  và  $T|_\Gamma = T_B(r, \theta, z, t)$  là nhiệt độ không đổi và hàm phân bố nhiệt độ ở biên.

- Trường hợp thứ hai: Dòng truyền nhiệt vuông góc với bề mặt biên:

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial \{r, \theta, z\}} \Big|_\Gamma = q_B \text{ hoặc } -\kappa \frac{\partial T}{\partial \{r, \theta, z\}} \Big|_\Gamma = q_B(r, \theta, z, t) \quad (2.14)$$

ở đây,  $\frac{\partial T}{\partial \{r, \theta, z\}} \Big|_\Gamma$  là gradient nhiệt độ theo chiều  $r, \theta$  hoặc  $z$ ;  $q_B$  và

$q_B(r, \theta, z, t)$  là dòng nhiệt ở biên.

- Trường hợp thứ ba: Trao đổi nhiệt đối lưu ở biên:

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial \{r, \theta, z\}} \Big|_{\Gamma} = \alpha (T - T_B) \Big|_{\Gamma} \quad (2.15)$$

ở đây,  $\alpha$  là hệ số dẫn nhiệt đối lưu,  $T_B$  là nhiệt độ dòng nhiệt tiếp xúc với biên của vỏ.

Với lý thuyết nhiệt đàn hồi trên đây, phân bố nhiệt trong vỏ trụ FGM nhận được khi giải phương trình dẫn nhiệt, kết hợp với điều kiện ban đầu và điều kiện biên. Mặt khác dựa trên lý thuyết truyền nhiệt cổ điển ứng suất và biến dạng có quan hệ như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha} T \quad (2.16)$$

ở đây,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  và  $T$  tương ứng là tensor ứng suất, tensor biến dạng, tensor bậc hai module đàn hồi, tensor bậc hai của module nhiệt-ứng suất và nhiệt độ so với nhiệt độ chuẩn  $T_0$ .

Trong luận án với giả thiết tải nhiệt đối xứng trục phân bố toàn bề mặt và chỉ biến đổi theo hướng chiều dày (hướng kính). Xét quá trình truyền nhiệt trong vỏ trụ FGM ở trạng thái ổn định, khi đó phương trình (2.12) được viết lại dưới dạng đơn giản hơn như sau:

$$-\frac{d}{dz} \left[ \kappa_{eff} \frac{dT}{dz} \right] = 0 \quad (2.17)$$

ở đây,  $\kappa_{eff}$  là hệ số dẫn nhiệt hiệu dụng.

Điều kiện biên nhiệt độ (trường hợp điều kiện biên thứ nhất) tại mặt trong và mặt ngoài vỏ như sau:

- Tại mặt trong:  $z = -h/2$ ,  $T = T_{in}$ .

- Tại mặt ngoài:  $z = h/2$ ,  $T = T_o$ .

Giải phương trình (2.17) với các điều kiện biên nhiệt độ nêu trên, ta nhận được biểu thức xác định phân bố nhiệt độ theo chiều dày vỏ:

- Trường hợp hệ số mũ  $\eta = 0$ ,

$$\Delta T(z) = \frac{\ln(R+z) - \ln(R-h/2)}{\ln(R+h/2) - \ln(R-h/2)} \Delta T_o + \frac{\ln(R+h/2) - \ln(R+z)}{\ln(R+h/2) - \ln(R-h/2)} \Delta T_{in}.$$

- Trường hợp hệ số mũ  $\eta \neq 0$ ,

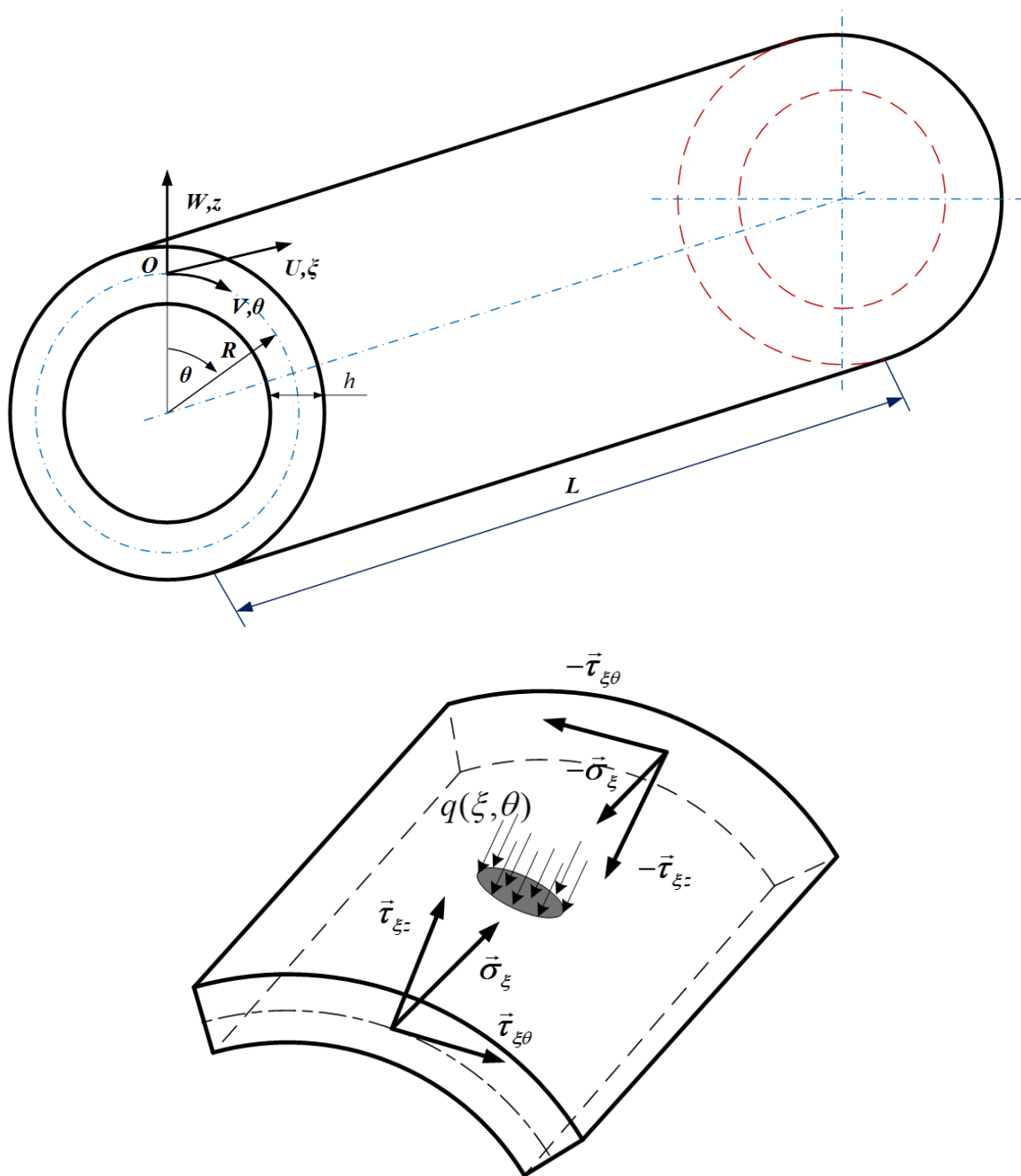
$$\Delta T(z) = \frac{(R-h/2)^\eta (R+h/2)^\eta}{(R+h/2)^\eta - (R-h/2)^\eta} \left[ \frac{\Delta T_o}{(R-h/2)^\eta} - \frac{\Delta T_{in}}{(R+h/2)^\eta} - \frac{\Delta T_o - \Delta T_{in}}{(R+z)^\eta} \right].$$

trong đó,  $R$ - bán kính mặt giữa vỏ,  $h$ - chiều dày vỏ,  $\eta$  - là số thực,  $\Delta T_o = T_o - T_{ref}$ ,  $\Delta T_{in} = T_{in} - T_{ref}$ , còn  $T_{ref}$  là nhiệt độ cơ sở, tại đó ta coi kết cấu chưa biến dạng. Thông thường, ta lấy  $T_{ref}$  bằng nhiệt độ phòng  $T_{ref} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , hoặc lấy  $T_{ref}$  chính bằng nhiệt độ mặt trong của vỏ  $T_{ref} = T_{in}$ .

## 2.2. Quan hệ ứng xử cơ học của vỏ trụ FGM

Trong mục này, áp dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D cho việc thiết lập các quan hệ ứng xử cơ học của vỏ trụ FGM và xây dựng hệ phương trình cân bằng. Chọn hệ trục tọa độ cong  $O\xi\theta z$  (Hình 2.2), với gốc tọa độ đặt ở mặt giữa vỏ trụ. Ở đây,  $\xi$  là tọa độ theo đường sinh vỏ trụ FGM,  $\theta$  là tọa độ theo hướng vòng cung và  $z$  là tọa độ theo phương pháp tuyến với vỏ trụ, tương ứng với các chuyển vị  $U$ ,  $V$  và  $W$ . Vỏ trụ FGM có chiều dày  $h$  với các tham số hình học như trên Hình 2.2.

Để đơn giản trong tính toán, giả thiết mặt trung bình trùng với mặt giữa của vỏ. Giả thiết này được nhiều nhà nghiên cứu sử dụng trong nghiên cứu tấm, vỏ với các độ dày khác nhau, như Punera, Kant và Desai [83] trong nghiên cứu vỏ trụ composite lớp và vỏ sandwich FGM, Gharooni, Ghannad và Nejad [50] khi nghiên cứu vỏ trụ FGM dày chịu tác dụng của áp suất trong và nhiệt độ, v.v.



Hình 2.2. Mô hình, tham số hình học, hệ trục tọa độ và mô hình đặt ứng suất khi tính toán của vỏ trụ FGM

Giả thiết vỏ chịu tác dụng của tải trọng hướng kính  $q^+(\xi, \theta)$  trên bề mặt ngoài,  $q^-(\xi, \theta)$  - trên bề mặt trong. Trên biên  $\xi = \xi_1$  đặt các ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\tau}_{\xi\theta}, \bar{\tau}_{\xi z}$  hướng theo chiều âm, tại biên  $\xi = \xi_2$  đặt các ứng suất

$\bar{\sigma}_\xi, \bar{\tau}_{\xi\theta}, \bar{\tau}_{\xi z}$  hướng theo chiều dương; tương tự trên biên  $\theta = \theta_1$  đặt ứng suất  $\bar{\tau}_{\theta\xi}, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\theta z}$  hướng theo chiều âm, còn tại biên  $\theta = \theta_2$  đặt ứng suất  $\bar{\tau}_{\theta\xi}, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\theta z}$  hướng theo chiều dương. Hình 2.2 trình bày sơ đồ tính toán vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải hướng kính trong môi trường nhiệt độ với các điều kiện biên tại  $\xi = 0$  và  $\xi = \xi_0$  ( $\xi_0 = L/R$ ),  $R$  - bán kính trung bình vỏ.

### 2.2.1. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị [48] của vỏ trụ được phân tích dưới dạng chuỗi theo chiều dày như sau:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= \sum_{i=0}^{N_0} u_i(\xi, \theta) \frac{z^i}{i!}, \quad v(\xi, \theta, z) = \sum_{i=0}^{N_0} v_i(\xi, \theta) \frac{z^i}{i!}, \\ w(\xi, \theta, z) &= \sum_{i=0}^{N_0-1} w_i(\xi, \theta) \frac{z^i}{i!}, \quad \xi = \frac{x}{R}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

- Đối với mô hình cấp ba  $N_0 = 3$ , ta có:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2} + u_3(\xi, \theta) \frac{z^3}{6} \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2} + v_3(\xi, \theta) \frac{z^3}{6} \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

- Đối với mô hình cấp hai  $N_0 = 2$ , ta nhận được:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2} \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta) \frac{z^2}{2} \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z \end{aligned} \quad (2.20)$$

trong đó,  $u$  - chuyển vị theo phương dọc trục  $\xi$  ( $\xi = x/R$ ),  $v$  - chuyển vị theo phương vòng cung  $\theta$ ,  $w$  - chuyển vị theo chiều dày (phương



z). Cụ thể,  $u_0, v_0, w_0$  tương ứng là chuyển vị thẳng tại một điểm trong mặt trung hòa;  $u_1, v_1, w_1$  - các thành chuyển vị bậc một;  $u_2, v_2, w_2$  - các thành chuyển vị bậc hai;  $u_3, v_3$  - các thành phân chuyển vị bậc cao.

### 2.2.2. Quan hệ biến dạng và chuyển vị

Quan hệ biến dạng-chuyển vị [85] tuyến tính trong hệ tọa độ cong trục giao  $O\xi\theta z$  được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Thế các thành phần chuyển vị từ (2.19) và (2.20) vào các phương trình (2.21), ta nhận được trường biến dạng như sau:

- Với mô hình chuyển vị cấp ba  $N_0 = 3$ , ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \left( \varepsilon_\xi^0 + \chi_\xi z + \varepsilon_\xi^* \frac{z^2}{2} + \chi_\xi^* \frac{z^3}{3!} \right), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R+z} \left( \varepsilon_\theta^0 + \chi_\theta z + \varepsilon_\theta^* \frac{z^2}{2} + \chi_\theta^* \frac{z^3}{3!} \right), \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^0 + \chi_z z, \\ \gamma_{\xi\theta} &= \frac{1}{R} \left( \gamma_{\xi\theta}^0 + \chi_{\xi\theta} z + \gamma_{\xi\theta}^* \frac{z^2}{2} + \chi_{\xi\theta}^* \frac{z^3}{3!} \right) + \\ &+ \frac{1}{R+z} \left( \lambda_{\theta\xi}^0 + \kappa_{\theta\xi} z + \lambda_{\theta\xi}^* \frac{z^2}{2} + \kappa_{\theta\xi}^* \frac{z^3}{3!} \right), \\ \gamma_{\xi z} &= \frac{1}{R} \left( \gamma_{\xi z}^0 + \chi_{\xi z} z + \gamma_{\xi z}^* \frac{z^2}{2} + \chi_{\xi z}^* \frac{z^3}{3!} \right), \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R+z} \left( \gamma_{\theta z}^0 + \chi_{\theta z} z + \gamma_{\theta z}^* \frac{z^2}{2} + \chi_{\theta z}^* \frac{z^3}{3!} \right)\end{aligned}\quad (2.22)$$

- Với mô hình chuyển vị cấp hai  $N_0 = 2$ , ta có

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \left( \varepsilon_\xi^0 + \chi_\xi z + \varepsilon_\xi^* \frac{z^2}{2} \right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left( \varepsilon_\theta^0 + \chi_\theta z + \varepsilon_\theta^* \frac{z^2}{2} \right), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^0, \\ \gamma_{\xi\theta} &= \frac{1}{R} \left( \gamma_{\xi\theta}^0 + \chi_{\xi\theta} z + \gamma_{\xi\theta}^* \frac{z^2}{2} \right) + \frac{1}{R+z} \left( \lambda_{\theta\xi}^0 + \kappa_{\theta\xi} z + \lambda_{\theta\xi}^* \frac{z^2}{2} \right), \\ \gamma_{\xi z} &= \frac{1}{R} \left( \gamma_{\xi z}^0 + \chi_{\xi z} z + \gamma_{\xi z}^* \frac{z^2}{2} \right), \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \left( \gamma_{\theta z}^0 + \chi_{\theta z} z + \gamma_{\theta z}^* \frac{z^2}{2} \right),\end{aligned}\quad (2.23)$$

trong đó,

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial \xi}, \quad \chi_\xi = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\xi^* = \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \quad \chi_\xi^* = \frac{\partial u_3}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_z^0 = w_1, \quad \chi_z = w_2, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0, \\ \chi_\theta &= \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + w_1, \quad \varepsilon_\theta^* = \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_2, \quad \chi_\theta^* = \frac{\partial v_3}{\partial \theta}, \quad \gamma_{\xi\theta}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial \xi}, \quad \chi_{\xi\theta} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \\ \gamma_{\xi\theta}^* &= \frac{\partial v_2}{\partial \xi}, \quad \chi_{\xi\theta}^* = \frac{\partial v_3}{\partial \xi}, \quad \lambda_{\theta\xi}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial \theta}, \quad \kappa_{\theta\xi} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \quad \lambda_{\theta\xi}^* = \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \quad \kappa_{\theta\xi}^* = \frac{\partial u_3}{\partial \theta}, \\ \gamma_{\xi z}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + Ru_1, \quad \chi_{\xi z} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + Ru_2, \quad \gamma_{\xi z}^* = \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + Ru_3, \quad \chi_{\xi z}^* = 0, \\ \gamma_{\theta z}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + Rv_1 - v_0, \quad \chi_{\theta z} = \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + Rv_2, \quad \gamma_{\theta z}^* = \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + Rv_3 + v_2, \quad \chi_{\theta z}^* = 2v_3.\end{aligned}\quad (2.24)$$

ở đây, các biến dạng  $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$  là biến dạng theo các phương  $\xi, \theta$  và  $z$  tương ứng,  $\gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\xi z}, \gamma_{\theta z}$  là biến dạng tương đối của  $\theta, z$  so với phương  $\xi$  và  $\theta$  so với phương  $z$ , tương ứng.

### 2.2.3. Quan hệ ứng suất - biến dạng

Phương trình định luật Hooke [85] liên hệ giữa biến dạng và ứng suất trong trường hợp vô làm từ vật liệu trục hướng có dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\xi\theta} \\ \tau_{\xi z} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

ở đây,  $\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}$  là các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp tương ứng,  $A_{ij} (i=1,2,3, j=1,2,3), A_{44}, A_{55}, A_{66}$  là các hằng số đàn hồi quy đổi [33, 90] của vật liệu làm vỏ.

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{22} = A_{33} &= \frac{E_{FGM}(z)[1 - \mu_{FGM}(z)]}{[1 + \mu_{FGM}(z)][1 - 2\mu_{FGM}(z)]}, \\ A_{12} = A_{21} = A_{13} = A_{31} = A_{23} = A_{32} &= \frac{E_{FGM}(z)\mu_{FGM}(z)}{[1 + \mu_{FGM}(z)][1 - 2\mu_{FGM}(z)]} \quad (2.26) \\ A_{44} = A_{55} = A_{66} &= \frac{E_{FGM}(z)}{2[1 + \mu_{FGM}(z)]} \end{aligned}$$

ở đây,  $E_{FGM}(z), \mu_{FGM}(z)$  là module đàn hồi và hệ số Poisson hiệu dụng, tính theo (2.5).

Khi có tải nhiệt độ [34, 96], hệ (2.25) viết lại như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\xi\theta} \\ \tau_{\xi z} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi - \alpha_\xi(z).\Delta T \\ \varepsilon_\theta - \alpha_\theta(z).\Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha_z(z).\Delta T \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

ở đây,  $\alpha_\xi(z)$  và  $\alpha_\theta(z)$  là hệ số nở nhiệt trong mặt phẳng theo phương  $\xi$  và  $\theta$ ,  $\alpha_z(z)$  là hệ số nở nhiệt theo phương  $z$ . Tại các điểm có cùng tọa độ  $z$  ta có

$\alpha_\xi(z) = \alpha_\theta(z) = \alpha_z(z) = \alpha_{FGM}(z)$ .  $\alpha_{FGM}(z)$  là hệ số nở nhiệt hiệu dụng được xác định theo (2.5).

### 2.3. Xây dựng các phương trình cơ bản tính toán vỏ trụ FGM

#### 2.3.1. Nguyên lý dịch chuyển khả dĩ

Phương trình cân bằng và các điều kiện biên tương ứng nhận được từ nguyên lý dịch chuyển khả dĩ, theo đó:

$$\delta U - \delta A_s - \delta A_{e1} - \delta A_{e2} = 0 \quad (2.28)$$

trong đó,  $\delta U$  là biến phân thế năng đàn hồi của kết cấu,  $\delta A_s$  - biến phân công của lực mặt,  $\delta A_{e1}$  - biến phân công của ngoại lực trên biên  $\xi = const$ ,  $\delta A_{e2}$  - biến phân công của ngoại lực trên biên  $\theta = const$ .

#### Biến phân công ngoại lực.

Biến phân công của lực mặt tác dụng lên kết cấu được xác định bởi biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \delta A_s = \iint_{\xi, \theta} \left[ q^+ \delta \left( w_0 + \frac{h}{2} w_1 + \frac{h^2}{8} w_2 \right) \left( 1 + \frac{h}{2R} \right) \right. \\ \left. + q^- \delta \left( w_0 - \frac{h}{2} w_1 + \frac{h^2}{8} w_2 \right) \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) \right] R^2 d\xi d\theta. \end{aligned}$$

Từ đây biến phân công lực mặt có thể viết dưới dạng:

$$\delta A_s = \iint_{\xi, \theta} (p_0 \delta w_0 + p_1 \delta w_1 + p_2 \delta w_2) R^2 d\xi d\theta. \quad (2.29)$$

trong đó,  $p_i = q^+ \left( 1 + \frac{h}{2R} \right) \frac{(h/2)^i}{i!} + q^- \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) \frac{(-h/2)^i}{i!}$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Biến phân công của các ngoại lực tác dụng lên biên tìm được theo công thức:

$$\begin{aligned} \delta A_{e1} &= \iint_{\theta, z} (\bar{\sigma}_\xi \delta u + \bar{\tau}_{\xi\theta} \delta v + \bar{\tau}_{\xi z} \delta w) R \left(1 + \frac{z}{R}\right) d\theta dz \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2}, \\ \delta A_{e2} &= \iint_{\xi, z} (\bar{\tau}_{\theta\xi} \delta u + \bar{\sigma}_\theta \delta v + \bar{\tau}_{\theta z} \delta w) R d\xi dz \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Đặt:

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_\xi \\ \bar{N}_{\xi\theta} \\ \bar{Q}_\xi \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \\ \bar{\tau}_{\xi z} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad \begin{bmatrix} \bar{N}_\theta \\ \bar{N}_{\theta\xi} \\ \bar{Q}_\theta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_\xi \\ \bar{M}_{\xi\theta} \\ \bar{S}_\xi \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \\ \bar{\tau}_{\xi z} \end{bmatrix} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad \begin{bmatrix} \bar{M}_\theta \\ \bar{M}_{\theta\xi} \\ \bar{S}_\theta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{bmatrix} z dz,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_\xi^* \\ \bar{N}_{\xi\theta}^* \\ \bar{Q}_\xi^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \\ \bar{\tau}_{\xi z} \end{bmatrix} \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad \begin{bmatrix} \bar{N}_\theta^* \\ \bar{N}_{\theta\xi}^* \\ \bar{Q}_\theta^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{bmatrix} \frac{z^2}{2} dz,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_\xi^* \\ \bar{M}_{\xi\theta}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\xi \\ \bar{\tau}_{\xi\theta} \end{bmatrix} \frac{z^3}{6} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad \begin{bmatrix} \bar{M}_\theta^* \\ \bar{M}_{\theta\xi}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{\theta\xi} \end{bmatrix} \frac{z^3}{6} dz.$$

Biểu thức (2.30) có thể viết lại dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} \delta A_{e1} &= \int_{\theta} \left[ \bar{N}_\xi \delta u_0 + \bar{M}_\xi \delta u_1 + \bar{N}_\xi^* \delta u_2 + \bar{M}_\xi^* \delta u_3 \right] R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\ &+ \int_{\theta} \left[ \bar{N}_{\xi\theta} \delta v_0 + \bar{M}_{\xi\theta} \delta v_1 + \bar{N}_{\xi\theta}^* \delta v_2 + \bar{M}_{\xi\theta}^* \delta v_3 \right] R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\theta} \left[ \bar{Q}_{\xi} \delta w_0 + \bar{S}_{\xi} \delta w_1 + \bar{Q}_{\xi}^* \delta w_2 \right] R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2}, \\
\delta A_{e2} = & \int_{\xi} \left[ \bar{N}_{\theta\xi} \delta u_0 + \bar{M}_{\theta\xi} \delta u_1 + \bar{N}_{\theta\xi}^* \delta u_2 + \bar{M}_{\theta\xi}^* \delta u_3 \right] R d\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
& + \int_{\xi} \left[ \bar{N}_{\theta} \delta v_0 + \bar{M}_{\theta} \delta v_1 + \bar{N}_{\theta}^* \delta v_2 + \bar{M}_{\theta}^* \delta v_3 \right] R d\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
& + \int_{\xi} \left[ \bar{Q}_{\theta} \delta w_0 + \bar{S}_{\theta} \delta w_1 + \bar{Q}_{\theta}^* \delta w_2 \right] R d\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

### Biến phân thế năng đàn hồi.

Ta có biến phân thế năng xác định theo công thức:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \iiint_{\xi, \theta, z} \left[ \sigma_{\xi} \delta \varepsilon_{\xi} + \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta} + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{\xi\theta} \delta \gamma_{\xi\theta} + \right. \\
& \left. + \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} + \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} \right] \left( 1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Ta phân tích từng số hạng trong biểu thức xác định biến phân thế năng (2.32).

$$\delta U_1 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sigma_{\xi} \delta \varepsilon_{\xi} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz.$$

Thay  $\varepsilon_{\xi}$  từ (2.22) vào biểu thức nhận được, ta có:

$$\delta U_1 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^3 \sigma_{\xi} \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi} \frac{z^i}{i!} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) R d\xi d\theta dz.$$

$$\text{Đặt} \quad \left( N_{\xi}, M_{\xi}, N_{\xi}^*, M_{\xi}^* \right) = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\xi} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \left( 1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6} \right) dz. \tag{2.33a}$$

Khi đó  $\delta U_1$  được viết lại như sau:

$$\delta U_1 = \iint_{\xi, \theta} \left( N_\xi \frac{\partial \delta u_0}{\partial \xi} + M_\xi \frac{\partial \delta u_1}{\partial \xi} + N_\xi^* \frac{\partial \delta u_2}{\partial \xi} + M_\xi^* \frac{\partial \delta u_3}{\partial \xi} \right) R d\xi d\theta.$$

Lấy tích phân từng phần biểu thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} \delta U_1 = & - \iint_{\xi, \theta} \left( \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} \delta u_0 + \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \delta u_1 + \frac{\partial N_\xi^*}{\partial \xi} \delta u_2 + \frac{\partial M_\xi^*}{\partial \xi} \delta u_3 \right) R d\xi d\theta + \\ & + \int_{\theta} \left( N_\xi \delta u_0 + M_\xi \delta u_1 + N_\xi^* \delta u_2 + M_\xi^* \delta u_3 \right) R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ta phân tích số hạng tiếp theo trong biểu thức xác định biến phân thế năng (2.32).

$$\delta U_2 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta \left( 1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz.$$

Kết hợp công thức xác định  $\delta \varepsilon_\theta$  theo (2.22) vào đây ta được:

$$\delta U_2 = \iiint_{\xi, \theta, z} \left( \sum_{i=0}^3 \sigma_\theta \frac{\partial \delta v_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^2 \sigma_\theta \delta w_i \frac{z^i}{i!} \right) R d\xi d\theta dz$$

Đặt

$$\left( N_\theta, M_\theta, N_\theta^*, M_\theta^* \right) = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta \left( 1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6} \right) dz. \quad (2.34a)$$

Khi đó  $\delta U_2$  được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \delta U_2 = & \iint_{\xi, \theta} \left( N_\theta \frac{\partial \delta v_0}{\partial \theta} + M_\theta \frac{\partial \delta v_1}{\partial \theta} + N_\theta^* \frac{\partial \delta v_2}{\partial \theta} + M_\theta^* \frac{\partial \delta v_3}{\partial \theta} \right) R d\xi d\theta + \\ & + \iint_{\xi, \theta} \left( N_\theta \delta w_0 + M_\theta \delta w_1 + N_\theta^* \delta w_2 \right) R d\xi d\theta. \end{aligned}$$

Lấy tích phân từng phần biểu thức trên, ta được:

$$\delta U_2 = - \iint_{\xi, \theta} \left( \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \delta v_0 + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \delta v_1 + \frac{\partial N_\theta^*}{\partial \theta} \delta v_2 + \frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} \delta v_3 \right) R d\xi d\theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\xi, \theta} (N_{\theta} \delta w_0 + M_{\theta} \delta w_1 + N_{\theta}^* \delta w_2) R d\xi d\theta + \\
& + \int_{\xi} (N_{\theta} \delta v_0 + M_{\theta} \delta v_1 + N_{\theta}^* \delta v_2 + M_{\theta}^* \delta v_3) R d\xi \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Đối với thành phần  $\delta U_3 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sigma_z \delta \varepsilon_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) R^2 d\xi d\theta dz$ . Thay  $\varepsilon_z$  từ (2.22) vào biểu thức nhận được, ta có:

$$\delta U_3 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^1 \sigma_z \delta w_{i+1} \frac{z^i}{i!} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R^2 d\xi d\theta dz.$$

Biểu thức xác định  $\delta U_3$  viết lại dưới dạng:

$$\delta U_3 = \iint_{\xi, \theta} (Q_z \delta w_1 + S_z \delta w_2) R^2 d\xi d\theta. \tag{2.35}$$

trong đó,  $Q_z = \int_{-h}^{+h} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$ ,  $S_z = \int_{-h}^{+h} \sigma_z z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$ . (2.35a)

Tiếp tục phân tích thành phần  $\delta U_4 = \iiint_{\xi, \theta, z} \tau_{\xi\theta} \delta \gamma_{\xi\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R^2 d\xi d\theta dz$ .

Kết hợp biểu thức của  $\delta U_4$  với (2.22) ta được:

$$\delta U_4 = \iiint_{\xi, \theta, z} \left[ \sum_{i=0}^3 \tau_{\xi\theta} \frac{\partial \delta u_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^3 \tau_{\xi\theta} \frac{\partial \delta v_i}{\partial \xi} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^i}{i!} \right] R d\xi d\theta dz.$$

Đặt  $(N_{\theta\xi}, M_{\theta\xi}, N_{\theta\xi}^*, M_{\theta\xi}^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\xi\theta} \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6}\right) dz$ , (2.36a)

$$(N_{\xi\theta}, M_{\xi\theta}, N_{\xi\theta}^*, M_{\xi\theta}^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\xi\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6}\right) dz.$$

Khi đó  $\delta U_4$  được viết lại như sau:



$$\delta U_4 = \iint_{\xi, \theta} \left( N_{\theta\xi} \frac{\partial \delta u_0}{\partial \theta} + M_{\theta\xi} \frac{\partial \delta u_1}{\partial \theta} + N_{\theta\xi}^* \frac{\partial \delta u_2}{\partial \theta} + M_{\theta\xi}^* \frac{\partial \delta u_3}{\partial \theta} + N_{\xi\theta} \frac{\partial \delta v_0}{\partial \xi} + M_{\xi\theta} \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} + N_{\xi\theta}^* \frac{\partial \delta v_2}{\partial \xi} + M_{\xi\theta}^* \frac{\partial \delta v_3}{\partial \xi} \right) R d\xi d\theta.$$

Lấy tích phân từng phần biểu thức trên, nhận được:

$$\begin{aligned} \delta U_4 = & - \iint_{\xi, \theta} \left( \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} \delta u_0 + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} \delta u_1 + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} \delta u_2 + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} \delta u_3 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} \delta v_0 + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} \delta v_1 + \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} \delta v_2 + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} \delta v_3 \right) R d\xi d\theta + \\ & + \int_{\theta} \left( N_{\xi\theta} \delta v_0 + M_{\xi\theta} \delta v_1 + N_{\xi\theta}^* \delta v_2 + M_{\xi\theta}^* \delta v_3 \right) R d\theta \Bigg|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\ & + \int_{\xi} \left( N_{\theta\xi} \delta u_0 + M_{\theta\xi} \delta u_1 + N_{\theta\xi}^* \delta u_2 + M_{\theta\xi}^* \delta u_3 \right) R d\xi \Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Đối với thành phần  $\delta U_5 = \iiint_{\xi, \theta, z} \tau_{\xi z} \delta \gamma_{\xi z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) R^2 d\xi d\theta dz$ . Thay  $\gamma_{\xi z}$  từ

(2.22) vào biểu thức của  $\delta U_5$ , ta có:

$$\delta U_5 = \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^2 \tau_{\xi z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^i}{i!} \frac{\partial \delta w_i}{\partial \xi} R d\xi d\theta dz + \iiint_{\xi, \theta, z} \sum_{i=0}^2 \tau_{\xi z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^i}{i!} \delta u_{i+1} R^2 d\xi d\theta dz.$$

$$\text{Đặt} \quad (Q_\xi, S_\xi, Q_\xi^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\xi z} \left( 1, z, \frac{z^2}{2} \right) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz. \quad (2.37a)$$

Thực hiện lấy tích phân từng phần biểu thức xác định  $\delta U_5$ , sau một số phép biến đổi toán học ta có:

$$\delta U_5 = - \iint_{\xi, \theta} \left( \frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} \delta w_0 + \frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} \delta w_1 + \frac{\partial Q_\xi^*}{\partial \xi} \delta w_2 \right) R d\xi d\theta + \iint_{\xi, \theta} (Q_\xi \delta u_1 +$$

$$+S_\xi \delta u_2 + Q_\xi^* \delta u_3) R^2 d\xi d\theta + \int_{\theta} (Q_\xi \delta w_0 + S_\xi \delta w_1 + Q_\xi^* \delta w_2) R d\theta \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} \quad (2.37)$$

Ta xét thành phần còn lại trong (2.32).

$$\delta U_6 = \iiint_{\xi, \theta, z} \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R^2 d\xi d\theta dz.$$

Kết hợp biểu thức trên với (2.22), sau một số phép thực hiện biến đổi toán học ta được:

$$\delta U_6 = \iiint_{\xi, \theta, z} \left( \sum_{i=0}^2 \frac{\partial \delta w_i}{\partial \theta} \tau_{\theta z} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^2 R \delta v_{i+1} \tau_{\theta z} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^3 (i-1) \delta v_i \tau_{\theta z} \frac{z^i}{i!} \right) R d\xi d\theta dz.$$

$$\text{Đặt} \quad (Q_\theta, S_\theta, Q_\theta^*, S_\theta^*) = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta z} \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{6}\right) dz. \quad (2.38a)$$

Thực hiện lấy tích phân từng phần biểu thức xác định  $\delta U_6$ , sau một số phép thực hiện biến đổi toán học ta có:

$$\begin{aligned} \delta U_6 = & - \iint_{\xi, \theta} \left( \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \delta w_0 + \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \delta w_1 + \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} \delta w_2 \right) R d\xi d\theta + \\ & R \iint_{\xi, \theta} (Q_\theta \delta v_1 + S_\theta \delta v_2 + Q_\theta^* \delta v_3) R d\xi d\theta + \iint_{\xi, \theta} (-Q_\theta \delta v_0 + Q_\theta^* \delta v_2 + \\ & 2S_\theta^* \delta v_3) R d\xi d\theta + \int_{\xi} (Q_\theta \delta w_0 + S_\theta \delta w_1 + Q_\theta^* \delta w_2) R d\xi \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Thay các biểu thức (2.33) ÷ (2.38) vào (2.32), ta nhận được biểu thức xác định biến phân thế năng đàn hồi  $\delta U$  thông qua các thành phần nội lực suy rộng:

$$\begin{aligned} \delta U = & - \iint_{\xi, \theta} \left[ \left( \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - R Q_\xi \right) \delta u_1 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial N_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - R S_\xi \right) \delta u_2 + \left( \frac{\partial M_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - R Q_\xi^* \right) \delta u_3 \right] R d\xi d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{\xi, \theta} \left[ \left( \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_\theta \right) \delta v_0 + \left( \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} - RQ_\theta \right) \delta v_1 + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial N_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - RS_\theta - Q_\theta^* \right) \delta v_2 + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial M_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - RQ_\theta^* - 2S_\theta^* \right) \delta v_3 \right] Rd\xi d\theta - \\
& - \iint_{\xi, \theta} \left[ \left( \frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta \right) \delta w_0 + \left( \frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} - M_\theta - RQ_z \right) \delta w_1 + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial Q_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - N_\theta^* - RS_z \right) \delta w_2 \right] Rd\xi d\theta + \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\theta} \left( N_\xi \delta u_0 + M_\xi \delta u_1 + N_\xi^* \delta u_2 + M_\xi^* \delta u_3 \right) Rd\theta \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\theta} \left( N_{\xi\theta} \delta v_0 + M_{\xi\theta} \delta v_1 + N_{\xi\theta}^* \delta v_2 + M_{\xi\theta}^* \delta v_3 \right) Rd\theta \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\xi} \left( N_{\theta\xi} \delta u_0 + M_{\theta\xi} \delta u_1 + N_{\theta\xi}^* \delta u_2 + M_{\theta\xi}^* \delta u_3 \right) Rd\xi \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
& + \int_{\xi} \left( N_\theta \delta v_0 + M_\theta \delta v_1 + N_\theta^* \delta v_2 + M_\theta^* \delta v_3 \right) Rd\xi \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} + \\
& + \int_{\theta} \left( Q_\xi \delta w_0 + S_\xi \delta w_1 + Q_\xi^* \delta w_2 \right) Rd\theta \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\xi} \left( Q_\theta \delta w_0 + S_\theta \delta w_1 + Q_\theta^* \delta w_2 \right) Rd\xi \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} .
\end{aligned}$$

Thay các biểu thức (2.29), (2.31), (2.39) vào nguyên lý chuyển dịch khả dĩ (2.28), ta được:

$$\begin{aligned}
0 = & - \iint_{\xi, \theta} \left[ \left( \frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - RQ_{\xi} \right) \delta u_1 + \right. \\
& + \left. \left( \frac{\partial N_{\xi}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RS_{\xi} \right) \delta u_2 + \left( \frac{\partial M_{\xi}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RQ_{\xi}^* \right) \delta u_3 \right] Rd\xi d\theta + \\
& - \iint_{\xi, \theta} \left[ \left( \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_{\theta} \right) \delta v_0 + \left( \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} - RQ_{\theta} \right) \delta v_1 + \right. \\
& \quad + \left. \left( \frac{\partial N_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - RS_{\theta} - Q_{\theta}^* \right) \delta v_2 + \right. \\
& \quad + \left. \left( \frac{\partial M_{\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} - RQ_{\theta}^* - 2S_{\theta}^* \right) \delta v_3 \right] Rd\xi d\theta + \\
& - \iint_{\xi, \theta} \left[ \left( \frac{\partial Q_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} - Rp_0 \right) \delta w_0 + \left( \frac{\partial S_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} - RQ_z - Rp_1 \right) \delta w_1 + \right. \\
& \quad + \left. \left( \frac{\partial Q_{\xi}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{\theta}^*}{\partial \theta} - N_{\theta}^* - RS_z - Rp_2 \right) \delta w_2 \right] Rd\xi d\theta + \\
& + \int_{\theta} \left[ (N_{\xi} - \bar{N}_{\xi}) \delta u_0 + (M_{\xi} - \bar{M}_{\xi}) \delta u_1 + (N_{\xi}^* - \bar{N}_{\xi}^*) \delta u_2 + \right. \quad (2.40) \\
& + (M_{\xi}^* - \bar{M}_{\xi}^*) \delta u_3 + (N_{\xi\theta} - \bar{N}_{\xi\theta}) \delta v_0 + (M_{\xi\theta} - \bar{M}_{\xi\theta}) \delta v_1 + \\
& + (N_{\xi\theta}^* - \bar{N}_{\xi\theta}^*) \delta v_2 + (M_{\xi\theta}^* - \bar{M}_{\xi\theta}^*) \delta v_3 + (Q_{\xi} - \bar{Q}_{\xi}) \delta w_0 + \\
& \quad \left. + (S_{\xi} - \bar{S}_{\xi}) \delta w_1 + (Q_{\xi}^* - \bar{Q}_{\xi}^*) \delta w_2 \right] Rd\theta \Big|_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} + \\
& + \int_{\xi} \left[ (N_{\theta\xi} - \bar{N}_{\theta\xi}) \delta u_0 + (M_{\theta\xi} - \bar{M}_{\theta\xi}) \delta u_1 + (N_{\theta\xi}^* - \bar{N}_{\theta\xi}^*) \delta u_2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (M_{\theta\xi}^* - \bar{M}_{\theta\xi}^*) \delta u_3 + (N_\theta - \bar{N}_\theta) \delta v_0 + (M_\theta - \bar{M}_\theta) \delta v_1 + \\
& + (N_\theta^* - \bar{N}_\theta^*) \delta v_2 + (M_\theta^* - \bar{M}_\theta^*) \delta v_3 + (Q_\theta - \bar{Q}_\theta) \delta w_0 \\
& + (S_\theta - \bar{S}_\theta) \delta w_1 + (Q_\theta^* - \bar{Q}_\theta^*) \delta w_2 \Big] Rd\xi \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}.
\end{aligned}$$

### 2.3.2. Hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên

Để đảm bảo thỏa mãn phương trình (2.40) với mọi  $\delta u_i$ ,  $\delta v_i$ ,  $\delta w_j$  ta suy ra hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên tương ứng như sau:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 \rightarrow: \quad & \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} = 0, \\
\delta v_0 \rightarrow: \quad & \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_\theta = 0, \\
\delta w_0 \rightarrow: \quad & \frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta - Rp_0 = 0, \\
\delta u_1 \rightarrow: \quad & \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - RQ_\xi = 0, \\
\delta v_1 \rightarrow: \quad & \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - RQ_\theta = 0, \\
\delta w_1 \rightarrow: \quad & \frac{\partial S_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} - M_\theta - RQ_z - Rp_1 = 0, \\
\delta u_2 \rightarrow: \quad & \frac{\partial N_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RS_\xi = 0, \\
\delta v_2 \rightarrow: \quad & \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_\theta^*}{\partial \theta} - RS_\theta - Q_\theta^* = 0, \\
\delta w_2 \rightarrow: \quad & \frac{\partial Q_\xi^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\theta^*}{\partial \theta} - N_\theta^* - RS_z - Rp_2 = 0,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\delta u_3 \rightarrow: \frac{\partial M_{\xi}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RQ_{\xi}^* = 0,$$

$$\delta v_3 \rightarrow: \frac{\partial M_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta}^*}{\partial \theta} - RQ_{\theta}^* - 2S_{\theta}^* = 0$$

Phương trình (2.41) chính là phương trình cân bằng phân tử vỏ trong trường hợp mô hình lý thuyết cấp ba  $N_0 = 3$ .

Đối với trường hợp mô hình lý thuyết cấp hai  $N_0 = 2$ , ta có hệ phương trình cân bằng sau:

$$\delta u_0 \rightarrow: \frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\delta v_0 \rightarrow: \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_{\theta} = 0,$$

$$\delta w_0 \rightarrow: \frac{\partial Q_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} - Rp_0 = 0,$$

$$\delta u_1 \rightarrow: \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - RQ_{\xi} = 0,$$

$$\delta v_1 \rightarrow: \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - RQ_{\theta} = 0,$$

$$\delta w_1 \rightarrow: \frac{\partial S_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} - RQ_z - Rp_1 = 0,$$

$$\delta u_2 \rightarrow: \frac{\partial N_{\xi}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^*}{\partial \theta} - RS_{\xi} = 0,$$

$$\delta v_2 \rightarrow: \frac{\partial N_{\xi\theta}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta}^*}{\partial \theta} - RS_{\theta} - Q_{\theta}^* = 0,$$

(2.42)

Các điều kiện biên tương ứng với hệ phương trình cân bằng (2.41) bao gồm:

- Tại  $\xi = \xi_1, \xi_2$ :

$$N_{\xi} = \bar{N}_{\xi} \cup u_0 = \bar{u}_0; N_{\xi}^* = \bar{N}_{\xi}^* \cup u_2 = \bar{u}_2;$$

$$\begin{aligned} M_\xi &= \bar{M}_\xi \cup u_1 = \bar{u}_1; M_\xi^* = \bar{M}_\xi^* \cup u_3 = \bar{u}_3; \\ N_{\xi\theta} &= \bar{N}_{\xi\theta} \cup v_0 = \bar{v}_0; N_{\xi\theta}^* = \bar{N}_{\xi\theta}^* \cup v_2 = \bar{v}_2; \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} M_{\xi\theta} &= \bar{M}_{\xi\theta} \cup v_1 = \bar{v}_1; M_{\xi\theta}^* = \bar{M}_{\xi\theta}^* \cup v_3 = \bar{v}_3; \\ Q_\xi &= \bar{Q}_\xi \cup w_0 = \bar{w}_0; Q_\xi^* = \bar{Q}_\xi^* \cup w_2 = \bar{w}_2; S_\xi = \bar{S}_\xi \cup w_1 = \bar{w}_1. \end{aligned}$$

- Tại  $\theta = \theta_1, \theta_2$ :

$$\begin{aligned} N_{\theta\xi} &= \bar{N}_{\theta\xi} \cup u_0 = \bar{u}_0; N_{\theta\xi}^* = \bar{N}_{\theta\xi}^* \cup u_2 = \bar{u}_2; \\ M_{\theta\xi} &= \bar{M}_{\theta\xi} \cup u_1 = \bar{u}_1; M_{\theta\xi}^* = \bar{M}_{\theta\xi}^* \cup u_3 = \bar{u}_3; \\ N_\theta &= \bar{N}_\theta \cup v_0 = \bar{v}_0; N_\theta^* = \bar{N}_\theta^* \cup v_2 = \bar{v}_2; \\ M_\theta &= \bar{M}_\theta \cup v_1 = \bar{v}_1; M_\theta^* = \bar{M}_\theta^* \cup v_3 = \bar{v}_3; \\ Q_\theta &= \bar{Q}_\theta \cup w_0 = \bar{w}_0; Q_\theta^* = \bar{Q}_\theta^* \cup w_2 = \bar{w}_2; S_\theta = \bar{S}_\theta \cup w_1 = \bar{w}_1. \end{aligned} \quad (2.44)$$

ở đây, các đại lượng  $\bar{N}_\xi, \bar{N}_\xi^*, \bar{M}_\xi, \bar{M}_\xi^*, \bar{N}_{\xi\theta}, \bar{N}_{\xi\theta}^*, \bar{M}_{\xi\theta}, \bar{M}_{\xi\theta}^*, \bar{Q}_\xi, \bar{Q}_\xi^*, \bar{S}_\xi, \bar{N}_\theta, \bar{N}_\theta^*, \bar{M}_\theta, \bar{M}_\theta^*, \bar{N}_{\theta\xi}, \bar{N}_{\theta\xi}^*, \bar{M}_{\theta\xi}, \bar{M}_{\theta\xi}^*, \bar{Q}_\theta, \bar{Q}_\theta^*, \bar{S}_\theta, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{v}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{w}_0, \bar{w}_1, \bar{w}_2$  là đại lượng cho trước trên biên. Các thành phần nội lực suy rộng  $N_\xi, M_\xi, N_\xi^*, M_\xi^*, N_\theta, M_\theta, N_\theta^*, M_\theta^*, Q_z, S_z, N_{\theta\xi}, M_{\theta\xi}, N_{\theta\xi}^*, M_{\theta\xi}^*, N_{\xi\theta}, M_{\xi\theta}, N_{\xi\theta}^*, M_{\xi\theta}^*, Q_\xi, S_\xi, Q_\xi^*, Q_\theta, S_\theta, Q_\theta^*, S_\theta^*$  được biểu diễn thông qua các thành phần biến dạng và ứng suất nhiệt (2.27) theo các biểu thức sau:

$$\begin{bmatrix} N_\xi \\ M_\xi \\ N_\xi^* \\ M_\xi^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (A_{11}\varepsilon_\xi + A_{12}\varepsilon_\theta + A_{13}\varepsilon_z) \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz - \begin{bmatrix} N_\xi^T \\ M_\xi^T \\ N_\xi^{T*} \\ M_\xi^{T*} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \\ N_\theta^* \\ M_\theta^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (A_{21}\varepsilon_\xi + A_{22}\varepsilon_\theta + A_{23}\varepsilon_z) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz - \begin{bmatrix} N_\theta^T \\ M_\theta^T \\ N_\theta^{T*} \\ M_\theta^{T*} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Q_z \\ S_z \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (A_{31}\varepsilon_\xi + A_{32}\varepsilon_\theta + A_{33}\varepsilon_z) \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} dz - \begin{bmatrix} Q_z^T \\ S_z^T \end{bmatrix}, \quad (2.44a)$$

$$\begin{bmatrix} N_{\theta\xi} \\ M_{\theta\xi} \\ N_{\theta\xi}^* \\ M_{\theta\xi}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} A_{44}\gamma_{\xi\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} N_{\xi\theta} \\ M_{\xi\theta} \\ N_{\xi\theta}^* \\ M_{\xi\theta}^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} A_{44}\gamma_{\xi\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{bmatrix} Q_\xi \\ S_\xi \\ Q_\xi^* \\ S_\xi^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} A_{55}\gamma_{\xi z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} Q_\theta \\ S_\theta \\ Q_\theta^* \\ S_\theta^* \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} A_{66}\gamma_{\theta z} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz.$$

trong đó, các thành phần nội lực suy rộng gây ra do nhiệt độ xác định như sau:

$$\begin{bmatrix} N_\xi^T \\ M_\xi^T \\ N_\xi^{T*} \\ M_\xi^{T*} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (A_{11}\alpha_\xi + A_{12}\alpha_\theta + A_{13}\alpha_z) \Delta T \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz,$$

$$\begin{bmatrix} N_\theta^T \\ M_\theta^T \\ N_\theta^{T*} \\ M_\theta^{T*} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (A_{21}\alpha_\xi + A_{22}\alpha_\theta + A_{23}\alpha_z) \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2/2 \\ z^3/6 \end{bmatrix} dz, \quad (2.44b)$$



$$\begin{bmatrix} Q_z^T \\ S_z^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} (A_{31}\alpha_\xi + A_{32}\alpha_\theta + A_{33}\alpha_z) \Delta T \left(1 + \frac{z}{R}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} dz.$$

Trong trường hợp độ chênh lệch nhiệt độ  $\Delta T$  chỉ là hàm số của tọa độ theo chiều dày  $z$ , tức là  $\Delta T = \Delta T(z)$ .

### 2.3.3. Hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị

Thế biểu thức chuyển vị (2.18), (2.19), (2.20) vào biểu thức quan hệ biến dạng-chuyển vị (2.21), (2.22), (2.23) và các biểu thức nội lực suy rộng (2.44a), (2.44b). Thực hiện các phép biến đổi toán học, hệ phương trình cân bằng (2.41) viết lại dưới dạng theo chuyển vị như sau:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{1n}^l u_n + H_{1n,11}^l \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u_n + H_{1n,22}^l \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_n \right) + \\ & + \sum_{n=0}^{N_0} H_{2n,12}^l \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^{N_0-1} H_{3n,1}^l \frac{\partial}{\partial \xi} w_n = 0, \\ & \sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{2n}^i v_n + H_{2n,11}^i \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v_n + H_{2n,22}^i \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v_n \right) + \\ & + \sum_{n=0}^{N_0} H_{1n,12}^i \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_n + \sum_{n=0}^{N_0-1} H_{3n,2}^i \frac{\partial}{\partial \theta} w_n = 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_0-1} \left( H_{3n}^j w_n + H_{3n,11}^j \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w_n + H_{3n,22}^j \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} w_n \right) + \sum_{n=0}^{N_0} H_{1n,1}^j \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \\ & + \sum_{n=0}^{N_0} H_{2n,2}^j \frac{\partial}{\partial \theta} v_n = H_4^j q^+ + H_5^j q^- + H_{T_o}^j \Delta T_o + H_{T_i}^j \Delta T_i. \end{aligned}$$

trong đó, các hệ số  $H_\beta^\alpha$  phụ thuộc vào các thông số vật liệu và hình học của vỏ trụ FGM,  $H_\beta^\alpha$  có được từ tính toán các hệ số rồi đổi chiều tương ứng từ các công thức (2.21) (cụ thể (2.22) và (2.23)), (2.24), (2.44a) và (2.44b),  $l = 1 \div (N_0 + 1)$ ,  $i = (N_0 + 2) \div (2N_0 + 2)$ ,  $j = (2N_0 + 3) \div (3N_0 + 2)$  (cụ thể

Các hệ số  $H_\beta^\alpha$  ở phần Phụ lục). Tùy thuộc vào giá trị của cấp mô hình  $N_0$ , ta sẽ có số lượng các phương trình đạo hàm riêng cấp 2 tương ứng, ví dụ tương ứng với mô hình cấp 2  $N_0 = 2$  ta có 8 phương trình đạo hàm riêng cấp 2, còn trong trường hợp mô hình cấp 3  $N_0 = 3$  ta nhận được 11 phương trình đạo hàm riêng cấp 2.

Các điều kiện biên (2.43), (2.44) ở một số trường hợp hay gặp trong thực tế tính toán [48] được cho dưới dạng sau:

- Đối với điều kiện biên tự do, ta có:

$$\text{Tại } \xi = 0, \frac{L}{R}: N_\xi = N_{\xi\theta} = Q_\xi = M_\xi = M_{\xi\theta} = S_\xi = 0,$$

$$N_\xi^* = N_{\xi\theta}^* = Q_\xi^* = M_\xi^* = M_{\xi\theta}^* = 0.$$

$$\text{Tại } \theta = \theta_1, \theta_2: N_\theta = N_{\theta\xi} = Q_\theta = M_\theta = M_{\theta\xi} = S_\theta = 0,$$

$$N_\theta^* = N_{\theta\xi}^* = Q_\theta^* = M_\theta^* = M_{\theta\xi}^* = 0.$$

- Đối với điều kiện biên gối tựa, ta có:

$$\text{Tại } \xi = 0, \frac{L}{R}: N_\xi = M_\xi = N_\xi^* = M_\xi^* = 0, v_i = 0, w_j = 0, (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2),$$

$$\text{Tại } \theta = \theta_1, \theta_2: N_\theta = M_\theta = N_\theta^* = M_\theta^* = 0, u_i = 0, w_j = 0 (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2).$$

- Đối với điều kiện biên ngàm chặt, ta có:

$$\text{Tại } \xi = 0, \frac{L}{R}: u_i = 0, v_i = 0, w_j = 0, (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2).$$

$$\text{Tại } \theta = \theta_1, \theta_2: u_i = 0, v_i = 0, w_j = 0 (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2).$$

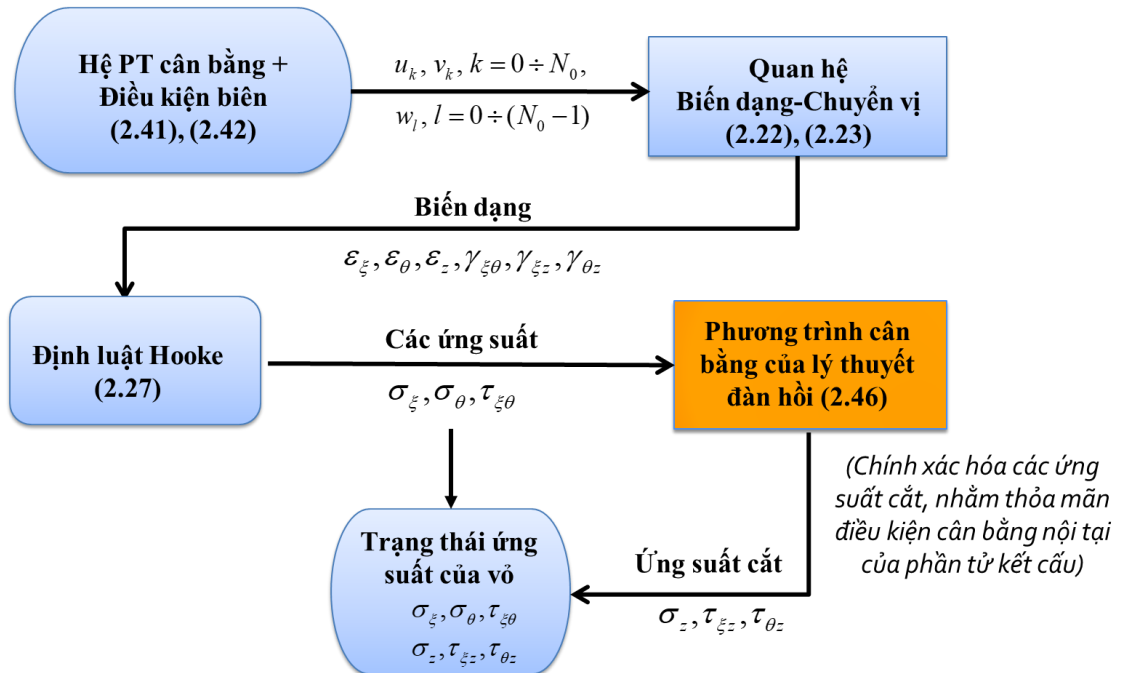
#### 2.4. Trình tự giải bài toán xác định ứng suất, biến dạng của vỏ

Thực hiện giải hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng (2.41) và (2.42) cùng các điều kiện biên tương ứng, ta nhận được trường chuyển vị  $u_i$ ,  $v_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) và  $w_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ). Từ các phương trình quan hệ giữa biến

dạng và chuyển vị (2.22) và (2.23) ta tìm được các biến dạng  $\varepsilon_\xi$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{\xi\theta}$ ,  $\gamma_{\xi z}$  và  $\gamma_{\theta z}$ . Tiếp theo, sử dụng ba biểu thức quan hệ biến dạng và ứng suất của Hooke là  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\theta$  và  $\tau_{\xi\theta}$  để xác định các ứng suất mặt  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{\xi\theta}$ . Các thành phần ứng suất cắt còn lại được tìm dựa trên phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi 3D [48] như công thức sau:

$$\begin{aligned} \tau_{\xi z} &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^z \left[ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\theta}}{\partial \theta} \right] dz, \\ \tau_{\theta z} &= -\frac{R}{(R+z)^2} \int_{-h/2}^z \left[ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 \frac{\partial \tau_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right] dz, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^z \left[ \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \sigma_\theta \right] dz + \frac{R-h/2}{R+h/2} q^-. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Việc sử dụng phương trình cân bằng theo lý thuyết đàn hồi để chính xác hóa các ứng suất cắt và đảm bảo thỏa mãn điều kiện cân bằng nội tại của phần tử kết cấu.



Hình 2.3. Trình tự giải bài toán xác định ứng suất, biến dạng vỏ trụ FGM

Hình 2.3 minh họa các bước giải bài toán biên trong nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D.

## Kết luận chương 2

Dựa trên các kết quả nghiên cứu lý thuyết trong chương này, có thể rút ra một số kết luận như sau:

1. Từ đặc tính của vật liệu FGM phụ thuộc vào nhiệt độ và phân bố tỷ lệ thể tích, luận án lựa chọn phạm vi tính chất cơ học của vật liệu composite FGM cho tính toán và nghiên cứu ứng xử cơ học vỏ trụ FGM.

2. Trên cơ sở áp dụng khai triển Taylor đối với trường chuyển vị theo mô hình lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D, quan hệ ứng suất-biến dạng có tính đến ảnh hưởng của nhiệt độ, áp dụng nguyên lý chuyển dịch khả dĩ luận án đã xây dựng được hệ phương trình cân bằng và các điều kiện biên tương ứng trong nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ và nhiệt. Việc sử dụng mô hình tính toán đã nêu cho phép nghiên cứu đầy đủ ảnh hưởng của các thành phần ứng suất và biến dạng trượt (thường bỏ qua trong các lý thuyết bậc thấp) lên trạng thái ứng suất-biến dạng chung của vỏ, đặc biệt tại những khu vực trạng thái ứng suất-biến dạng có tính không gian rõ rệt. Trường nhiệt độ được nghiên cứu ở đây là nhiệt dừng và biến đổi theo chiều dày vỏ. Quy luật biến thiên tỉ lệ thể tích các pha thành phần của vật liệu FGM là quy luật lũy thừa Voigt, thường được sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu kết cấu làm từ FGM.

3. Xây dựng được trình tự giải bài toán biên trong nghiên cứu trạng thái ứng suất-biến dạng vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt, trong đó các thành phần ứng suất cắt được xác định thông qua phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi 3D. Trình tự giải bài toán đã nêu cho phép đảm bảo điều kiện cân bằng nội tại của phân tố kết cấu, đồng thời thỏa mãn các điều kiện biên trên bề mặt trong các điều kiện đặt tải khác nhau.

### Chương 3. NGHIÊN CỨU TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT-BIẾN DẠNG CỦA VỎ TRỤ FGM BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Chương 3 trình bày tổng quát phương pháp giải tích cho vỏ FGM, việc áp dụng chuỗi lượng giác kép cho bài toán vỏ trụ FGM và panel trụ FGM tựa đơn; áp dụng chuỗi lượng giác đơn cho bài toán vỏ trụ FGM và panel trụ FGM với điều kiện biên khác nhau. Cách xác định nghiệm thuần nhất, cũng như nghiệm riêng ứng với các dạng tải trọng. Bài toán kiểm chứng tính đúng đắn và độ tin cậy của phương pháp giải.

#### 3.1. Chuyển hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng về hệ phương trình vi phân thường

##### 3.1.1. Trường hợp vỏ trụ FGM

Để chuyển việc nghiên cứu hệ phương trình đạo hàm riêng (2.45) về nghiên cứu hệ phương trình vi phân thường ta sử dụng khai triển chuỗi lượng giác đơn theo hướng vòng cung. Đối với vỏ trụ, các điều kiện biên theo hướng vòng cung được thay thế bằng điều kiện tuần hoàn của chuyển vị và ứng suất. Để thỏa mãn điều kiện biên tuần hoàn theo hướng vòng cung ta phân tích chuyển vị  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $w_k$ , tải trọng cơ  $q^\pm(\xi, \theta)$  và nhiệt độ  $\Delta T_o$ ,  $\Delta T_{in}$  dưới dạng chuỗi lượng giác đơn [51] như sau:

$$\begin{aligned} u_k(\xi, \theta) &= U_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ U_{km}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + U_{km}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad k = 0 \div N_0, \\ v_k(\xi, \theta) &= V_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ V_{km}^{(1)}(\xi) \sin m\theta - V_{km}^{(2)}(\xi) \cos m\theta \right], \quad k = 0 \div N_0, \\ w_l(\xi, \theta) &= W_{l0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ W_{lm}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + W_{lm}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad l = 0 \div (N_0 - 1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$q^\pm = Q_0^\pm(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ Q_m^{(1)\pm}(\xi) \cos m\theta + Q_m^{(2)\pm}(\xi) \sin m\theta \right],$$

$$\Delta T_o = \Delta T_{o0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \Delta T_{om}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + \Delta T_{om}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad (3.2)$$

$$\Delta T_{in} = \Delta T_{in0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \Delta T_{inm}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + \Delta T_{inm}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right].$$

Thay thế các phương trình (3.1) và (3.2) vào hệ phương trình (2.45), thực hiện các phép biến đổi theo hệ số của chuỗi lượng giác ta được các phương trình vi phân để xác định các hàm  $U_{k0}$ ,  $V_{k0}$ ,  $W_{l0}$ ,  $k = 0 \div N_0$ ,  $l = 0 \div (N_0 - 1)$ .

$$\sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{2n}^i V_{n0} + H_{2n,11}^i \frac{d^2}{d\xi^2} V_{n0} \right) = 0, \quad i = (N_0 + 2) \div (2N_0 + 2), \quad (3.3)$$

$$\sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{1n}^l U_{n0} + H_{1n,11}^l \frac{d^2}{d\xi^2} U_{n0} \right) + \sum_{n=0}^{N_0-1} H_{3n,1}^l \frac{d}{d\xi} W_{n0} = 0, \quad l = 1 \div (N_0 + 1), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_0-1} \left( H_{3n}^j W_{n0} + H_{3n,11}^j \frac{d^2}{d\xi^2} W_{n0} \right) + \sum_{n=0}^{N_0} H_{1n,1}^j \frac{d}{d\xi} U_{n0} + \\ & = H_4^j Q_0^+ + H_5^j Q_0^- + H_{T_0}^j \Delta T_{o0} + H_{T_{in}}^j \Delta T_{in0}, \quad j = (2N_0 + 3) \div (3N_0 + 2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

và cho các hàm  $U_{km}^{(s)}$ ,  $V_{km}^{(s)}$ ,  $W_{lm}^{(s)}$ ,  $k = 0 \div N_0$ ,  $l = 0 \div (N_0 - 1)$ ,  $s = 1, 2$ ,  $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{1n}^l U_{nm}^{(s)} + H_{1n,11}^l \frac{d^2}{d\xi^2} U_{nm}^{(s)} - m^2 H_{1n,22}^l U_{nm}^{(s)} \right) + \\ & + \sum_{n=0}^{N_0} m H_{2n,12}^l \frac{d}{d\xi} V_{nm}^{(s)} + \sum_{n=0}^{N_0-1} H_{3n,1}^l \frac{d}{d\xi} W_{nm}^{(s)} = 0, \quad l = 1 \div (N_0 + 1), \\ & \sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{2n}^i V_{nm}^{(s)} + H_{2n,11}^i \frac{d^2}{d\xi^2} V_{nm}^{(s)} - m^2 H_{2n,22}^i V_{nm}^{(s)} \right) - \\ & - \sum_{n=0}^{N_0} m H_{1n,12}^i \frac{d}{d\xi} U_{nm}^{(s)} - \sum_{n=0}^{N_0-1} m H_{3n,2}^i W_{nm}^{(s)} = 0, \quad i = (N_0 + 2) \div (2N_0 + 2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} \left( H_{3n}^j W_{nm}^{(s)} + H_{3n,11}^j \frac{d^2}{d\xi^2} W_{nm}^{(s)} - m^2 H_{3n,22}^j W_{nm}^{(s)} \right) + \sum_{n=0}^{N_0} H_{1n,1}^j \frac{d}{d\xi} U_{nm}^{(s)} + \sum_{n=0}^{N_0} m H_{2n,2}^j V_{nm}^{(s)}$$

$$= H_4^j Q_m^{(s)+} + H_5^j Q_m^{(s)-} + H_{T_o}^j \Delta T_{om}^{(s)} + H_{T_{in}}^j \Delta T_{inm}^{(s)}, j = (2N_0 + 3) \div (3N_0 + 2).$$

Các hệ phương trình (3.3) ÷ (3.6) là các hệ phương trình vi phân thường đối với các biến số  $U_{k0}$ ,  $V_{k0}$ ,  $W_{l0}$  và  $U_{km}^{(s)}$ ,  $V_{km}^{(s)}$ ,  $W_{lm}^{(s)}$ . Các hệ phương trình này độc lập tương đối với nhau theo từng giá trị của  $m$ .

Như vậy, sử dụng phương pháp tách biến và phân tích theo chuỗi lượng giác đơn, thực hiện chuyển từ việc nghiên cứu hệ phương trình đạo hàm riêng (2.45) sang nghiên cứu các hệ phương trình vi phân thường (3.3) ÷ (3.5) và (3.6). Việc giải các hệ phương trình vi phân thường này cùng với các điều kiện biên tương ứng có thể được thực hiện bằng phương pháp giải tích hoặc phương pháp số. Trường hợp vỏ trụ FGM có kết cấu đối xứng trục, khi chịu tác dụng của tải trọng cơ, nhiệt hướng kính và đối xứng trục, các thành phần chuyển vị, ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào  $\theta$ , còn chuyển vị  $v = 0$ , nên hệ phương trình đạo hàm riêng (2.45) trở thành các phương trình vi phân thường tương tự như (3.4) và (3.5).

Theo hướng tiếp cận giải tích, trước hết cần xác định nghiệm thuần nhất của các phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với các phương trình vi phân thường (3.3) ÷ (3.5) và (3.6). Kết hợp nghiệm thuần nhất vừa tìm được với nghiệm riêng tương ứng với các dạng tải trọng tác dụng lên vỏ của các phương trình vi phân thường nói trên, lúc này nhận được nghiệm của các phương trình (3.3) ÷ (3.5) và (3.6). Sau khi xác định được các hằng số tích phân từ các điều kiện biên tương ứng, ta sẽ nhận được biểu thức của các hàm  $U_{k0}$ ,  $V_{k0}$ ,  $W_{l0}$ , và  $U_{km}^{(s)}$ ,  $V_{km}^{(s)}$ ,  $W_{lm}^{(s)}$ . Từ đó, ta sẽ nhận được biểu thức của các thành phần chuyển vị  $u_k(\xi, \theta)$ ,  $v_k(\xi, \theta)$ ,  $w_l(\xi, \theta)$  thông qua tổng (3.1). Quy trình xác định trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM được thực hiện tiếp tục như trên Hình 2.3.

### 3.1.2. Trường hợp panel trụ FGM

Xét panel trụ với điều kiện biên tựa đơn trên hai cạnh  $\theta = 0$  và  $\theta = \theta_0$ , để giải hệ phương trình đạo hàm riêng (2.45) ta sử dụng phương pháp tách biến và áp dụng khai triển chuỗi lượng giác đơn cho chuyển vị và tải trọng cơ, nhiệt theo (3.7).

$$u_k(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{km}(\xi) \sin \beta_m \theta, \quad k = 0 \div N_0,$$

$$v_k(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{km}(\xi) \cos \beta_m \theta, \quad k = 0 \div N_0,$$

$$w_l(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{lm}(\xi) \sin \beta_m \theta, \quad l = 0 \div (N_0 - 1)$$

(3.7)

$$q^{\pm} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^{\pm}(\xi) \sin \beta_m \theta, \quad \Delta T_o = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta T_{om}(\xi) \sin \beta_m \theta, \quad \Delta T_{in} = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta T_{inm}(\xi) \sin \beta_m \theta$$

ở đây,  $\beta_m$  là hằng số phụ thuộc  $m$  và được xác định như sau:

$$\beta_m = m\pi / \theta_0$$

Đại lượng  $m$  trong công thức nêu trên còn được gọi là số nửa bước sóng theo  $\theta$ ,  $\theta_0 = b / R$  là góc mở của vỏ trụ,  $b$  là chiều rộng của panel trụ. Thế các phương trình (3.7) vào hệ phương trình (2.45) và thực hiện các phép biến đổi, ta được phương trình vi phân cho các hàm  $U_{km}$ ,  $V_{km}$ ,  $W_{lm}$ ,  $k = 0 \div N_0$ ,  $l = 0 \div (N_0 - 1)$ ,  $m = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{1n}^l U_{nm} + H_{1n,11}^l \frac{d^2}{d\xi^2} U_{nm} - \beta_m^2 H_{1n,22}^l U_{nm} \right) +$$

$$- \sum_{n=0}^{N_0} \beta_m H_{2n,12}^l \frac{d}{d\xi} V_{nm} + \sum_{n=0}^{N_0-1} H_{3n,1}^l \frac{d}{d\xi} W_{nm} = 0, \quad l = 1 \div (N_0 + 1),$$



$$\sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{2n}^i V_{nm} + H_{2n,11}^i \frac{d^2}{d\xi^2} V_{nm} - \beta_m^2 H_{2n,22}^i V_{nm} \right) + \sum_{n=0}^{N_0} \beta_m H_{1n,12}^i \frac{d}{d\xi} U_{nm} + \sum_{n=0}^{N_0-1} \beta_m H_{3n,2}^i W_{nm} = 0, \quad i = (N_0 + 2) \div (2N_0 + 2), \quad (3.8)$$

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} \left( H_{3n}^j W_{nm} + H_{3n,11}^j \frac{d^2}{d\xi^2} W_{nm} - \beta_m^2 H_{3n,22}^j W_{nm} \right) + \sum_{n=0}^{N_0} H_{1n,1}^j \frac{d}{d\xi} U_{nm} - \sum_{n=0}^{N_0} \beta_m H_{2n,2}^j V_{nm} = H_4^j Q_m^+ + H_5^j Q_m^- + H_{To}^j \Delta T_{om} + H_{Tin}^j \Delta T_{inm}, \quad j = (2N_0 + 3) \div (3N_0 + 2).$$

Tương tự trường hợp vỏ trụ FGM, hệ phương trình (3.8) là các phương trình vi phân thường. Để giải các phương trình vi phân này cùng điều kiện biên tương ứng, có thể sử dụng phương pháp giải tích hoặc phương pháp số.

Để giải theo phương pháp giải tích, việc xác định nghiệm của hệ phương trình (3.8) dưới dạng tổng của nghiệm thuần nhất của các phương trình vi phân thuần nhất tương ứng và nghiệm riêng tương ứng với dạng tải trọng tác dụng lên panel trụ. Sau khi xác định được các hằng số tích phân từ các điều kiện biên trên các cạnh, và nhận được biểu thức của các hàm  $U_{km}$ ,  $V_{km}$ ,  $W_{lm}$ . Các thành phần chuyển vị  $u_k(\xi, \theta)$ ,  $v_k(\xi, \theta)$ ,  $w_l(\xi, \theta)$  được xác định thông qua tổng (3.7). Quy trình xác định trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM được thực hiện tiếp tục như trình bày trên Hình 2.3.

## 3.2. Phương pháp Navier cho giải bài toán vỏ trụ FGM tựa đơn

### 3.2.1. Trường hợp panel trụ FGM tựa đơn trên bốn cạnh

Trong mục này luận án nghiên cứu phương pháp giải tích đối với trường hợp panel trụ tựa đơn trên bốn cạnh bằng cách sử dụng kỹ thuật Navier (khai triển chuỗi lượng giác kép cho chuyển vị, tải cơ và nhiệt) đối với trường hợp mô hình lý thuyết  $N_0 = 3$ . Đối với trường hợp mô hình lý thuyết  $N_0 = 2$  được thực hiện tương tự.

Các thành phần chuyển vị  $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3, w_0, w_1, w_2$ , tải trọng cơ  $q^\pm$  và nhiệt độ  $\Delta T_o, \Delta T_{in}$  được phân tích theo chuỗi lượng giác kép. Các hàm lượng giác được lựa chọn là những hàm số thỏa mãn điều kiện biên tựa đơn. Để nhận được các biểu thức đại số liên hệ giữa các thành phần chuyển vị và các hệ số cho trước, thực hiện thay thế biểu thức phân tích các thành phần chuyển vị và ngoại lực theo chuỗi lượng giác kép vào các phương trình (2.45).

Điều kiện biên tựa đơn đối với panel trụ được viết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}
N_\xi(0, \theta) &= N_\xi(L/R, \theta) = 0, \\
M_\xi(0, \theta) &= M_\xi(L/R, \theta) = 0, \\
N_\xi^*(0, \theta) &= N_\xi^*(L/R, \theta) = 0, \\
M_\xi^*(0, \theta) &= M_\xi^*(L/R, \theta) = 0, \\
v_i(0, \theta) &= v_i(L/R, \theta) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\
w_j(0, \theta) &= w_j(L/R, \theta) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \\
N_\theta(\xi, 0) &= N_\theta(\xi, b/R) = 0, \\
M_\theta(\xi, 0) &= M_\theta(\xi, b/R) = 0, \\
N_\theta^*(\xi, 0) &= N_\theta^*(\xi, b/R) = 0, \\
M_\theta^*(\xi, 0) &= M_\theta^*(\xi, b/R) = 0, \\
u_i(\xi, 0) &= u_i(\xi, b/R) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\
w_j(\xi, 0) &= w_j(\xi, b/R) = 0, \quad j = 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Phân tích tải trọng, chuyển vị theo chuỗi lượng giác kép:

$$u_i = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} U_{rs}^i \sin \beta_s \theta \cos \lambda_r \xi,$$

$$v_i = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} V_{rs}^i \cos \beta_s \theta \sin \lambda_r \xi,$$

$$w_j = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs}^j \sin \beta_s \theta \sin \lambda_r \xi, \quad (3.10)$$

$$q^{\pm} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} Q_{rs}^{\pm} \sin \beta_s \theta \sin \lambda_r \xi,$$

$$\Delta T_o = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \Delta T_o^{rs} \sin \beta_s \theta \sin \lambda_r \xi,$$

$$\Delta T_{in} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \Delta T_{in}^{rs} \sin \beta_s \theta \sin \lambda_r \xi, \quad \lambda_r = \frac{r\pi}{L/R}, \quad \beta_s = \frac{s\pi}{b/R}, \quad \{r, s\} = 1, 2, \dots$$

trong đó  $b$  là chiều rộng (chiều dài theo phương  $\theta$ ) của panel trụ.

Rõ ràng, khai triển (3.10) hoàn toàn thỏa mãn điều kiện biên (3.9).

Thế (3.10) vào (2.45) và thực hiện một số phép biến đổi cơ bản ta được hệ phương trình đại số đối với các hệ số  $U_{rs}^i$ ,  $V_{rs}^i$ ,  $W_{rs}^j$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^3 \left( H_{1n}^l U_{rs}^n - \lambda_r^2 H_{1n,11}^l U_{rs}^n - \beta_s^2 H_{1n,22}^l U_{rs}^n \right) + \\ & - \lambda_r \beta_s \sum_{n=0}^3 H_{2n,12}^l V_{rs}^n + \lambda_r \sum_{n=0}^2 H_{3n,1}^l W_{rs}^n = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{n=0}^3 \left( H_{2n}^i V_{rs}^n - \lambda_r^2 H_{2n,11}^i V_{rs}^n - \beta_s^2 H_{2n,22}^i V_{rs}^n \right) - \\ & - \lambda_r \beta_s \sum_{n=0}^3 H_{1n,12}^i U_{rs}^n + \beta_s \sum_{n=0}^2 H_{3n,2}^i W_{rs}^n = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8, \\ & \sum_{n=0}^2 \left( H_{3n}^j W_{rs}^n - \lambda_r^2 H_{3n,11}^j W_{rs}^n - \beta_s^2 H_{3n,22}^j W_{rs}^n \right) - \lambda_r \sum_{n=0}^3 H_{1n,1}^j U_{rs}^n - \\ & - \beta_s \sum_{n=0}^3 H_{2n,2}^j V_{rs}^n = H_4^j Q_{rs}^+ + H_5^j Q_{rs}^- + H_{To}^j \Delta T_o^{rs} + H_{Tin}^j \Delta T_{in}^{rs}, \quad j = 9, 10, 11. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Giải hệ phương trình (3.11) sẽ nhận được các hệ số  $U_{rs}^i, V_{rs}^i, W_{rs}^j$ , tiếp tục thay vào (3.10) để xác định các chuyển vị  $u_i, v_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ),  $w_j$  ( $j=0, 1, 2$ ). Từ các phương quan hệ biến dạng và chuyển vị (2.22) tìm được các biến dạng  $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\xi z}$  và  $\gamma_{\theta z}$ . Tiếp theo, sử dụng ba biểu thức  $\sigma_\xi, \sigma_\theta$  và  $\tau_{\xi\theta}$  của (2.25) hoặc (2.27) để xác định các ứng suất màng  $\sigma_\xi, \sigma_\theta$  và  $\tau_{\xi\theta}$ . Các thành phần ứng suất còn lại được tìm dựa trên phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi không gian (2.46).

### 3.2.2. Trường hợp vỏ trụ FGM hai đầu tựa đơn

Điều kiện biên theo  $\theta$  là điều kiện tuần hoàn. Điều kiện biên tựa đơn đối với vỏ trụ theo  $\xi$  tại  $\xi=0, \xi=\frac{L}{R}$  được viết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} N_\xi(0, \theta) &= N_\xi(L/R, \theta) = 0, \\ M_\xi(0, \theta) &= M_\xi(L/R, \theta) = 0, \\ N_\xi^*(0, \theta) &= N_\xi^*(L/R, \theta) = 0, \\ M_\xi^*(0, \theta) &= M_\xi^*(L/R, \theta) = 0, \\ v_k(0, \theta) &= v_k(L/R, \theta) = 0, \quad k=0, 1, 2, 3, \\ w_j(0, \theta) &= w_j(L/R, \theta) = 0, \quad j=0, 1, 2, \end{aligned}$$

Phân tích tải trọng, chuyển vị theo chuỗi lượng giác kép:

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{km} \sin m\theta \cos \lambda_r \xi, \\ v_k &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{km} \cos m\theta \sin \lambda_r \xi, \\ w_j &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm} \sin m\theta \sin \lambda_r \xi, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$q^\pm = \sum_{m=1}^{\infty} Q^\pm \sin m\theta \sin \lambda_r \xi,$$

$$\Delta T_o = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta T_o \sin m\theta \sin \lambda_r \xi,$$

$$\Delta T_{in} = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta T_{in} \sin m\theta \sin \lambda_r \xi, \quad \lambda_r = \frac{r\pi}{L/R}, r = 1, 2, 3, \dots$$

Thế (3.12) vào (2.45) và thực hiện một số phép biến đổi cơ bản ta nhận được hệ phương trình đại số đối với các hệ số  $U_{km}$ ,  $V_{km}$ ,  $W_{jm}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{1n}^l U_{nm} - \lambda_r^2 H_{1n,11}^l U_{nm} - m^2 H_{1n,22}^l U_{nm} \right) + \\ & -m\lambda_r \sum_{n=0}^{N_0} H_{2n,12}^l V_{nm} + \lambda_r \sum_{n=0}^{N_0-1} H_{3n,1}^l W_{nm} = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{n=0}^{N_0} \left( H_{2n}^i V_{nm} - \lambda_r^2 H_{2n,11}^i V_{nm} - m^2 H_{2n,22}^i V_{nm} \right) - \\ & -m\lambda_r \sum_{n=0}^{N_0} H_{1n,12}^i U_{nm} + m \sum_{n=0}^{N_0-1} H_{3n,2}^i W_{nm} = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8, \\ & \sum_{n=0}^{N_0-1} \left( H_{3n}^j W_{nm} - \lambda_r^2 H_{3n,11}^j W_{nm} - m^2 H_{3n,22}^j W_{nm} \right) - \lambda_r \sum_{n=0}^{N_0} H_{1n,1}^j U_{nm} - \\ & -m \sum_{n=0}^{N_0} H_{2n,2}^j V_{nm} = H_4^j Q_r^+ + H_5^j Q_r^- + H_{To}^j \Delta T_o^r + H_{Tin}^j \Delta T_{in}^r, \quad j = 9, 10, 11. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Thực hiện trình tự giải như các bước trong trường hợp panel trụ FGM tựa đơn trên bốn cạnh.

### 3.3. Phương pháp tính toán vỏ trụ chịu tác dụng của tải trọng hướng kính đối xứng trục với các điều kiện biên khác nhau

Phần này xem xét vỏ trụ FGM chịu tải đối xứng trục. Chuyển vị và tải trọng có được như khai triển ở (3.1), (3.2) với  $m = 0$ . Do  $v_i = 0$ , các đại lượng không phụ thuộc vào  $\theta$  (do kết cấu, lực đối xứng trục), hệ phương trình vi

phân đạo hàm riêng (2.45) dẫn đến hệ các phương trình vi phân thường tương tự như (3.4) và (3.5).

Nghiệm các phương trình vi phân tổng quát (3.4) và (3.5) có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của nghiệm các phương trình vi phân thuần nhất và nghiệm riêng của các phương trình khi có tải trọng cụ thể.

### 3.3.1. Xác định nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

Do các hệ số của phương trình (3.4), (3.5) là không đổi, theo phương pháp toán tử, các phương trình này có thể được coi là phương trình đại số và biểu diễn phương pháp giải (3.4), (3.5) dưới dạng tổng quát.

Ở dạng ma trận, hệ phương trình thuần nhất (3.4), (3.5) được viết:

$$\mathbf{D}[\bar{U}_{00}, \bar{U}_{10}, \bar{U}_{20}, \bar{U}_{30}, \bar{W}_{00}, \bar{W}_{10}, \bar{W}_{20}]^T = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

Ma trận  $\mathbf{D}$ , một ma trận toán tử vuông có kích thước  $7 \times 7$  và có dạng như sau:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} H_{10,11}^1 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{11}^1 + H_{11,11}^1 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{12}^1 + H_{12,11}^1 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{13}^1 + H_{13,11}^1 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{30,1}^1 \frac{d}{d\xi} & H_{31,1}^1 \frac{d}{d\xi} & H_{32,1}^1 \frac{d}{d\xi} \\ H_{10,11}^2 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{11}^2 + H_{11,11}^2 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{12}^2 + H_{12,11}^2 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{13}^2 + H_{13,11}^2 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{30,1}^2 \frac{d}{d\xi} & H_{31,1}^2 \frac{d}{d\xi} & H_{32,1}^2 \frac{d}{d\xi} \\ H_{10,11}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{11}^3 + H_{11,11}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{12}^3 + H_{12,11}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{13}^3 + H_{13,11}^3 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{30,1}^3 \frac{d}{d\xi} & H_{31,1}^3 \frac{d}{d\xi} & H_{32,1}^3 \frac{d}{d\xi} \\ H_{10,11}^4 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{11}^4 + H_{11,11}^4 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{12}^4 + H_{12,11}^4 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{13}^4 + H_{13,11}^4 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{30,1}^4 \frac{d}{d\xi} & H_{31,1}^4 \frac{d}{d\xi} & H_{32,1}^4 \frac{d}{d\xi} \\ H_{10,1}^9 \frac{d}{d\xi} & H_{11,1}^9 \frac{d}{d\xi} & H_{12,1}^9 \frac{d}{d\xi} & H_{13,1}^9 \frac{d}{d\xi} & H_{30}^9 + H_{30,11}^9 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{31}^9 + H_{31,11}^9 \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{32}^9 + H_{32,11}^9 \frac{d^2}{d\xi^2} \\ H_{10,1}^{10} \frac{d}{d\xi} & H_{11,1}^{10} \frac{d}{d\xi} & H_{12,1}^{10} \frac{d}{d\xi} & H_{13,1}^{10} \frac{d}{d\xi} & H_{30}^{10} + H_{30,11}^{10} \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{31}^{10} + H_{31,11}^{10} \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{32}^{10} + H_{32,11}^{10} \frac{d^2}{d\xi^2} \\ H_{10,1}^{11} \frac{d}{d\xi} & H_{11,1}^{11} \frac{d}{d\xi} & H_{12,1}^{11} \frac{d}{d\xi} & H_{13,1}^{11} \frac{d}{d\xi} & H_{30}^{11} + H_{30,11}^{11} \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{31}^{11} + H_{31,11}^{11} \frac{d^2}{d\xi^2} & H_{32}^{11} + H_{32,11}^{11} \frac{d^2}{d\xi^2} \end{bmatrix}$$

Giả sử  $F(\xi)$  là nghiệm của phương trình vi phân sau:

$$\det(\mathbf{D})F(\xi) = 0 \quad (3.15)$$

trong đó,  $\det(\mathbf{D})$  là định thức của ma trận  $\mathbf{D}$ .

Khi đó, các biểu thức sau cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (3.14):

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{00} &= \det(\mathbf{D})_{15} F(\xi), & \bar{U}_{10} &= \det(\mathbf{D})_{25} F(\xi), \\
\bar{U}_{20} &= \det(\mathbf{D})_{35} F(\xi), & \bar{U}_{30} &= \det(\mathbf{D})_{45} F(\xi), \\
\bar{W}_{00} &= \det(\mathbf{D})_{55} F(\xi), & \bar{W}_{10} &= \det(\mathbf{D})_{65} F(\xi), & \bar{W}_{20} &= \det(\mathbf{D})_{75} F(\xi).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ở đây,  $\det(\mathbf{D})_{ij}$  là định thức của phần bù ma trận  $\mathbf{D}$  tương ứng với phần tử  $(i, j)$ .

Thay thế  $\frac{d}{d\xi} = p$ ,  $\frac{d}{d\xi^2} = p^2$  vào biểu thức xác định định thức của ma trận  $\mathbf{D}$ , khi đó phương trình vi phân (3.15) có phương trình đặc trưng được biểu diễn dưới dạng

$$p^2 \sum_{n=0}^6 S_n^0 p^{2n} = p^2 G(p) = 0, \tag{3.17}$$

Ngoài các nghiệm bằng 0, phương trình (3.17) còn có các nghiệm sau:

$$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4.$$

Do đó,  $G(p)$  có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned}
G(p) &= S_6^0 \left[ (p - p_1)^2 + q_1 \right] \left[ (p + p_1)^2 + q_1 \right] \left[ (p - p_2)^2 + q_2 \right] \times \\
&\quad \times \left[ (p + p_2)^2 + q_2 \right] (p^2 - p_3^2) (p^2 - p_4^2).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Có bất đẳng thức chặt đối với vỏ mỏng như sau:

$$p_1 \ll p_2 < p_3 < p_4, \quad q_1 \ll q_2.$$

Giá trị của  $p_1$ ,  $q_1$  có thể được xác định xấp xỉ bởi các công thức sau:

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S_0^0}{S_2^0} - \frac{S_1^0}{4S_2^0}}}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S_0^0}{S_2^0} + \frac{S_1^0}{4S_2^0}}}.$$

Đối với nghiệm không của phương trình (3.17), biểu thức (3.16) không có nghĩa. Do đó, trong trường hợp này, chỉ quan tâm tới nghiệm của phương trình (3.15), tương ứng với các nghiệm khác không của (3.17). Nghiệm này có dạng sau:

$$\begin{aligned}\bar{F}(\xi) = & (C_1 \sin q_1 \xi + C_2 \cos q_1 \xi) e^{-p_1 \xi} + (C_3 \sin q_1 \xi + C_4 \cos q_1 \xi) e^{p_1 \xi} + \\ & + (C_5 \sin q_2 \xi + C_6 \cos q_2 \xi) e^{-p_2 \xi} + (C_7 \sin q_2 \xi + C_8 \cos q_2 \xi) e^{p_2 \xi} + \\ & + C_9 e^{-p_3 \xi} + C_{10} e^{p_3 \xi} + C_{11} e^{-p_4 \xi} + C_{12} e^{p_4 \xi}.\end{aligned}$$

Tương ứng với hai nghiệm bằng không của (3.17) có các nghiệm riêng tương ứng của phương trình (3.14), bao gồm:

$$\begin{aligned}[\bar{U}_{00} = C_{13}, \bar{U}_{10} = 0, \bar{U}_{20} = 0, \bar{U}_{30} = 0, \bar{W}_{00} = 0, \bar{W}_{10} = 0, \bar{W}_{20} = 0], \\ [\bar{U}_{00} = C_{14} \xi, \bar{U}_{10} = 0, \bar{U}_{20} = 0, \bar{U}_{30} = 0, \bar{W}_{00} = C_{14} k_1, \bar{W}_{10} = C_{14} k_2, \bar{W}_{20} = C_{14} k_3].\end{aligned}$$

trong đó, các hệ số  $k_1, k_2, k_3$  là nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính sau:

$$\begin{aligned}H_{30}^9 k_1 + H_{31}^9 k_2 + H_{32}^9 k_3 &= -H_{10,1}^9, \\ H_{30}^{10} k_1 + H_{31}^{10} k_2 + H_{32}^{10} k_3 &= -H_{10,1}^{10}, \\ H_{30}^{11} k_1 + H_{31}^{11} k_2 + H_{32}^{11} k_3 &= -H_{10,1}^{11}.\end{aligned}$$

Nghiệm riêng thứ nhất tương ứng với dịch chuyển của vỏ như vật rắn tuyệt đối dọc theo trục đối xứng. Còn nghiệm riêng thứ hai tương ứng với biến dạng kéo-nén dọc trục của vỏ như đối với thanh.

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất (3.14) thu được dưới dạng

$$\begin{aligned}\bar{U}_{00} &= C_{13} + C_{14} \xi + \det(\mathbf{D})_{15} \bar{F}(\xi), \quad \bar{U}_{10} = \det(\mathbf{D})_{25} \bar{F}(\xi), \\ \bar{U}_{20} &= \det(\mathbf{D})_{35} \bar{F}(\xi), \quad \bar{U}_{30} = \det(\mathbf{D})_{45} \bar{F}(\xi), \\ \bar{W}_{00} &= C_{14} k_1 + \det(\mathbf{D})_{55} \bar{F}(\xi), \quad \bar{W}_{10} = C_{14} k_2 + \det(\mathbf{D})_{65} \bar{F}(\xi), \\ \bar{W}_{20} &= C_{14} k_3 + \det(\mathbf{D})_{75} \bar{F}(\xi).\end{aligned}\tag{3.19}$$

### 3.3.2. Điều kiện biên

Trong mục này, thực hiện cụ thể hóa các điều kiện biên tương ứng với các phương trình (3.4), (3.5) trong nghiên cứu vỏ chịu tải trọng đối xứng trục



Đối với biên ngàm chặt tại đầu  $\xi = 0$  hoặc  $\xi = L/R$ :

$$\begin{aligned} U_{00}(\xi) = U_{10}(\xi) = U_{20}(\xi) = U_{30}(\xi) = 0, \\ W_{00}(\xi) = W_{10}(\xi) = W_{20}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Đối với biên gối tựa tại  $\xi = 0$  hoặc  $\xi = L/R$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}U_{00}(\xi) = \frac{d}{d\xi}U_{10}(\xi) = \frac{d}{d\xi}U_{20}(\xi) = \frac{d}{d\xi}U_{30}(\xi) = 0, \\ W_{00}(\xi) = W_{10}(\xi) = W_{20}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Đối với biên tự do tại  $\xi = 0$  hoặc  $\xi = L/R$ , có các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} N_\xi = 0: & G_{10}^1 \frac{d}{d\xi}U_{00}(\xi) + G_{11}^1 \frac{d}{d\xi}U_{10}(\xi) + G_{12}^1 \frac{d}{d\xi}U_{20}(\xi) + \\ & + G_{13}^1 \frac{d}{d\xi}U_{30}(\xi) + G_{30}^1 W_{00}(\xi) + G_{31}^1 W_{10}(\xi) + G_{32}^1 W_{20}(\xi) = 0, \\ M_\xi = 0: & G_{10}^2 \frac{d}{d\xi}U_{00}(\xi) + G_{11}^2 \frac{d}{d\xi}U_{10}(\xi) + G_{12}^2 \frac{d}{d\xi}U_{20}(\xi) + \\ & + G_{13}^2 \frac{d}{d\xi}U_{30}(\xi) + G_{30}^2 W_{00}(\xi) + G_{31}^2 W_{10}(\xi) + G_{32}^2 W_{20}(\xi) = 0, \\ N_\xi^* = 0: & G_{10}^3 \frac{d}{d\xi}U_{00}(\xi) + G_{11}^3 \frac{d}{d\xi}U_{10}(\xi) + G_{12}^3 \frac{d}{d\xi}U_{20}(\xi) + \\ & + G_{13}^3 \frac{d}{d\xi}U_{30}(\xi) + G_{30}^3 W_{00}(\xi) + G_{31}^3 W_{10}(\xi) + G_{32}^3 W_{20}(\xi) = 0, \\ M_\xi^* = 0: & G_{10}^4 \frac{d}{d\xi}U_{00}(\xi) + G_{11}^4 \frac{d}{d\xi}U_{10}(\xi) + G_{12}^4 \frac{d}{d\xi}U_{20}(\xi) + \\ & + G_{13}^4 \frac{d}{d\xi}U_{30}(\xi) + G_{30}^4 W_{00}(\xi) + G_{31}^4 W_{10}(\xi) + G_{32}^4 W_{20}(\xi) = 0, \\ Q_\xi = 0: & G_{10}^5 \frac{d}{d\xi}U_{00}(\xi) + G_{11}^5 \frac{d}{d\xi}U_{10}(\xi) + G_{12}^5 \frac{d}{d\xi}U_{20}(\xi) + \\ & + G_{13}^5 \frac{d}{d\xi}U_{30}(\xi) + G_{30}^5 W_{00}(\xi) + G_{31}^5 W_{10}(\xi) + G_{32}^5 W_{20}(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$S_\xi = 0: G_{10}^6 \frac{d}{d\xi} U_{00}(\xi) + G_{11}^6 \frac{d}{d\xi} U_{10}(\xi) + G_{12}^6 \frac{d}{d\xi} U_{20}(\xi) + \\ + G_{13}^6 \frac{d}{d\xi} U_{30}(\xi) + G_{30}^6 W_{00}(\xi) + G_{31}^6 W_{10}(\xi) + G_{32}^6 W_{20}(\xi) = 0,$$

$$Q_\xi^* = 0: G_{10}^7 \frac{d}{d\xi} U_{00}(\xi) + G_{11}^7 \frac{d}{d\xi} U_{10}(\xi) + G_{12}^7 \frac{d}{d\xi} U_{20}(\xi) + \\ + G_{13}^7 \frac{d}{d\xi} U_{30}(\xi) + G_{30}^7 W_{00}(\xi) + G_{31}^7 W_{10}(\xi) + G_{32}^7 W_{20}(\xi) = 0.$$

Các hệ số  $G_{ij}^k$  nhận được trực tiếp từ các biểu thức xác định các thành phần nội lực suy rộng tương ứng.

### 3.3.3. Xác định nghiệm riêng ứng với các dạng tải trọng cục bộ đối xứng trục khác nhau

Để xác định nghiệm riêng của hệ phương trình vi phân (3.4) và (3.5) sử dụng phép biến đổi Laplace. Ký hiệu hàm ảnh tương ứng với các hàm chuyển vị và tải trọng như sau:

$$\hat{U}_{00}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{U}_{00}(p), \hat{U}_{10}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{U}_{10}(p), \hat{U}_{20}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{U}_{20}(p), \hat{U}_{30}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{U}_{30}(p), \\ \hat{W}_{00}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{W}_{00}(p), \hat{W}_{10}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{W}_{10}(p), \hat{W}_{20}(\xi) \Leftrightarrow \tilde{W}_{20}(p), Q_0^\pm(\xi) \Leftrightarrow \tilde{Q}_0^\pm(p).$$

Theo quy tắc lấy vi phân hàm nguồn, có được:

$$\frac{d}{d\xi} \hat{U}_{00}(\xi) \Leftrightarrow p \tilde{U}_{00}(p) - C_{00}^1, \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{U}_{00}(\xi) \Leftrightarrow p^2 \tilde{U}_{00}(p) - p C_{00}^1 - C_{01}^1,$$

$$\frac{d}{d\xi} \hat{U}_{10}(\xi) \Leftrightarrow p \tilde{U}_{10}(p) - C_{10}^1, \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{U}_{10}(\xi) \Leftrightarrow p^2 \tilde{U}_{10}(p) - p C_{10}^1 - C_{11}^1,$$

$$\frac{d}{d\xi} \hat{U}_{20}(\xi) \Leftrightarrow p \tilde{U}_{20}(p) - C_{20}^1, \frac{d^2}{d\xi^2} \hat{U}_{20}(\xi) \Leftrightarrow p^2 \tilde{U}_{20}(p) - p C_{20}^1 - C_{21}^1,$$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{U}_{30}(\xi) \Leftrightarrow p\tilde{U}_{30}(p) - C_{30}^1, \quad \frac{d^2}{d\xi^2}\hat{U}_{30}(\xi) \Leftrightarrow p^2\tilde{U}_{30}(p) - pC_{30}^1 - C_{31}^1,$$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{W}_{00}(\xi) \Leftrightarrow p\tilde{W}_{00}(p) - C_{00}^3, \quad \frac{d^2}{d\xi^2}\hat{W}_{00}(\xi) \Leftrightarrow p^2\tilde{W}_{00}(p) - pC_{00}^3 - C_{01}^3,$$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{W}_{10}(\xi) \Leftrightarrow p\tilde{W}_{10}(p) - C_{10}^3, \quad \frac{d^2}{d\xi^2}\hat{W}_{10}(\xi) \Leftrightarrow p^2\tilde{W}_{10}(p) - pC_{10}^3 - C_{11}^3,$$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{W}_{20}(\xi) \Leftrightarrow p\tilde{W}_{20}(p) - C_{20}^3, \quad \frac{d^2}{d\xi^2}\hat{W}_{20}(\xi) \Leftrightarrow p^2\tilde{W}_{20}(p) - pC_{20}^3 - C_{21}^3.$$

ở đây, các hằng số  $C_{ij}^k$  là các hằng số tích phân và được xác định thông qua các điều kiện biên tại các biên. Tuy nhiên, do chỉ quan tâm tới nghiệm riêng của hệ phương trình vi phân (3.4), (3.5), nên có thể đặt các hằng số  $C_{ij}^k = 0$ .

Mặt khác, đối với các tải trọng nhiệt độ  $\Delta T_{o0}$  và  $\Delta T_{in0}$ , ta có phép biến đổi sau:

$$\Delta T_{o0} \Leftrightarrow \Delta T_{o0} / p, \quad \Delta T_{in0} \Leftrightarrow \Delta T_{in0} / p.$$

Khi đó, hệ phương trình (3.4), (3.5) trong phép biến đổi Laplace có dạng như sau:

$$\begin{aligned} & (H_{10}^l + H_{10,11}^l p^2)\tilde{U}_{00}(p) + (H_{11}^l + H_{11,11}^l p^2)\tilde{U}_{10}(p) + \\ & + (H_{12}^l + H_{12,11}^l p^2)\tilde{U}_{20}(p) + (H_{13}^l + H_{13,11}^l p^2)\tilde{U}_{30}(p) + \\ & + H_{30,1}^l p\tilde{W}_{00}(p) + H_{31,1}^l p\tilde{W}_{10}(p) + H_{32,1}^l p\tilde{W}_{20}(p) = 0, \quad l = 1 \div 4, \\ & (H_{30}^j + H_{30,11}^j p^2)\tilde{W}_{00}(p) + (H_{31}^j + H_{31,11}^j p^2)\tilde{W}_{10}(p) + \\ & + (H_{32}^j + H_{32,11}^j p^2)\tilde{W}_{20}(p) + H_{10,1}^j p\tilde{U}_{00}(p) + H_{11,1}^j p\tilde{U}_{10}(p) + \\ & + H_{12,1}^j p\tilde{U}_{20}(p) + H_{13,1}^j p\tilde{U}_{30}(p) + \\ & = H_4^j \tilde{Q}_0^+(p) + H_5^j \tilde{Q}_0^-(p) + \frac{H_{To}^j \Delta T_{o0} + H_{Tin}^j \Delta T_{in0}}{p}, \quad j = 9 \div 11. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Do hệ phương trình (3.23) là hệ phương trình đại số tuyến tính, nên nghiệm của nó có thể tìm được bằng tổng các nghiệm thành phần tương ứng với từng dạng tải trọng ở vế phải. Vì vậy, trong phần tiếp theo của mục này, luận án sẽ trình bày kết quả xác định nghiệm riêng tương ứng với một số dạng tải trọng hay gặp trong thực tế tính toán. Không mất tính tổng quát, có thể đặt biểu thức tải trọng ở vế phải của hệ (3.23) ứng với ba phương trình cuối tương ứng là  $H_q^9 \tilde{Q}(p)$ ,  $H_q^{10} \tilde{Q}(p)$  và  $H_q^{11} \tilde{Q}(p)$ .

Biểu thức nghiệm của các hàm ảnh  $\tilde{U}_{i_0}(p)$  và  $\tilde{W}_{j_0}(p)$  có dạng phân thức theo  $p$ , cụ thể như sau :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{00}(p) &= \tilde{Q}(p) \frac{\sum_{i=0}^5 f_{U_{00}}^i p^{2i}}{pG(p)}, \quad \tilde{U}_{10}(p) = \tilde{Q}(p) \frac{p \sum_{i=0}^4 f_{U_{10}}^i p^{2i}}{G(p)}, \\ \tilde{U}_{20}(p) &= \tilde{Q}(p) \frac{p \sum_{i=0}^4 f_{U_{20}}^i p^{2i}}{G(p)}, \quad \tilde{U}_{30}(p) = \tilde{Q}(p) \frac{p \sum_{i=0}^4 f_{U_{30}}^i p^{2i}}{G(p)}, \quad (3.24) \\ \tilde{W}_{00}(p) &= \tilde{Q}(p) \frac{\sum_{i=0}^5 f_{W_{00}}^i p^{2i}}{G(p)}, \quad \tilde{W}_{10}(p) = \tilde{Q}(p) \frac{\sum_{i=0}^5 f_{W_{10}}^i p^{2i}}{G(p)}, \\ \tilde{W}_{20}(p) &= \tilde{Q}(p) \frac{\sum_{i=0}^5 f_{W_{20}}^i p^{2i}}{G(p)}. \end{aligned}$$

Trong đó, các hệ số  $f_{U,W}^i$  là các hằng số phụ thuộc vào các tham số hình học vỏ và cơ tính của vật liệu, đa thức  $G(p)$  được xác định từ biểu thức (3.17). Do  $G(p)$  có thể phân tích được dưới dạng tích của các tam thức bậc hai (3.18), nên biểu thức xác định các hàm ảnh  $\tilde{U}_{i_0}(p)$ ,  $\tilde{W}_{j_0}(p)$  có thể phân tích thành dạng sau:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{00}(p) &= \tilde{Q}(p) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa_{U_{00}}^{0i} + \kappa_{U_{00}}^{1i} p + \kappa_{U_{00}}^{2i} p^2 + \kappa_{U_{00}}^{3i} p^3}{\left[ (p-p_i)^2 + q_i^2 \right] \left[ (p+p_i)^2 + q_i^2 \right]} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=3}^4 \frac{\kappa_{U_{00}}^{0i} + \kappa_{U_{00}}^{1i} p}{p^2 - p_i^2} + \frac{\kappa_{U_{00}}^{05}}{p} \right\}, \\
\tilde{U}_{k0}(p) &= p \tilde{Q}(p) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa_{U_{k0}}^{0i} + \kappa_{U_{k0}}^{1i} p + \kappa_{U_{k0}}^{2i} p^2 + \kappa_{U_{k0}}^{3i} p^3}{\left[ (p-p_i)^2 + q_i^2 \right] \left[ (p+p_i)^2 + q_i^2 \right]} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=3}^4 \frac{\kappa_{U_{k0}}^{0i} + \kappa_{U_{k0}}^{1i} p}{p^2 - p_i^2} \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \\
\tilde{W}_{l0}(p) &= \tilde{Q}(p) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{\kappa_{W_{l0}}^{0i} + \kappa_{W_{l0}}^{1i} p + \kappa_{W_{l0}}^{2i} p^2 + \kappa_{W_{l0}}^{3i} p^3}{\left[ (p-p_i)^2 + q_i^2 \right] \left[ (p+p_i)^2 + q_i^2 \right]} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=3}^4 \frac{\kappa_{W_{l0}}^{0i} + \kappa_{W_{l0}}^{1i} p}{p^2 - p_i^2} \right\}, \quad l = 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

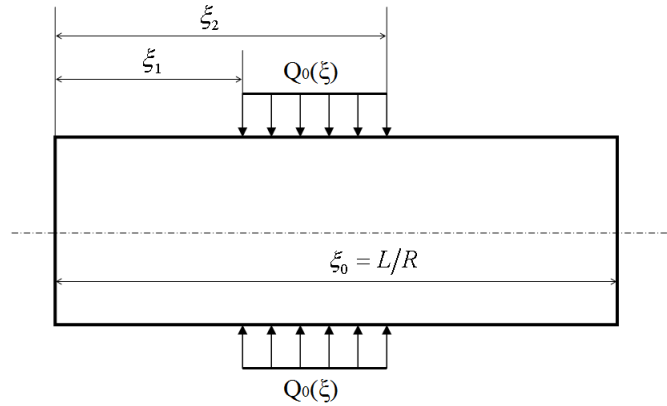
Các hệ số  $\kappa_{U,W}^{ij}$  trong các biểu thức nêu trên tìm được bằng cách đồng nhất các hệ số của đa thức theo  $p$  nằm trên tử số của (3.24) và (3.25). Các phân thức trong (3.25) là các hàm chuẩn có thể xác định được hàm nguồn thông qua phép biến đổi Laplace ngược. Do vậy, việc phân tích hàm ảnh dưới dạng tổng các phân thức dạng (3.25), cho phép tìm được biểu thức nghiệm riêng đối với các thành phần chuyển vị dưới dạng tường minh. Dưới đây, thực hiện trình bày kết quả xác định nghiệm riêng đối với các thành phần chuyển vị tương ứng với một số dạng tải trọng hay gập trong thực tế.

*a) Tải trọng cục bộ hướng tâm phân bố đều trên một đoạn*

Xét vỏ trụ FGM dưới tác dụng của tải trọng cục bộ phân bố đều trên một đoạn được biểu diễn như Hình 3.1. Quy luật biến đổi của tải trọng xác định như sau:

$$Q(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{khi } 0 \leq \xi < \xi_1, \\ Q_0, & \text{khi } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ 0, & \text{khi } \xi_2 < \xi \leq \xi_0. \end{cases} \quad (3.26)$$

ở đây,  $\xi_0$  biểu thị độ dài tương đối của vỏ, được xác định bởi biểu thức  $\xi_0 = L/R$ , trong đó  $L$  là chiều dài của vỏ.



Hình 3.1. Vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm phân bố đều trên một đoạn  
Hàm ảnh của tải trọng nêu trên được xác định bởi biểu thức:

$$\tilde{Q}(p) = Q_0 \frac{e^{-p\xi_1} - e^{-p\xi_2}}{p}. \quad (3.27)$$

Thay (3.27) vào (3.25) và thực hiện phép biến đổi Laplace ngược, ta có:

$$U_{00}(\xi) = Q_0 \sum_{j=1}^2 \left[ (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{U_{00}}^{1i} (Z_{1i}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{U_{00}}^{2i} Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{U_{00}}^{3i} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{U_{00}}^{4i} Z_{4i}(\xi, \xi_j) \right] + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{4\kappa_{U_{00}}^{0i}}{p_i^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sinh^2 \frac{p_i(\xi - \xi_j)}{2} + \frac{2\kappa_{U_{00}}^{1i}}{p_i} \sinh p_i(\xi - \xi_j) \right\rangle + 2\kappa_{U_{00}}^{03}(\xi - \xi_j) \right\} \right],$$

$$\begin{aligned}
U_{k_0}(\xi) &= Q_0 \sum_{j=1}^2 \left[ (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)} \left[ \gamma_{U_{k_0}}^{1i} Z_{1i}(\xi, \xi_j) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \gamma_{U_{k_0}}^{2i} Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \gamma_{U_{k_0}}^{3i} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \gamma_{U_{k_0}}^{4i} Z_{4i}(\xi, \xi_j) \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{\kappa_{U_{k_0}}^{0i}}{p_i} \sinh \left[ p_i (\xi - \xi_j) \right] + \kappa_{U_{k_0}}^{1i} \cosh \left[ p_i (\xi - \xi_j) \right] \right\rangle \right\} \right], \quad k=1,2,3, \\
W_{l_0}(\xi) &= Q_0 \sum_{j=1}^2 \left[ (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{W_{l_0}}^{1i} (Z_{1i}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{W_{l_0}}^{2i} Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{W_{l_0}}^{3i} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{W_{l_0}}^{4i} Z_{4i}(\xi, \xi_j) \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{4\kappa_{W_{l_0}}^{0i}}{p_i^2} \sinh^2 \frac{p_i (\xi - \xi_j)}{2} + \frac{2\kappa_{W_{l_0}}^{1i}}{p_i} \sinh p_i (\xi - \xi_j) \right\rangle \right\} \right], \quad l=0,1,2.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Trong đó  $\eta(\xi - \xi_j)$  là hàm Heaviside và có các ký hiệu sau:

$$\begin{aligned}
Z_{1i}(\xi, \tilde{\xi}) &= \cosh(p_i(\xi - \tilde{\xi})) \cos(q_i(\xi - \tilde{\xi})), \\
Z_{2i}(\xi, \tilde{\xi}) &= \cosh(p_i(\xi - \tilde{\xi})) \sin(q_i(\xi - \tilde{\xi})), \\
Z_{3i}(\xi, \tilde{\xi}) &= \sinh(p_i(\xi - \tilde{\xi})) \cos(q_i(\xi - \tilde{\xi})), \\
Z_{4i}(\xi, \tilde{\xi}) &= \sinh(p_i(\xi - \tilde{\xi})) \sin(q_i(\xi - \tilde{\xi})).
\end{aligned}$$

Các hệ số  $\mathcal{G}$  và  $\gamma$  với các chỉ số chữ và số trong biểu thức (3.28) được xác định bởi các công thức

$$\begin{aligned}
\gamma_{U_{k_0}}^{1i} &= 2\kappa_{U_{k_0}}^{3i} p_i q_i (p_i^2 + q_i^2), \quad \gamma_{U_{k_0}}^{2i} = p_i \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2) + \kappa_{U_{k_0}}^{0i} \right], \\
\gamma_{U_{k_0}}^{3i} &= q_i \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2) - \kappa_{U_{k_0}}^{0i} \right], \quad \gamma_{U_{k_0}}^{4i} = (p_i^2 + q_i^2) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{3i} (p_i^2 - q_i^2) + \kappa_{U_{k_0}}^{1i} \right], \\
\mathcal{G}_{U_{00}, W_{l_0}}^{2i} &= p_i (p_i^2 + q_i^2) \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2) + \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{1i} \right], \quad \mathcal{G}_{U_{00}, W_{l_0}}^{1i} = -2\kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{0i} p_i q_i,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{U_{00}, W_{l0}}^{3i} = q_i (p_i^2 + q_i^2) \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2) - \kappa_{U_{00}, W_{l0}}^{1i} \right],$$

$$\mathcal{G}_{U_{00}, W_{l0}}^{4i} = \kappa_{U_{00}, W_{l0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{00}, W_{l0}}^{0i} (p_i^2 - q_i^2), \quad i=1,2, \quad l=0,1,2, \quad k=1,2,3.$$

Biểu thức (3.28) cho phép xác định nghiệm cụ thể cho bất kỳ vị trí của tải và cho độ lớn của tải. Thế vào biểu thức (3.28)  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = \xi_0$ , ta có được nghiệm riêng khi tải tác động lên toàn bộ bề mặt của vỏ

$$\begin{aligned} U_{00}(\xi) = Q_0 \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{U_{00}}^{1i} (Z_{1i}(\xi, 0) - 1) + \mathcal{G}_{U_{00}}^{2i} Z_{2i}(\xi, 0) + \right. \right. \\ \left. \left. + Z_{3i}(\xi, 0) \mathcal{G}_{U_{00}}^{3i} + \mathcal{G}_{U_{00}}^{4i} Z_{4i}(\xi, 0) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{4\kappa_{U_{00}}^{0i}}{p_i^2} \sinh^2(p_i \xi / 2) + \frac{2\kappa_{U_{00}}^{1i}}{p_i} \sinh p_i \xi \right\rangle + 2\kappa_{U_{00}}^{03} \xi \right\}, \quad (3.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{k0}(\xi) = Q_0 \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)} \left[ \gamma_{U_{k0}}^{1i} Z_{1i}(\xi, 0) + \gamma_{U_{k0}}^{2i} Z_{2i}(\xi, 0) + \gamma_{U_{k0}}^{3i} Z_{3i}(\xi, 0) + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{U_{k0}}^{4i} Z_{4i}(\xi, 0) \right] + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{\kappa_{U_{k0}}^{0i}}{p_i} \sinh p_i \xi + \kappa_{U_{k0}}^{1i} \cosh p_i \xi \right\rangle \right\}, \quad k=1,2,3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{l0}(\xi) = Q_0 \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2} \left[ \mathcal{G}_{W_{l0}}^{1i} (Z_{1i}(\xi, 0) - 1) + \mathcal{G}_{W_{l0}}^{2i} Z_{2i}(\xi, 0) + \mathcal{G}_{W_{l0}}^{3i} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times Z_{3i}(\xi, 0) + \mathcal{G}_{W_{l0}}^{4i} Z_{4i}(\xi, 0) \right] + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{4\kappa_{W_{l0}}^{0i}}{p_i^2} \sinh^2 \frac{p_i \xi}{2} + \frac{2\kappa_{W_{l0}}^{1i}}{p_i} \sinh p_i \xi \right\rangle \right\}, \quad l=0,1,2. \end{aligned}$$

Trong công trình này, luận án chỉ giới hạn nghiên cứu nhiệt độ phân bố đều trên toàn bộ bề mặt vỏ, nên công thức (3.29) cũng được dùng để xác định các nghiệm riêng tương ứng với từng thành phần nhiệt độ  $\Delta T_{o0}$ ,  $\Delta T_{in0}$ .



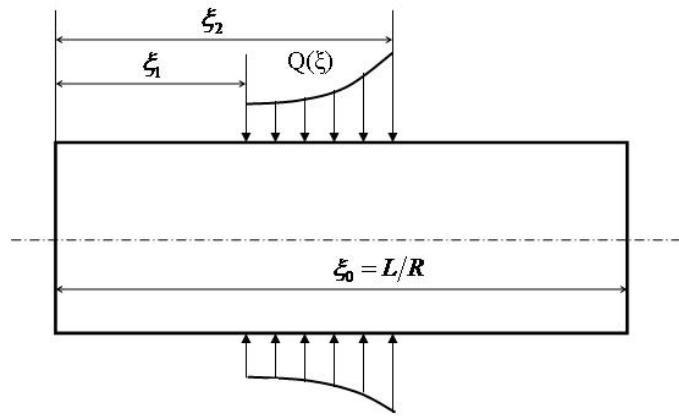
b) Tải trọng cục bộ hướng tâm phân bố theo quy luật hàm đa thức bậc hai

Xét vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm thay đổi dọc trục theo quy luật hàm tam thức bậc hai (Hình 3.2). Biểu thức xác định tải trọng như sau:

$$Q(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{khi } 0 \leq \xi < \xi_1, \\ Q_2 \xi^2 + Q_1 \xi + Q_0, & \text{khi } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ 0, & \text{khi } \xi_2 < \xi \leq \xi_0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Hàm ảnh của tải trọng nêu trên được xác định bởi biểu thức

$$\tilde{Q}(p) = \left( \frac{Q_0}{p} + \frac{Q_1}{p^2} + \frac{Q_2}{p^3} \right) (e^{-p\xi_1} - e^{-p\xi_2}). \quad (3.31)$$



Hình 3.2. Vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm theo quy luật hàm tam thức bậc hai

Thay (3.31) vào (3.25) và chuyển hệ phương trình nhận được từ hàm ảnh về hàm nguồn, ta được nghiệm riêng sau:

$$U_{00}(\xi) = \sum_{j=1}^2 \left[ (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \right] \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^4} \left[ \zeta_{U_{00}}^{1ij} Z_{1i}(\xi, \xi_j) + \zeta_{U_{00}}^{2ij} Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \zeta_{U_{00}}^{3ij} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \zeta_{U_{00}}^{4ij} Z_{4i}(\xi, \xi_j) + 2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2 Z_{5i0}(\xi) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& +8p_i q_i (p_i^2 - q_i^2) \kappa_{U_{00}}^{0i} Q_2 \Big] + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{2\kappa_{U_{00}}^{0i} Q_2}{p_i^4} \left[ \cosh p_i (\xi - \xi_j) - 1 \right] + \frac{1}{p_i^3} \times \right. \\
& \times \sinh p_i (\xi - \xi_j) \left[ \kappa_{U_{00}}^{0i} (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) + \kappa_{U_{00}}^{1i} p_i^2 (Q_0 + Q_1 \xi_j + Q_2 \xi_j^2) + 2\kappa_{U_{00}}^{1i} Q_2 \right] + \\
& + \frac{1}{p_i^2} \left[ 2 \sinh^2 \frac{p_i (\xi - \xi_j)}{2} \left\{ \kappa_{U_{00}}^{0i} (Q_0 + Q_1 \xi_j + Q_2 \xi_j^2) + \kappa_{U_{00}}^{1i} (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) \right\} - \right. \\
& \left. - (\xi - \xi_j) \left\{ \kappa_{U_{00}}^{0i} [Q_1 + Q_2 (\xi + \xi_j)] + 2\kappa_{U_{00}}^{1i} Q_2 \right\} \right] \Bigg\rangle + \\
& + \frac{\kappa_{U_{00}}^{05} (\xi - \xi_j)}{6} \left[ 6Q_0 + 3Q_1 (\xi + \xi_j) + 2Q_2 (\xi^2 + \xi_j \xi + \xi_j^2) \right] \Bigg\} \Bigg\|, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{k0}(\xi) = & \sum_{j=1}^2 \left\| (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^3} \left[ t_{U_{k0}}^{1ij} Z_{1i}(\xi, \xi_j) + t_{U_{k0}}^{2ij} \times \right. \right. \right. \\
& \times Z_{2i}(\xi, \xi_j) + t_{U_{k0}}^{3ij} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + t_{U_{k0}}^{4ij} Z_{4i}(\xi, \xi_j) + 2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2) \times \\
& \left. \left. \left. \times (2\kappa_{U_{k0}}^{1i} Q_2 + \kappa_{U_{k0}}^{0i} (Q_1 + 2Q_2 \xi)) \right] + \sum_{i=3}^4 \left\langle \kappa_{U_{k0}}^{1i} (Q_0 + Q_1 \xi_j + Q_2 \xi_j^2) \cosh p_i (\xi - \xi_j) + \right. \right. \right. \\
& + \frac{\sinh p_i (\xi - \xi_j)}{p_i^3} \left[ \kappa_{U_{k0}}^{1i} p_i^2 (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) + \kappa_{U_{k0}}^{0i} (2Q_2 + p_i^2 (Q_0 + Q_1 \xi_j + Q_2 \xi_j^2)) \right] + \\
& \left. \left. \left. + \frac{2}{p_i^2} \left[ \sinh \left( \frac{p_i (\xi - \xi_j)}{2} \right)^2 (2\kappa_{U_{k0}}^{1i} Q_2 + \kappa_{U_{k0}}^{0i} (Q_1 + 2Q_2 \xi_j)) - \kappa_{U_{k0}}^{0i} Q_2 (\xi - \xi_j) \right] \right] \right\} \right\|, \\
& k = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{10}(\xi) = & \sum_{j=1}^2 \left\| (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^4} \left[ \zeta_{W_{10}}^{1ij} Z_{1i}(\xi, \xi_j) + \zeta_{W_{10}}^{2ij} \times \right. \right. \right. \\
& \times Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \zeta_{W_{10}}^{3ij} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \zeta_{W_{10}}^{4ij} Z_{4i}(\xi, \xi_j) + 2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2 Z_{6il}(\xi) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +8p_i q_i (p_i^2 - q_i^2) \kappa_{W_{l_0}}^{0i} Q_2 \Big] + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{2\kappa_{W_{l_0}}^{0i} Q_2}{p_i^4} \left[ \cosh p_i (\xi - \xi_j) - 1 \right] + \frac{1}{p_i^3} \times \right. \\
& \times \sinh p_i (\xi - \xi_j) \left[ \kappa_{W_{l_0}}^{0i} (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) + \kappa_{W_{l_0}}^{1i} p_i^2 (Q_0 + Q_1 \xi_j + Q_2 \xi_j^2) + 2\kappa_{W_{l_0}}^{1i} Q_2 \right] + \\
& + \frac{1}{p_i^2} \left[ 2 \sinh^2 \frac{p_i (\xi - \xi_j)}{2} \left\{ \kappa_{W_{l_0}}^{0i} (Q_0 + Q_1 \xi_j + Q_2 \xi_j^2) + \kappa_{W_{l_0}}^{1i} (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) \right\} - \right. \\
& \left. - (\xi - \xi_j) \left\{ \kappa_{W_{l_0}}^{0i} [Q_1 + Q_2 (\xi + \xi_j)] + 2\kappa_{W_{l_0}}^{1i} Q_2 \right\} \right] \Bigg], \quad l = 0, 1, 2,
\end{aligned}$$

ở đây, sử dụng các ký hiệu sau:

$$\begin{aligned}
Z_{5is}(\xi) &= \kappa_{U_{s_0}}^{0i} (Q_2 \xi^2 + Q_1 \xi + Q_0) + \kappa_{U_{s_0}}^{1i} (2Q_2 \xi + Q_1) + 2\kappa_{U_{s_0}}^{2i} Q_2, \\
Z_{6il}(\xi) &= \kappa_{W_{l_0}}^{0i} (Q_2 \xi^2 + Q_1 \xi + Q_0) + \kappa_{W_{l_0}}^{1i} (2Q_2 \xi + Q_1) + 2\kappa_{W_{l_0}}^{2i} Q_2, \\
\zeta_{U_{00}, W_{l_0}}^{1ij} &= -2p_i q_i \left\{ (p_i^2 + q_i^2)^2 \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{0i} (Q_2 \xi_j^2 + Q_1 \xi_j + Q_0) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{1i} (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) + 2\kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{2i} Q_2 \right] + 4\kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{0i} Q_2 (p_i^2 - q_i^2) \right\}, \\
\zeta_{U_{00}, W_{l_0}}^{2ij} &= \left[ (p_i^2 + q_i^2)^2 \left\{ (Q_2 \xi_j^2 + Q_1 \xi_j + Q_0) \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{1i} + \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{2i} Q_2 \right\} + \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{0i} (p_i^2 - 3q_i^2) (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) + \right. \\
& \left. + 2Q_2 \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{1i} (p_i^2 - 3q_i^2) \right] \right] p_i (p_i^2 + q_i^2)^2, \\
\zeta_{U_{00}, W_{l_0}}^{3ij} &= q_i (p_i^2 + q_i^2) \left\{ (p_i^2 + q_i^2)^2 (Q_2 \xi_j^2 + Q_1 \xi_j + Q_0) \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{1i} \right] - \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{0i} (3p_i^2 - q_i^2) + \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2)^2 \right] (Q_1 + 2Q_2 \xi_j) - \right. \\
& \left. - 2Q_2 \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{1i} (3p_i^2 - q_i^2) \right] \right\}, \\
\zeta_{U_{00}, W_{l_0}}^{4ij} &= (p_i^2 + q_i^2)^2 \left\{ (Q_2 \xi_j^2 + Q_1 \xi_j + Q_0) \left[ \kappa_{U_{00}, W_{l_0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\kappa_{U_{00},W_{10}}^{0i} (p_i^2 - q_i^2)] + \left[ \kappa_{U_{00},W_{10}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{00},W_{10}}^{1i} (p_i^2 - q_i^2) \right] (Q_1 + 2Q_2\xi_j) \Big\} + \\
& + 2Q_2 \left\{ \kappa_{U_{00},W_{10}}^{0i} \left[ (p_i^2 - q_i^2)^2 - 4p_i^2q_i^2 \right] + \kappa_{U_{00},W_{10}}^{2i} (p_i^2 - q_i^2)(p_i^2 + q_i^2)^2 \right\}, \\
t_{U_{k0}}^{1ij} & = 2p_iq_i(p_i^2 + q_i^2) \left[ \kappa_{U_{k0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2)^2 (Q_2\xi_j^2 + Q_1\xi_j + Q_0) - 2\kappa_{U_{k0}}^{1i} Q_2 - \right. \\
& \quad \left. - \kappa_{U_{k0}}^{0i} (Q_1 + 2Q_2\xi_j) \right], \\
t_{U_{k0}}^{2ij} & = p_i \left\{ (p_i^2 + q_i^2)^2 \left[ \kappa_{U_{k0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2) + \kappa_{U_{k0}}^{1i} \right] (2Q_2\xi_j + Q_1) + \right. \\
& \quad (Q_2\xi_j^2 + Q_1\xi_j + Q_0) \left[ \kappa_{U_{k0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2) + \kappa_{U_{k0}}^{0i} \right] \Big\} + \\
& \quad + 2Q_2 \left[ \kappa_{U_{k0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{k0}}^{0i} (p_i^2 - 3q_i^2) \right] \Big\}, \\
t_{U_{k0}}^{3ij} & = q_i \left\{ (p_i^2 + q_i^2)^2 \left[ \kappa_{U_{k0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2) - \kappa_{U_{k0}}^{1i} \right] (2Q_2\xi_j + Q_1) + \right. \\
& \quad + (Q_2\xi_j^2 + Q_1\xi_j + Q_0) \left[ \kappa_{U_{k0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2) - \kappa_{U_{k0}}^{0i} \right] \Big\} - \\
& \quad - 2Q_2 \left[ \kappa_{U_{k0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{k0}}^{0i} (3p_i^2 - q_i^2) \right] \Big\}, \\
t_{U_{k0}}^{4ij} & = (p_i^2 + q_i^2) \left\{ (p_i^2 + q_i^2)^2 \left[ \kappa_{U_{k0}}^{3i} (p_i^2 - q_i^2) + \kappa_{U_{k0}}^{1i} \right] (Q_2\xi_j^2 + Q_1\xi_j + Q_0) + \right. \\
& \quad + \left[ \kappa_{U_{k0}}^{2i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{k0}}^{0i} (p_i^2 - q_i^2) \right] (2Q_2\xi_j + Q_1) + \\
& \quad \left. + 2Q_2 \left[ \kappa_{U_{k0}}^{3i} (p_i^2 + q_i^2)^2 + \kappa_{U_{k0}}^{1i} (p_i^2 - q_i^2) \right] \right\}, \\
& \quad i = \overline{1,2}, \quad j = \overline{1,2}, \quad l = \overline{0,1,2}, \quad k = \overline{1,2,3}.
\end{aligned}$$

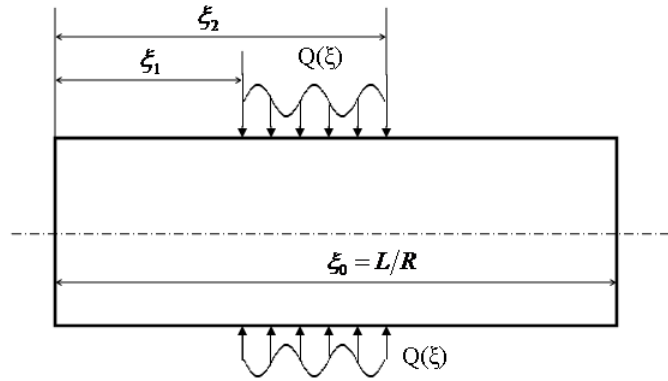
c) Tải trọng cục bộ hướng tâm phân bố theo quy luật hàm sin

Xét vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm thay đổi dọc trục theo quy luật hàm sin (Hình 3.3). Quy luật biến thiên tải trọng được xác định theo công thức (3.33).

$$Q_{33}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{khi } 0 \leq \xi < \xi_1, \\ Q_0 \sin n(\xi + \tau), & \text{khi } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ 0, & \text{khi } \xi_2 < \xi \leq \xi_0 = L/R. \end{cases} \quad (3.33)$$

ở đây, hàm ảnh của tải trọng (3.33) được xác định theo biểu thức (3.34)

$$\tilde{Q}(p) = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{Q_0 e^{-p\xi_j}}{p^2 + n^2} \left[ n \cos(n(\tau + \xi_j)) + p \sin(n(\tau + \xi_j)) \right] \quad (3.34)$$



Hình 3.3. Vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ hướng tâm theo quy luật hàm sin

Thay thế (3.34) vào (3.25) và chuyển hệ phương trình nhận được từ hàm ảnh về hàm nguồn, ta được nghiệm riêng sau:

$$\begin{aligned} U_{00}(\xi) = & Q_0 \sum_{j=1}^2 \left[ (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2) \left[ (n^2 + p_i^2 + q_i^2)^2 - 4n^2 q_i^2 \right]} \right\} \times \right. \\ & \times \left[ Z_{1i}(\xi, \xi_j) \psi_{U_{00}}^{1ij} + Z_{2i}(\xi, \xi_j) \psi_{U_{00}}^{2ij} + Z_{3i}(\xi, \xi_j) \psi_{U_{00}}^{3ij} + Z_{4i}(\xi, \xi_j) \psi_{U_{00}}^{4ij} - \right. \\ & \left. \left. - \psi_{U_{00}}^{1ij} \cos(n(\xi - \xi_j)) + \psi_{U_{00}}^{5ij} \sin(n(\xi - \xi_j)) \right] + \right. \\ & + \sum_{i=3}^4 \frac{1}{n^2 + p_i^2} \left\langle \cos n(\tau + \xi_j) \left[ Z_{7i}(\xi, \xi_j) \kappa_{U_{00}}^{0i} + \kappa_{U_{00}}^{1i} \frac{d}{d\xi} Z_{7i}(\xi, \xi_j) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\sin n(\tau + \xi_j)}{n} \left[ \kappa_{U_{00}}^{0i} \frac{d}{d\xi} Z_{7i}(\xi, \xi_j) + \frac{d^2}{d\xi^2} Z_{7i}(\xi, \xi_j) \kappa_{U_{00}}^{1i} \right] \right\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\kappa_{U_{00}}^{05}}{n} \left[ 2 \cos n(\tau + \xi_j) \sin^2 \frac{n}{2} (\xi - \xi_j) + \sin n(\tau + \xi_j) \sin n(\xi - \xi_j) \right] \Bigg] \Bigg], \\
U_{k0}(\xi) = & \mathcal{Q}_0 \sum_{j=1}^2 \left[ (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2p_i q_i \left[ (n^2 + p_i^2 + q_i^2)^2 - 4n^2 q_i^2 \right]} \right\} \times \right. \\
& \times \left[ Z_{1i}(\xi, \xi_j) \varphi_{U_{k0}}^{1ij} + Z_{2i}(\xi, \xi_j) \varphi_{U_{k0}}^{2ij} + Z_{3i}(\xi, \xi_j) \varphi_{U_{k0}}^{3ij} + Z_{4i}(\xi, \xi_j) \varphi_{U_{k0}}^{4ij} + \right. \\
& \quad + \cos n(\xi - \xi_j) 2n \left\langle n(n^2 \kappa_{U_{k0}}^{3i} - \kappa_{U_{k0}}^{1i}) \sin n(\tau + \xi_j) - \right. \\
& \quad \left. \left. - (n^2 \kappa_{U_{k0}}^{2i} - \kappa_{U_{k0}}^{0i}) \cos n(\tau + \xi_j) \right\rangle + \sin n(\xi - \xi_j) 2n \times \right. \\
& \quad \times \left. \left\langle n(n^2 \kappa_{U_{k0}}^{3i} - \kappa_{U_{k0}}^{1i}) \cos n(\tau + \xi_j) + (n^2 \kappa_{U_{k0}}^{2i} - \kappa_{U_{k0}}^{0i}) \sin n(\tau + \xi_j) \right\rangle \right] + \\
& + \sum_{i=3}^4 \frac{1}{n^2 + p_i^2} \left\langle n \cos n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k0}}^{0i} (\cosh p_i (\xi - \xi_j) - \cos n(\xi - \xi_j)) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \kappa_{U_{k0}}^{1i} (p_i \sinh p_i (\xi - \xi_j) + n \sin n(\xi - \xi_j)) \right] \right\rangle + \\
& \quad + \sin n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k0}}^{0i} (p_i \sinh p_i (\xi - \xi_j) + n \sin n(\xi - \xi_j)) + \right. \\
& \quad \left. + \kappa_{U_{k0}}^{1i} (p_i^2 \cosh p_i (\xi - \xi_j) + n^2 \cos n(\xi - \xi_j)) \right] \Bigg] \Bigg], \quad k = 1, 2, 3, \\
W_{l0}(\xi) = & \sum_{j=1}^2 \left[ (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2p_i q_i (p_i^2 + q_i^2) \left[ (n^2 + p_i^2 + q_i^2)^2 - 4n^2 q_i^2 \right]} \right\} \times \right. \\
& \times \left[ Z_{1i}(\xi, \xi_j) \psi_{W_{l0}}^{1ij} + Z_{2i}(\xi, \xi_j) \psi_{W_{l0}}^{2ij} + Z_{3i}(\xi, \xi_j) \psi_{W_{l0}}^{3ij} + Z_{4i}(\xi, \xi_j) \psi_{W_{l0}}^{4ij} - \right. \\
& \quad \left. - \psi_{W_{l0}}^{1ij} \cos(n(\xi - \xi_j)) + \psi_{W_{l0}}^{5ij} \sin(n(\xi - \xi_j)) \right] + \sum_{i=3}^4 \frac{1}{n^2 + p_i^2} \left\langle \cos n(\tau + \xi_j) \times \right. \\
& \quad \times \left[ Z_{7i}(\xi, \xi_j) \kappa_{W_{l0}}^{0i} + \kappa_{W_{l0}}^{1i} \frac{d}{d\xi} Z_{7i}(\xi, \xi_j) \right] + \frac{\sin n(\tau + \xi_j)}{n} \times
\end{aligned} \tag{3.35}$$



$$\begin{aligned}
& + \sin n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{3i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 + 2n^2(p_i^2 - q_i^2) \right\rangle + n^2 \kappa_{U_{k_0}}^{1i} \right], \\
\varphi_{U_{k_0}}^{2ij} & = p_i \left\{ n \cos n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{3i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 + n^2(p_i^2 - 3q_i^2) \right\rangle + \right. \right. \\
& + \kappa_{U_{k_0}}^{1i} (n^2 + p_i^2 + q_i^2) \left. \right] + \sin n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{2i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 + n^2(p_i^2 - 3q_i^2) \right\rangle + \right. \\
& \quad \left. \left. + \kappa_{U_{k_0}}^{0i} (n^2 + p_i^2 + q_i^2) \right] \right\}, \\
\varphi_{U_{k_0}}^{3ij} & = q_i \left\{ n \cos n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{3i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 + n^2(3p_i^2 - q_i^2) \right\rangle + \right. \right. \\
& + \kappa_{U_{k_0}}^{1i} (n^2 - p_i^2 - q_i^2) \left. \right] + \sin n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{2i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 + n^2(3p_i^2 - q_i^2) \right\rangle + \right. \\
& \quad \left. \left. + \kappa_{U_{k_0}}^{0i} (n^2 - p_i^2 - q_i^2) \right] \right\}, \\
\varphi_{U_{k_0}}^{4ij} & = n \cos n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{2i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 + n^2(p_i^2 - q_i^2) \right\rangle + \kappa_{U_{k_0}}^{0i} (n^2 + p_i^2 - q_i^2) \right] + \\
& + \sin n(\tau + \xi_j) \left[ \kappa_{U_{k_0}}^{1i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 + n^2(p_i^2 - q_i^2) \right\rangle + \right. \\
& \quad \left. + \kappa_{U_{k_0}}^{3i} \left\langle (p_i^2 + q_i^2)^2 (p_i^2 - q_i^2) + n^2 \left( (p_i^2 - q_i^2)^2 - 4p_i^2 q_i^2 \right) \right\rangle \right].
\end{aligned}$$

Kết hợp các nghiệm riêng (3.28), (3.29), (3.32), (3.35) với nghiệm thuần nhất (3.19) của hệ phương trình vi phân thuần nhất ta được biểu thức xác định các thành phần chuyên vị như sau:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{00} & = C_{13} + C_{14}\xi + \det(\mathbf{D})_{15} \bar{F}(\xi) + \hat{U}_{00}, \quad \bar{U}_{10} = \det(\mathbf{D})_{25} \bar{F}(\xi) + \hat{U}_{10}, \\
\bar{U}_{20} & = \det(\mathbf{D})_{35} \bar{F}(\xi) + \hat{U}_{20}, \quad \bar{U}_{30} = \det(\mathbf{D})_{45} \bar{F}(\xi) + \hat{U}_{30}, \\
\bar{W}_{00} & = C_{14}k_1 + \det(\mathbf{D})_{55} \bar{F}(\xi) + \hat{W}_{00}, \quad \bar{W}_{10} = C_{14}k_2 + \det(\mathbf{D})_{65} \bar{F}(\xi) + \hat{W}_{10}, \\
\bar{W}_{20} & = C_{14}k_3 + \det(\mathbf{D})_{75} \bar{F}(\xi) + \hat{W}_{20}, \tag{3.36}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bar{F}(\xi) = & (C_1 \sin q_1 \xi + C_2 \cos q_1 \xi) e^{-p_1 \xi} + (C_3 \sin q_1 \xi + C_4 \cos q_1 \xi) e^{p_1 \xi} + \\ & + (C_5 \sin q_2 \xi + C_6 \cos q_2 \xi) e^{-p_2 \xi} + (C_7 \sin q_2 \xi + C_8 \cos q_2 \xi) e^{p_2 \xi} + \\ & + C_9 e^{-p_3 \xi} + C_{10} e^{p_3 \xi} + C_{11} e^{-p_4 \xi} + C_{12} e^{p_4 \xi}. \end{aligned}$$

Các hằng số tích phân  $C_1 \div C_{14}$  được xác định từ các điều kiện biên (3.20), (3.21), (3.22) tương ứng. Việc áp dụng phép biến đổi Laplace trong giải bài toán biên theo hướng tiếp cận giải tích cho thấy, phương pháp nghiên cứu rất hiệu quả đối với trường hợp vỏ chịu tải trọng phân bố cục bộ. Trong trường hợp này, nếu sử dụng cách tiếp cận thông thường, ta phải sử dụng chuỗi xấp xỉ với số lượng phân tử lớn mới đạt được độ chính xác cho phép.

Cách tiếp cận đã trình bày ở trên đây có thể mở rộng cho trường hợp vỏ chịu tác dụng của tải trọng tập trung, tải trọng có các dạng phân bố khác nhau, với điều kiện có thể xác định được biểu thức tường minh của biểu thức nghiệm trong phép biến đổi Laplace ngược. Đồng thời, việc sử dụng công thức nghiệm (3.36) để xác định các thành phần chuyển vị có thể áp dụng cho các dạng điều kiện biên khác nhau.

### 3.4. Bài toán kiểm chứng

#### 3.4.1. Kiểm chứng cho bài toán vỏ chịu tải trọng cơ

##### a) So sánh với phương pháp phân tử hữu hạn bán giải tích

Xét vỏ trụ FGM hai đầu được ngâm chặt. Các tham số tính toán đầu vào được trình bày trong công trình [90] do Santos, Reddy và cộng sự thực hiện, cụ thể như sau: chiều dài  $L = 0.381$  m, bán kính  $R = 0.1905$  m, chiều dày  $h = 0.000501$  m; bề mặt trong là gốm (Zirconia) với  $\mu_c = 0.2980$ ,  $E_c = 168.06$  GPa, bề mặt ngoài là thép không gỉ (stainless steel) với  $\mu_m = 0.3178$ ,  $E_m = 207.79$  GPa; vỏ chịu tác dụng của áp suất ngoài đối xứng trục  $q^+ = 1000$  Pa. Trong Bảng 3.1 trình bày kết quả tính toán độ võng  $w$  (đơn vị là mét) tại vị trí giữa vỏ đối với mô hình lý thuyết hiện tại  $N_0 = 2$ ,  $N_0 = 3$ . Để so sánh kết quả tính toán, ta sử dụng các kết quả tương

ứng với mô hình phần tử hữu hạn bán giải tích “60 Elements”, “90 Elements” và “120 Elements” trình bày trong trích dẫn [90].

Bảng 3.1. Chuyển vị  $\bar{w} = w \times 10^7$  của vỏ trụ FGM ở vị trí giữa vỏ

$\eta$	60 Elements [90]	90 Elements [90]	120 Elements [90]	$N_0 = 2$	$N_0 = 3$
10	-3.864	-3.859	-3.857	-3.857	-3.856
5	-3.794	-3.789	-3.787	-3.787	-3.786
1	-3.511	-3.506	-3.504	-3.504	-3.504
1/4	-3.289	-3.284	-3.282	-3.282	-3.282
1/6	-3.249	-3.244	-3.243	-3.243	-3.243
1/8	-3.228	-3.223	-3.221	-3.221	-3.221

Phân tích các số liệu trình bày trong Bảng 3.1, cho thấy kết quả tính toán theo các mô hình cấp hai  $N_0 = 2$  và cấp ba  $N_0 = 3$  sử dụng trong bài báo này hầu như trùng khớp hoàn toàn với kết quả tính toán sử dụng mô hình phần tử hữu hạn bán giải tích “120 Elements” trình bày trong [90]. Điều này chứng tỏ mô hình tính toán được sử dụng đảm bảo độ tin cậy.

*b) So sánh với phương pháp đàn hồi 3D cho panel trụ FGM*

Xét panel trụ FGM với các cạnh tựa đơn. Các tham số tính toán đầu vào được trình bày trong công trình [25] do Brischetto thực hiện, cụ thể như sau:

bán kính  $R = 10$  m, chiều dài vỏ  $L = 1$  m, chiều dài cung  $b = \frac{\pi}{3} R$ , chiều dày

trung đối  $R/h$  thay đổi, bề mặt trong là kim loại (Aluminum Alloy Al2024)

với  $\mu_m = 0.3$ ,  $E_m = 73$  GPa, bề mặt ngoài là ceramic (Alumina  $Al_2O_3$ ) với

$\mu_c = 0.3$ ,  $E_c = 380$  GPa. Vỏ chịu tác dụng của tải pháp tuyến ngang dạng sin

phân bố trên bề mặt ngoài  $q^+ = Q_0 \sin \frac{\pi}{L/R} \xi \sin \frac{\pi}{b/R} \theta$ ,  $Q_0 = 1$  Pa. Trong

Bảng 3.2 trình bày kết quả tính toán chuyển vị  $\bar{w} = w \times 10^{10}$  ( $w$  có đơn vị là mét) tại vị trí chính giữa vỏ đối với các giá trị chiều dày tương đối  $R/h$ , số mũ thể tích vật liệu  $\eta$  khác nhau và so sánh với các kết quả tính toán theo lý thuyết đàn hồi 3D trong [25], lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất, lý thuyết lớp độc lập LW4 trong [26].

Phân tích kết quả so sánh trong Bảng 3.2 cho thấy, đối với vỏ trụ ngắn mô hình cấp ba  $N_0 = 3$  cho kết quả tính toán gần với lý thuyết đàn hồi 3D và mô hình lý thuyết lớp độc lập LW4; còn mô hình cấp hai  $N_0 = 2$  cho kết quả tính toán xấp xỉ với FSDT, mô hình này chỉ áp dụng được trong trường hợp vỏ mỏng.

Bảng 3.2. Chuyển vị  $\bar{w} = w \times 10^{10}$  của vỏ trụ FGM ở vị trí giữa

$R/h$	Elastic 3D [25]	$N_0 = 2$	$N_0 = 3$	FSDT [26]	LW4 [26]
$\eta = 1$					
100	5.2783	5.2782	4.4163	4.3735	5.2783
10	0.0170	0.0173	0.0159	0.0170	0.0170
4	0.0019	0.0016	0.0031	0.0054	0.0013
$\eta = 4$					
100	7.9738	7.9711	6.6315	6.5603	7.9734
10	0.0314	0.0328	0.0269	0.0277	0.0315
4	0.0032	0.0040	0.0051	0.0090	0.0022
$\eta = 10$					
100	9.2029	9.2014	7.6154	7.5561	9.2033
10	0.0404	0.0430	0.0337	0.0358	0.0405
4	0.0042	0.0064	0.0077	0.0121	0.0022

c) So sánh với phương pháp đàn hồi 3D cho vỏ trụ FGM

Xét vỏ trụ FGM tựa ở hai đầu. Các tham số vật liệu vỏ như trong ví dụ 2. Thông số hình học vỏ như sau: bán kính  $R = 10$  m, chiều dài vỏ  $L = 20$  m, chiều dày tương đối  $R/h = 4$ . Vỏ chịu tác dụng của tải pháp tuyến dạng sin

phân bố trên bề mặt ngoài  $q^+ = Q_0 \sin \frac{\pi}{L/R} \xi \sin \theta$ ,  $Q_0 = 1 \text{ Pa}$ . Trong Bảng 3.3 trình bày kết quả tính toán chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo mô hình lý thuyết cấp hai  $N_0 = 2$  và cấp ba  $N_0 = 3$  và so sánh với với các kết quả tính toán theo lý thuyết đàn hồi 3D trong trích dẫn [25].

Dạng chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo tài liệu [25]:

$$\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} = \frac{10^4 E_m \{u, v, w\}}{Q_0 h (R/h)^4}, \{\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\xi\theta}\} = \frac{10^2 \{\sigma_\xi, \sigma_\theta, \tau_{\xi\theta}\}}{Q_0 (R/h)^2},$$

$$\{\bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\tau}_{\theta z}\} = \frac{10^2 \{\tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}\}}{Q_0 (R/h)}, \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{Q_0}.$$

Bảng 3.3. Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của vỏ trụ FGM

	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\tau}_{\xi\theta}$	$\bar{\sigma}_z$	$\bar{\tau}_{\xi z}$	$\bar{\tau}_{\theta z}$
$(\xi, \theta)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$
$\eta = 0.5$									
$z = -h/2$									
$N_0 = 2$	65.516	200.22	334.46	-3.7783	5.4396	6.9982	0	0	0
$N_0 = 3$	66.713	202.00	334.97	-3.0645	6.1713	7.0701	0	0	0
Ref. [25]	66.732	201.99	334.97	-3.0504	6.2079	7.0941	0	0	0
$z = 0$									
$N_0 = 2$	4.0474	182.72	327.81	7.0616	25.579	17.794	0.3818	8.3811	2.6468
$N_0 = 3$	4.0435	184.10	330.64	7.6526	26.346	17.926	0.4020	7.5897	2.1443
Ref. [25]	4.0633	184.09	330.64	7.6328	26.308	17.904	0.4019	7.5923	2.1460
$z = h/2$									
$N_0 = 2$	-57.09	165.83	321.15	35.320	43.073	16.791	1.0000	0	0
$N_0 = 3$	-57.66	166.96	322.91	32.971	40.678	16.882	1.0000	0	0
Ref. [25]	-57.655	166.94	322.91	32.897	40.593	16.885	1,0000	0	0
$\eta = 1$									

$z = -h/2$									
$N_0 = 2$	87.131	245.89	413.13	-4.5131	5.5786	7.4716	0	0	0
$N_0 = 3$	88.802	248.16	413.14	-3.6376	6.4579	7.5530	0	0	0
Ref. [25]	88.819	248.13	413.13	-3.6717	6.4938	7.6111	0	0	0
$z = 0$									
$N_0 = 2$	11.493	224.18	404.71	5.0891	24.047	17.358	0.3196	7.8095	2.4716
$N_0 = 3$	11.526	225.94	408.23	5.8924	25.024	17.491	0.3395	7.0152	1.9720
Ref. [25]	11.559	225.91	408.20	5.8800	24.973	17.451	0,3394	7.0175	1.9735
$z = h/2$									
$N_0 = 2$	-64.220	203.09	396.30	40.816	52.164	20.966	1.0000	0	0
$N_0 = 3$	-64.864	204.53	398.70	37.918	49.252	21.089	1.0000	0	0
Ref. [25]	-64.861	204.49	398.68	37.792	49.105	21.079	1.0000	0	0
$\eta = 2$									
$z = -h/2$									
$N_0 = 2$	119.01	316.69	534.80	-6.3629	7.0586	9.7424	0	0	0
$N_0 = 3$	121.34	319.90	534.30	-5.0490	8.3581	9.8570	0	0	0
Ref. [25]	121.31	319.84	534.34	-5.1432	8.2629	9.8622	0	0	0
$z = 0$									
$N_0 = 2$	21.993	288.66	523.71	3.1089	20.125	15.004	0.2706	7.4707	2.3568
$N_0 = 3$	22.052	291.16	528.62	4.0199	21.195	15.130	0.2907	6.6427	1.8423
Ref. [25]	22.185	291.15	528.56	4.0474	21.174	15.082	0.2906	6.6434	1.8443
$z = h/2$									
$N_0 = 2$	-75.967	261.19	512.61	49.628	66.308	27.436	1.0000	0	0
$N_0 = 3$	-76.756	263.28	516.37	45.903	62.638	27.626	1.0000	0	0
Ref. [25]	-76.749	263.23	516.36	45.593	62.278	27.575	1.0000	0	0

Phân tích số liệu tính toán trong Bảng 3.3 cho thấy, trong trường hợp vỏ có độ dài từ trung bình trở lên, kết quả tính toán theo mô hình cấp ba  $N_0 = 3$

gần như trùng khít với kết quả tính toán theo lý thuyết đàn hồi 3D, còn mô hình cấp hai  $N_0 = 2$  cũng có độ chính xác đảm bảo.

Các ví dụ so sánh, kiểm chứng ở trên khẳng định độ tin cậy của các mô hình tính toán được sử dụng trong công trình này. Mô hình lý thuyết cấp ba  $N_0 = 3$  cho kết quả tính toán phù hợp với lý thuyết đàn hồi 3D trong mọi trường hợp được khảo sát. Còn mô hình lý thuyết cấp hai  $N_0 = 2$  có thể sử dụng trong tính toán vỏ có chiều dày từ mỏng đến trung bình và chiều dài không quá ngắn.

### 3.4.2. Kiểm chứng cho bài toán vỏ trụ FGM chịu tải trọng nhiệt

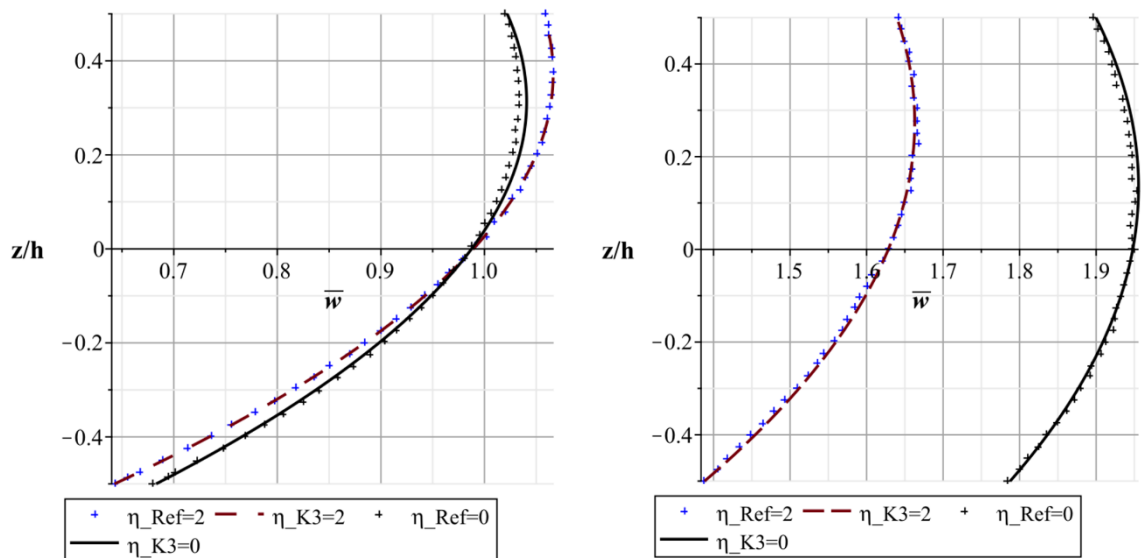
Xét vỏ trụ FGM nằm ở 2 đầu. Các tham số vật liệu vỏ theo tài liệu của Gharooni và cộng sự [50]: Module đàn hồi, hệ số nở nhiệt và hệ số dẫn nhiệt ở mặt trong của vỏ trụ lần lượt là  $E_{in} = 200 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_{in} = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ,  $K_{in} = 20 \text{ W/m.K}$ . Hệ số Poisson của vật liệu FGM là  $\mu = 0,3$ . Thông số hình học vỏ: bán kính mặt trong  $r_{in} = 40 \text{ mm}$ , chiều dài vỏ  $L = 0,8 \text{ m}$ , chiều dày vỏ  $h = 20 \text{ mm}$ . Nhiệt độ ở mặt trong và mặt ngoài của vỏ lần lượt là  $T_{in} = 125 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_o = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Nhiệt độ môi trường  $T_{ref} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Phân bố nhiệt độ theo chiều dày vỏ trụ FGM nhận được bằng cách giải phương trình truyền nhiệt (2.17). Tải trọng áp lực phân bố đều ở mặt trong vỏ  $Q_{in} = 80 \text{ MPa}$ .

Kết quả tính toán ứng suất theo mô hình lý thuyết  $N_0 = 3$  và so sánh với với các kết quả tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn của tài liệu [50] cho trong Bảng 3.4 trong trường hợp chỉ có tải nhiệt. Hình 3.4 thể hiện chuyển vị không thứ nguyên với mô hình lý thuyết cấp ba  $N_0 = 3$  ( $\eta_{K3}$ ) và mô hình phần tử hữu hạn của Gharooni (Ref) trong trường hợp chỉ có tải nhiệt và trường hợp có cả tải cơ-nhiệt với chỉ số tỷ lệ thể tích khác nhau.

Dạng không thứ nguyên của chuyển vị:  $\bar{w} = w / r_i \times 1000$

Bảng 3.4. Ứng suất pháp ngang vỏ trụ FGM theo các mô hình

$\sigma_z$ MPa	$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$	
	Ref [50]	$N_0 = 3$	Ref [50]	$N_0 = 3$	Ref [50]	$N_0 = 3$
$z = -h/2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$z = -h/4$	-13.032	-14.164	-14.964	-15.848	-17.096	-17.591
$z = 0$	-13.109	-13.318	-16.742	-16.951	-21.228	-21.346
$z = h/4$	-7.630	-7.125	-10.720	-10.292	-14.973	-14.689
$z = h/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000



a) Chỉ có tải nhiệt

b) Có cả tải cơ và nhiệt

Hình 3.4. Chuyển vị không thứ nguyên theo hai mô hình chịu tải

Phân tích kết quả có được từ Bảng 3.4 và Hình 3.4 cho thấy, kết quả tính toán theo mô hình lý thuyết trong luận án và kết quả theo mô hình phần tử hữu hạn của Gharooni tương đối trùng hợp. Như vậy, phương pháp và mô hình tính toán sử dụng trong luận án đảm bảo độ tin cậy trong nghiên cứu, tính toán vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng nhiệt độ và tải trọng cơ-nhiệt đồng thời.

### Kết luận chương 3

Trong chương 3 đã tập trung giải quyết các bài toán sau:

- Nghiên cứu phương pháp chuyển hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng trong nghiên cứu vỏ trụ và panel trụ FGM thành các hệ phương trình vi phân thường bằng cách sử dụng phương pháp tách biến và chuỗi lượng giác đơn; các công thức nhận được áp dụng trong cả hai mô hình lý thuyết cấp hai  $N_0 = 2$  và cấp ba  $N_0 = 3$ .

- Trình bày phương pháp tính toán vỏ trụ FGM với điều kiện các cạnh tựa đơn sử dụng kỹ thuật Navier; phương pháp tính toán được áp dụng cho cả hai mô hình lý thuyết cấp hai  $N_0 = 2$  và cấp ba  $N_0 = 3$ .

- Nghiên cứu xây dựng lời giải giải tích trong nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tải trọng cục bộ, hướng tâm, đối xứng trục với các điều kiện biên khác nhau bằng cách kết hợp sử dụng phép biến đổi Laplace và phân tích nghiệm của phương trình đặc trưng. So với các phương pháp giải tích truyền thống, phương pháp nghiên cứu trình bày ở đây rất hiệu quả đối với trường hợp vỏ chịu tác dụng của tải trọng cục bộ, tải biến đổi đột ngột dưới dạng bậc thang, tải trọng tập trung; đồng thời phương pháp nghiên cứu này có thể mở rộng cho trường hợp vỏ chịu tác dụng của các dạng tải trọng với quy luật phân bố khác nhau, với điều kiện có thể xác định được biểu thức tường minh của biểu thức nghiệm trong phép biến đổi Laplace ngược.

- Thực hiện kiểm chứng độ tin cậy của mô hình toán học và phương pháp nghiên cứu được sử dụng trong luận án thông qua kết quả so sánh với các công bố trên tạp chí quốc tế uy tín trong các bài toán khác nhau về phân tích panel trụ, vỏ trụ chịu tác dụng của tải trọng cơ, tải trọng nhiệt và cơ nhiệt đồng thời. Các kết quả nghiên cứu đều khẳng định độ tin cậy của các mô hình tính toán và phương pháp nghiên cứu được sử dụng, trong đó mô hình lý thuyết Quasi-3D với cấp ba  $N_0 = 3$  có kết quả phù hợp nhất so với lý thuyết đàn hồi 3D tổng quát.



## **Chương 4. NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG CỦA MỘT SỐ THAM SỐ KẾT CẤU, VẬT LIỆU VÀ TẢI TRỌNG CƠ, NHIỆT ĐẾN TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT-BIẾN DẠNG CỦA VỎ TRỤ FGM**

Chương 4 luận án tập trung khảo sát, nghiên cứu ứng xử đối với vỏ trụ FGM với các nội dung chủ yếu sau:

- Vỏ trụ FGM chịu tải cơ: Nghiên cứu hiện tượng tập trung ứng suất, ảnh hưởng điều kiện biên, ảnh hưởng của chiều dài, chiều dày của vỏ trụ, ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích, vỏ trụ chịu các dạng tải trọng.

- Vỏ trụ FGM chịu tải nhiệt: Nghiên cứu ảnh hưởng sự chênh lệch nhiệt độ, ảnh hưởng chỉ số tỷ lệ thể tích, ảnh hưởng của chiều dày và ảnh hưởng của điều kiện biên.

- Vỏ trụ FGM chịu tải cơ-nhiệt: Nghiên cứu ảnh hưởng chênh lệch nhiệt độ, ảnh hưởng chiều dày và chỉ số tỷ lệ thể tích.

### **4.1. Nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tải trọng cơ**

Trong phần này luận án xét vỏ trụ FGM chỉ chịu tải trọng cơ với dạng tải trọng đối xứng trục phân bố đều toàn chiều dài vỏ hay phân bố cục bộ, phân bố tuyến tính, phân bố hàm hypebol và phân bố hàm sin. Xét quy luật phân bố tỷ lệ thể tích với chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta$  theo (2.4).

#### **4.1.1. Đánh giá hiện tượng tập trung ứng suất**

Để đánh giá ứng xử ứng suất có sự thăng giáng lớn cục bộ tại vùng nhỏ nhất định, có thể coi là hiện tượng tập trung ứng suất. Do đó, trong mục này luận án tập trung phân tích hiện tượng tập trung ứng suất tại vị trí biên ngàm theo các mô hình lý thuyết cấp hai  $N_0 = 2$ , cấp ba  $N_0 = 3$  và FSDT. Các thông số đầu vào phục vụ tính toán bao gồm: bán kính vỏ  $R = 1$  m, bề mặt trong là kim loại [25] Aluminum Alloy (Al2024) với  $\mu_m = 0.3$ ,  $E_m = 73$  GPa, bề mặt ngoài là gốm [25] ceramic Alumina ( $Al_2O_3$ ) với  $\mu_c = 0.3$ ,  $E_c = 380$  GPa, chiều dài vỏ  $L = 4$  m. Vỏ ngàm chặt hai đầu và chịu tác dụng của tải pháp tuyến đối xứng phân bố đều trên một phần mặt ngoài theo quy luật (4.1):

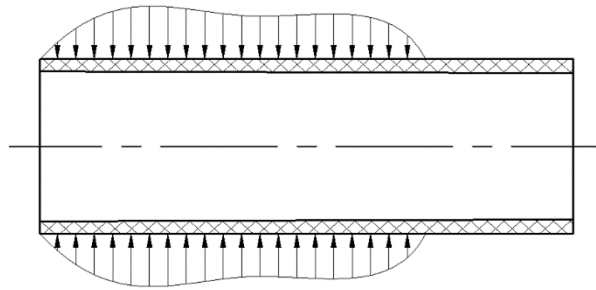
$$q^+ = \begin{cases} 0, & \xi_0/2 < \xi \leq \xi_0, \\ Q_0(\xi), & 0 \leq \xi \leq \xi_0/2, \end{cases} \quad Q_0(\xi) = 1 \text{ Pa.} \quad (4.1)$$

Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên được tính theo (4.2):

$$\bar{w} = \frac{10^4 E_m w}{Q_0 h (R/h)^4}, \quad (4.2)$$

$$\{\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\xi\theta}, \bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\tau}_{\theta z}, \bar{\sigma}_z\} = \frac{\{\sigma_\xi, \sigma_\theta, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}, \sigma_z\}}{Q_0}$$

$q(\xi)$



Hình 4.1. Mô hình tính toán vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cục bộ hướng tâm, đối xứng trục

Mô hình tải trọng tác dụng lên vỏ được trình bày ở trên Hình 4.1. Kết quả tính toán ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{\xi z}$  theo công thức (4.2) tại khu vực biên ngàm với các giá trị hệ số lũy thừa  $\eta$  và quan hệ chiều dày tương đối  $R/h$  khác nhau được trình bày ở Bảng 4.1 và đồ thị Hình 4.2 ÷ 4.4, ở đây, kết quả thực hiện với mô hình cấp ba  $N_0 = 3$ .

Bảng 4.1. Ảnh hưởng của chiều dày và chỉ số tỷ lệ thể tích tới hiện tượng tập trung ứng suất trong vỏ trụ FGM

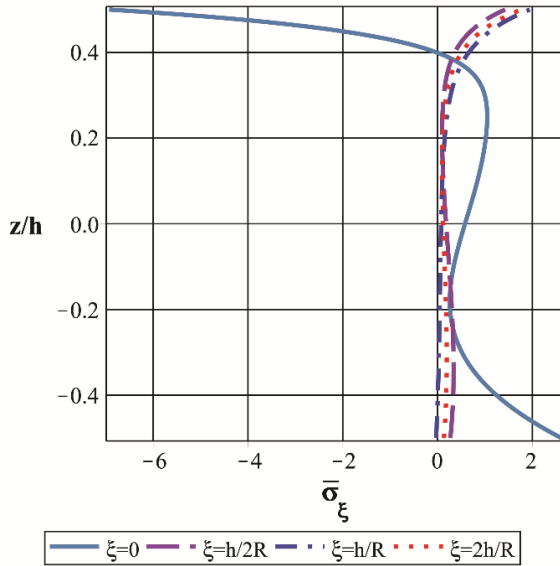
$\xi$	$\bar{\sigma}_\xi(\xi, \theta)$		$\bar{\sigma}_\theta(\xi, \theta)$		$\bar{\tau}_{\xi z}(\xi, \theta)$		$\bar{\sigma}_z(\xi, \theta)$	
	$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm 3h/8)$		$(z = \pm h/4)$	
$R/h = 10, \eta = 10$								
0	-6.9290	2.6135	-2.9696	1.1201	-0.5012	-0.2100	-0.8921	1.2368

$\frac{h}{2R}$	1.4256	0.2796	3.1443	1.0977	-0.3018	-0.2494	0.7405	0.3609
$\frac{h}{R}$	1.9450	-0.0301	4.1731	1.5500	-0.0777	-0.0749	0.7774	0.4523
$\frac{2h}{R}$	1.7696	0.1343	3.0799	1.1096	0.2513	0.1382	0.5326	0.3511
$R/h = 30, \eta = 1$								
0	-4.0797	1.4157	-1.7484	0.6067	-0.6905	-0.4283	-1.1031	1.2944
$\frac{h}{2R}$	0.6744	0.1470	1.5057	0.4942	-0.3953	-0.2641	0.7836	0.2220
$\frac{h}{R}$	1.1638	-0.0684	2.1244	0.7038	-0.1030	-0.0826	0.8001	0.2773
$\frac{2h}{R}$	1.2395	-0.0291	1.9954	0.6220	0.1626	0.1245	0.7788	0.2401
$R/h = 100, \eta = 0.2$								
0	-2.7029	1.5054	-.1584	0.6452	-0.7437	-0.3055	-0.9446	1.3685
$\frac{h}{2R}$	0.6478	0.1037	1.1970	0.6161	-0.2890	-0.2826	0.8683	0.3570
$\frac{h}{R}$	0.8981	-0.0976	0.5048	0.8855	-0.0660	-0.0689	0.8940	0.4446
$\frac{2h}{R}$	0.8114	0.0358	1.1670	0.6312	0.2823	0.1779	0.6409	0.3526

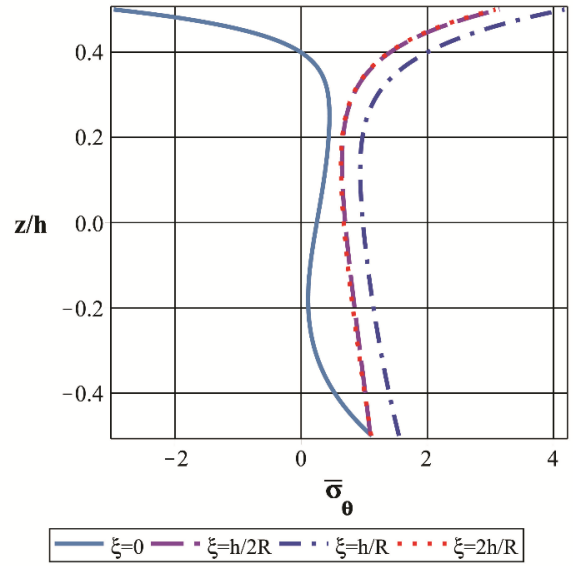
Phân tích các kết quả nhận được từ Bảng 4.1 và các đồ thị Hình 4.2 ÷ 4.4 đưa đến các nhận xét sau:

- Tại vị trí biên ngàm các giá trị ứng suất có sự tăng đột biến, hiện tượng tập trung ứng suất tồn tại cả đối với vỏ mỏng và vỏ dày.
- Ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_z$  là không thể bỏ qua trong tính toán kết cấu tại vùng biên ngàm (khu vực xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất).

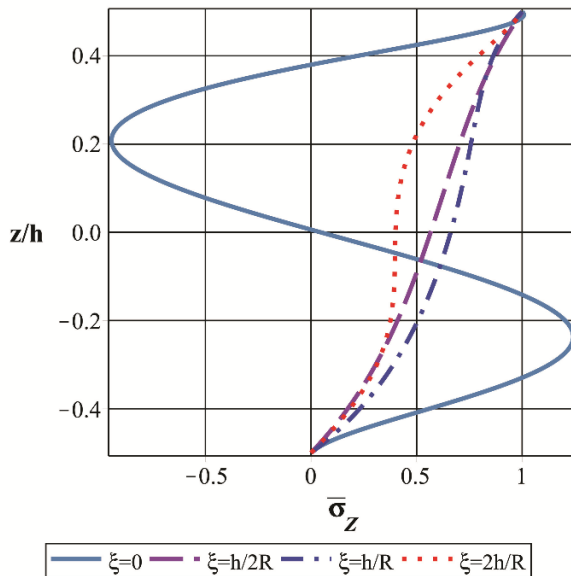
- Kích thước khu vực xảy ra hiện tượng tập trung ứng suất rất nhỏ, không vượt quá một nửa chiều dày vỏ.



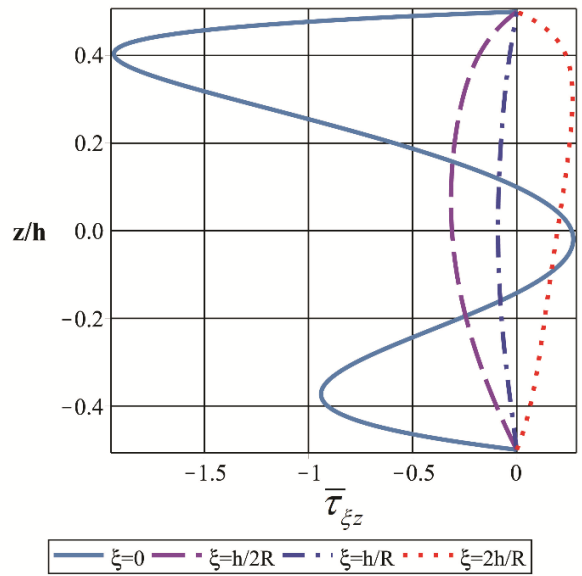
a) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$



b) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$

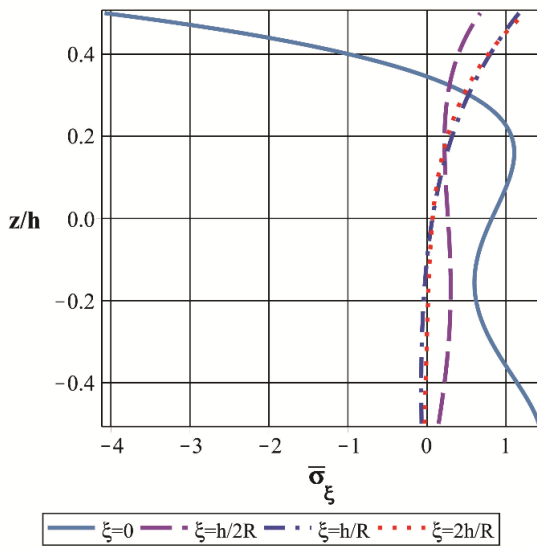


c) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_z$

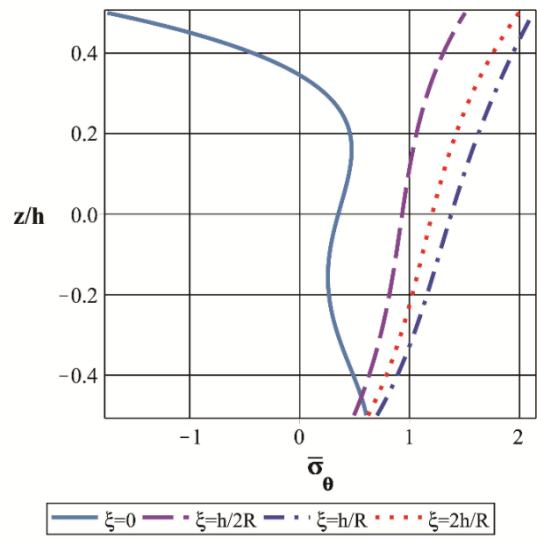


d) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\tau}_{\xi z}$

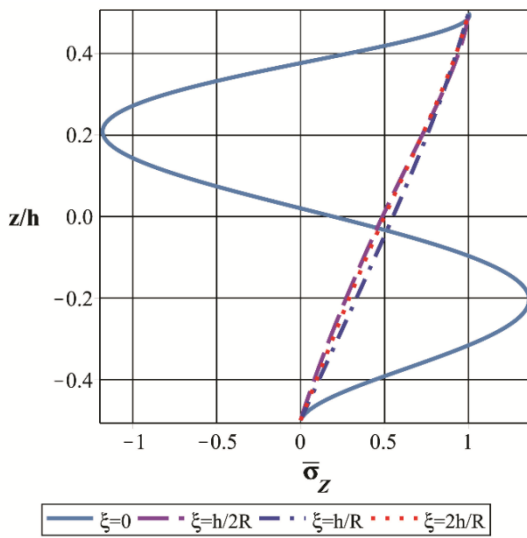
Hình 4.2. Sự thay đổi của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày  $z/h$  tại vùng biên với  $L = 4R$ ,  $R/h = 10$ ,  $\eta = 10$ .



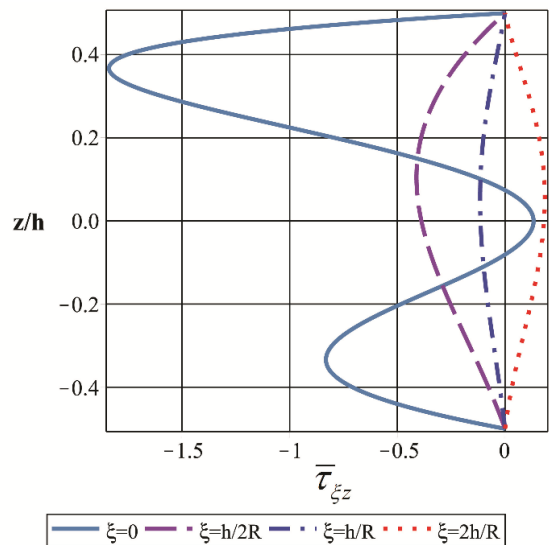
a) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$



b) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$

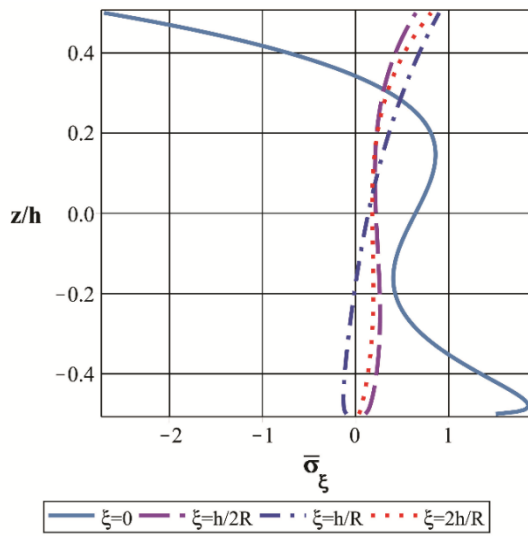
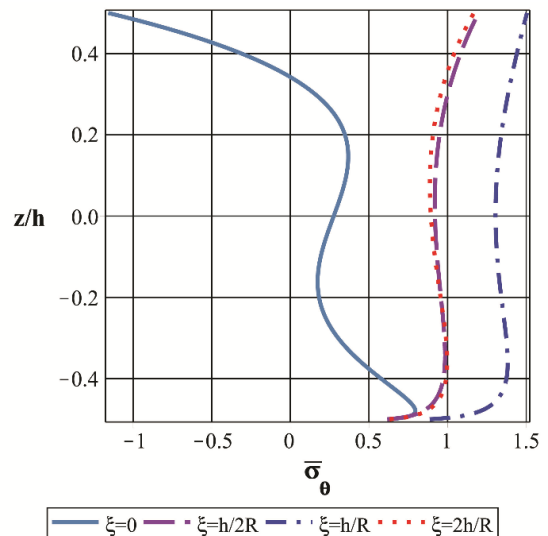
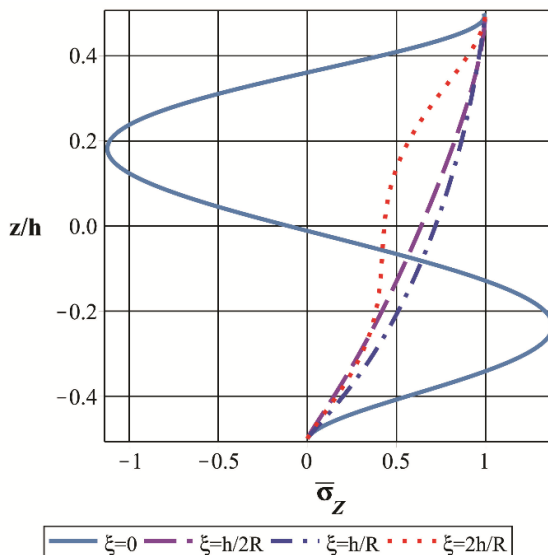
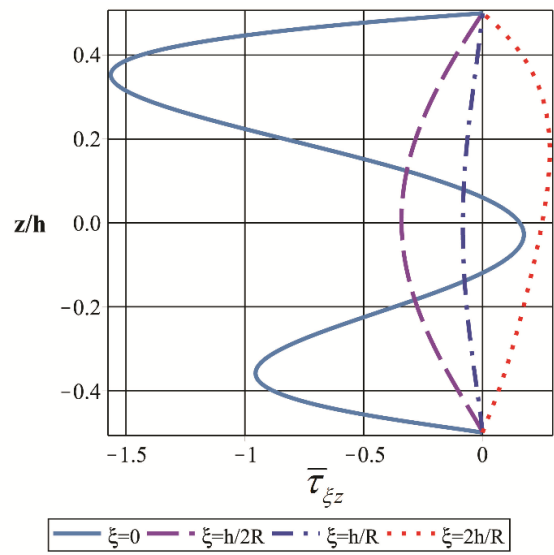


c) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_z$



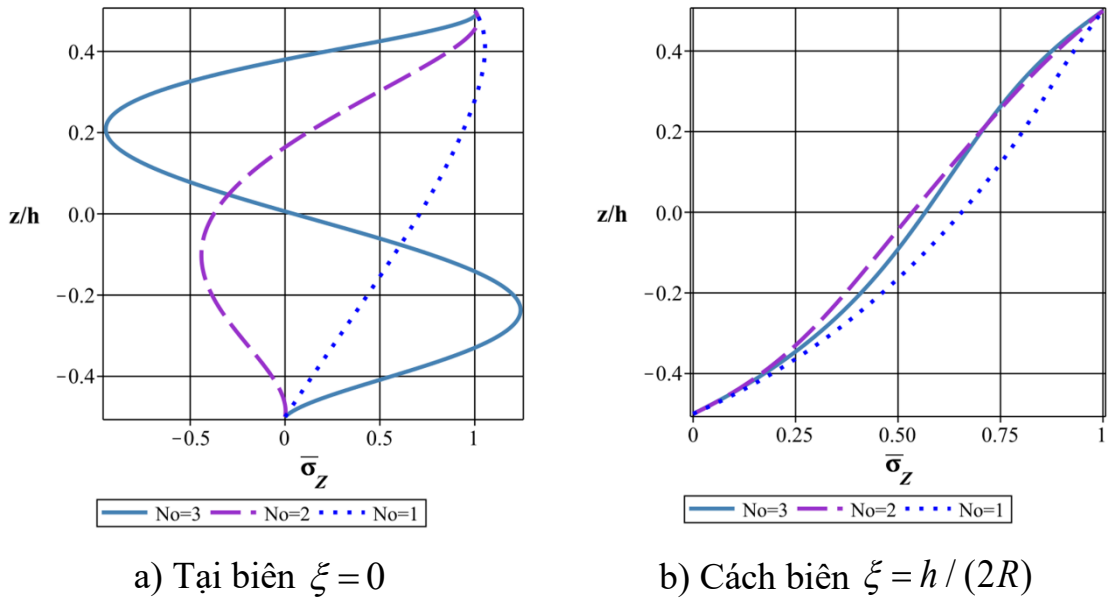
d) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\tau}_{\xi z}$

Hình 4.3. Sự thay đổi của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày  $z/h$  tại vùng biên với  $L = 4R$ ,  $R/h = 30$ ,  $\eta = 1$ .

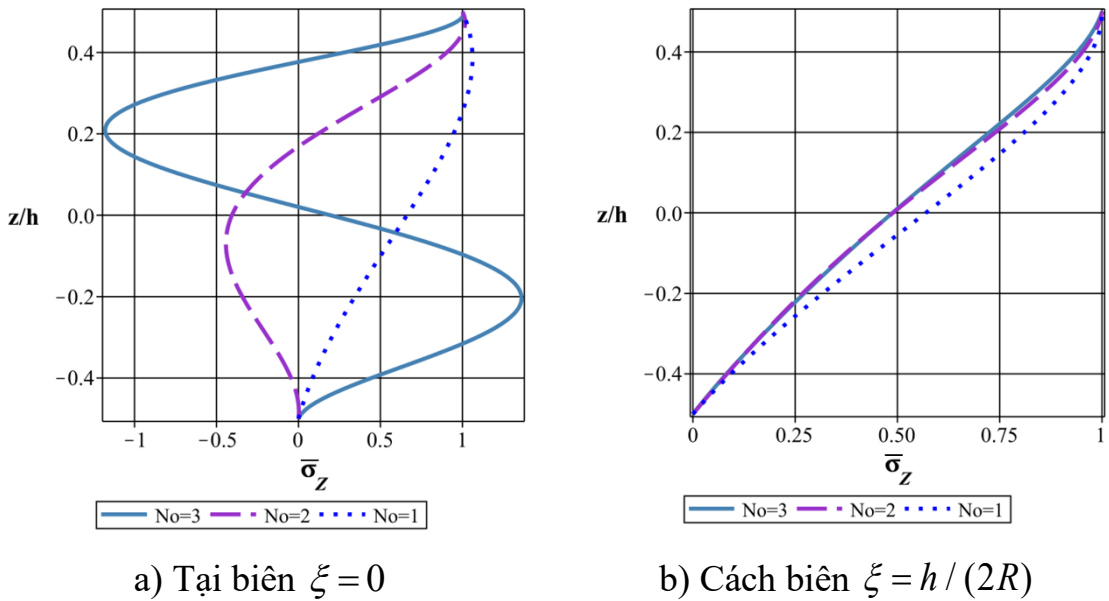
a) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$ b) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$ c) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_z$ d) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\tau}_{\xi z}$ 

Hình 4.4. Sự thay đổi của ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày  $z/h$  tại vùng biên với  $L = 4R$ ,  $R/h = 100$ ,  $\eta = 0.2$ .

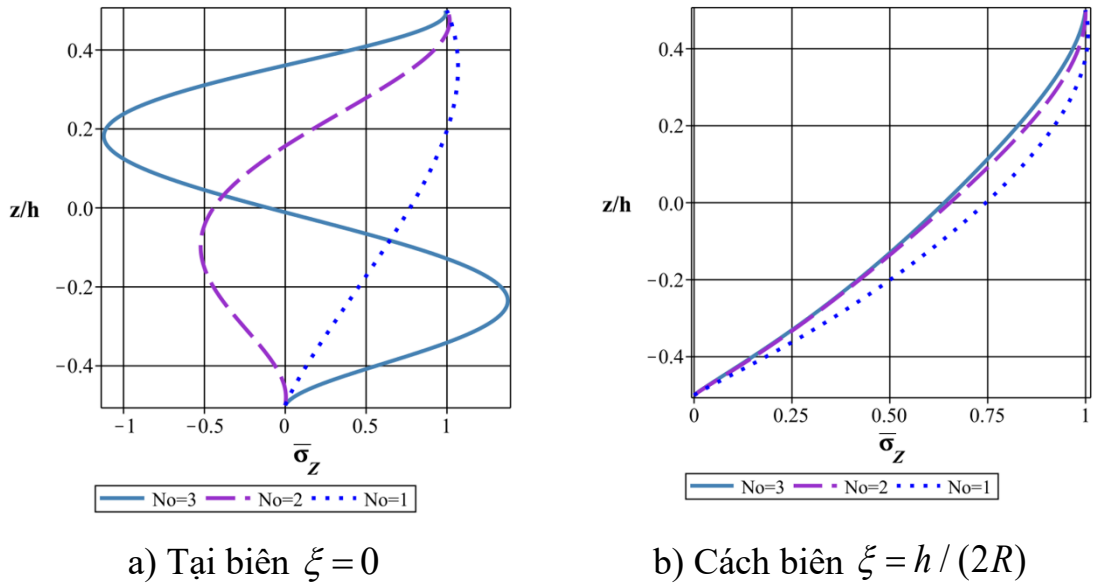
Do vùng xuất hiện tập trung ứng suất nhỏ hơn một nửa chiều dày vỏ, nên luận án tiếp tục đánh giá hiện tượng tập trung ứng suất với các lý thuyết biến dạng theo mô hình:  $N_0 = 3$ ,  $N_0 = 2$  và  $N_0 = 1$ .



Hình 4.5. Sự thay đổi ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  tại vùng biên theo các lý thuyết với  $L = 4R$ ,  
 $R/h = 10, \eta = 10$ .



Hình 4.6. Sự thay đổi ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  tại vùng biên theo các lý thuyết với  $L = 4R$ ,  
 $R/h = 30, \eta = 1$



Hình 4.7. Sự thay đổi ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  tại vùng biên theo các lý thuyết với  $L = 4R$ ,

$$R / h = 100, \eta = 0.2$$

Kết quả từ đồ thị Hình 4.5÷ 4.7 cho thấy, ở tại biên có sự khác biệt lớn giữa các mô hình cấp ba  $N_0 = 3$ , cấp hai  $N_0 = 2$  và cấp một  $N_0 = 1$ , mô hình cấp ba  $N_0 = 3$  cho giá trị lớn nhất, còn mô hình cấp một  $N_0 = 1$  cho giá trị bé nhất. Khi cách biên  $\xi = h / (2R)$  ứng suất thay đổi theo chiều dày giữa các mô hình tiệm cận gần nhau. Từ đây có thể thấy mô hình lý thuyết Quasi-3D với  $N_0 = 3$  sẽ cho kết quả đánh giá tốt hơn so với so với hai mô hình còn lại.

Như vậy tại vùng biên ngầm (tính từ biên ra một khoảng nhỏ, chưa tới nửa chiều dày) có hiện tượng tập trung ứng suất. Tại đây hai thành phần ứng suất  $\bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{\xi z}$  có giá trị lớn nên khi tính toán kết cấu không thể bỏ qua. Tuy nhiên hai thành phần ứng suất này lại bị bỏ qua trong hầu hết các lý thuyết. Điều này cho thấy tầm quan trọng khi sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D.

#### 4.1.2. Nghiên cứu ảnh hưởng của các điều kiện biên

Trong mục này, để nghiên cứu ảnh hưởng của các điều kiện biên, thực hiện xét vỏ trụ có các tham số như sau: bán kính  $R = 1$  m, bề mặt ngoài là kim loại [25] (Aluminum Alloy Al2024) với  $\mu_m = 0.3$ ,  $E_m = 73$  GPa, bề mặt trong



là gốm [25] (Alumina  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) với  $\mu_c = 0.3$ ,  $E_c = 380$  GPa, chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu  $\eta = 1$ , chiều dài  $L$  và chiều dày tương đối  $R/h$  thay đổi. Vỏ chịu tác dụng của tải trọng hướng kính phân bố đều trên bề mặt ngoài  $q^+ = Q_0$ ,  $Q_0 = 1$  Pa. Các điều kiện biên được xét đến ở đây bao gồm: ngàm - ngàm (C-C), ngàm - tự do (C-F), ngàm - tựa đơn (C-S) và tựa đơn - tựa đơn (S-S).

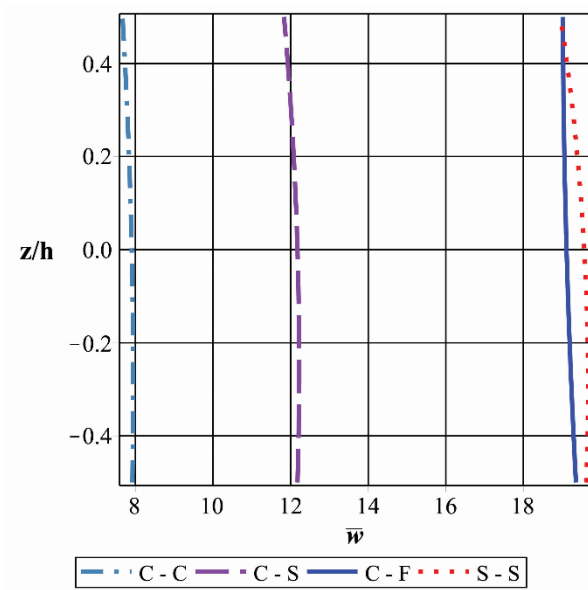
Trong Bảng 4.2 trình bày kết quả tính toán không thứ nguyên của chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\tau}_{\xi z}$ ,  $\bar{\sigma}_z$  tại vị trí giữa vỏ  $\xi = \frac{\xi_0}{2}$  và tại biên  $\xi = \xi_0$  tương ứng với mô hình lý thuyết cấp ba  $N_0 = 3$ .

Bảng 4.2. Ảnh hưởng của điều kiện biên tới chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\tau}_{\xi z}$ ,  $\bar{\sigma}_z$

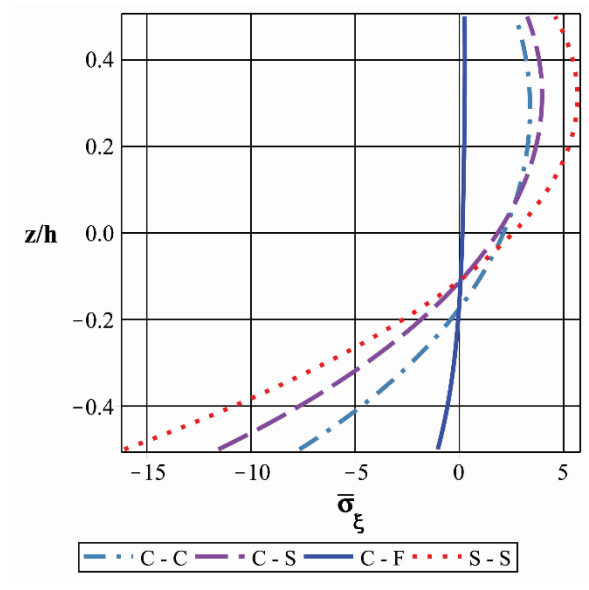
Điều kiện biên	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$		$\bar{\sigma}_\theta$		$\bar{\tau}_{\xi z}$		$\bar{\sigma}_z$	
	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(\xi_0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(\xi_0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(\xi_0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(\xi_0, \theta)$
	$(z = 0)$	$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm 3h/8)$		$(z = \pm h/4)$	
$L = 4R, R/h = 10$									
C-C	29.777	1.093	-8.522	3.319	-3.652	0.000	-4.010	0.901	-6.430
		4.758	39.236	17.972	16.816	0.000	-7.706	0.411	11.454
C-S	32.713	0.116	0.000	3.319	0.000	0.000	-0.944	0.901	-0.339
		-0.329	0.000	17.975	0.000	0.000	-1.149	0.411	0.496
S-S	32.718	0.115	0.000	3.319	0.000	0.000	-0.944	0.901	-0.339
		-0.327	0.000	17.978	0.000	0.000	-1.149	0.411	0.496
C-F	32.710	0.114	0.000	3.319	3.325	0.000	0.000	0.901	0.906
		-0.325	0.000	17.974	18.310	0.000	0.000	0.411	0.433
$L = 0.5R, R/h = 10$									

C-C	7.904	2.691	-7.169	1.727	-3.073	0.000	-3.596	0.891	-4.880
		-7.671	26.536	1.799	11.373	0.000	-5.825	0.230	7.126
C-S	12.177	3.253	0.000	2.289	0.000	0.156	-1.060	0.883	-0.339
		-11.560	0.000	2.973	0.000	0.377	-1.436	0.237	0.496
S-S	19.571	4.597	0.000	3.365	0.000	0.000	-1.095	0.868	-0.339
		-16.076	0.000	5.717	0.000	0.000	-1.516	0.258	0.496
C-F	19.113	0.249	0.000	2.082	4.023	0.084	0.000	0.905	0.887
		-1.039	0.000	10.128	22.482	0.191	0.000	0.329	0.535
$L = 4R, R/h = 100$									
C-C	0.294	9.549	-83.189	32.295	-35.652	0.000	-29.581	0.880	-67.558
		48.863	362.686	168.939	155.437	0.000	-57.182	0.380	114.115
C-S	0.323	0.100	0.000	32.295	0.000	0.000	-1.935	0.880	-0.325
		-0.323	0.000	168.939	0.000	0.000	-3.465	0.380	0.469
S-S	0.323	0.100	0.000	32.295	0.000	0.000	-1.935	0.880	-0.325
		-0.323	0.000	168.939	0.000	0.000	-3.465	0.380	0.469
C-F	0.323	0.100	0.000	32.295	32.306	0.000	0.000	0.880	0.880
		-0.323	0.000	168.939	169.250	0.000	0.000	0.380	0.383

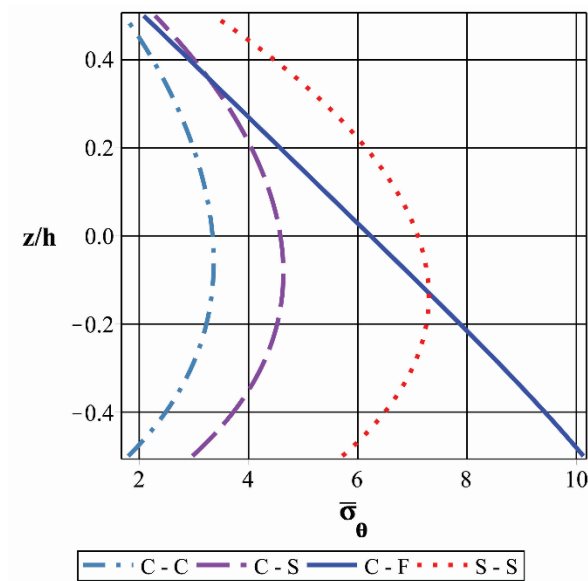
Trên Hình 4.8, 4.9 trình bày đồ thị phân bố của chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\sigma}_z$  không thứ nguyên theo chiều dày tương đối  $z/h$  tại những vị trí khác nhau đối với vỏ có chiều dài khác nhau và trong các điều kiện biên khác nhau.



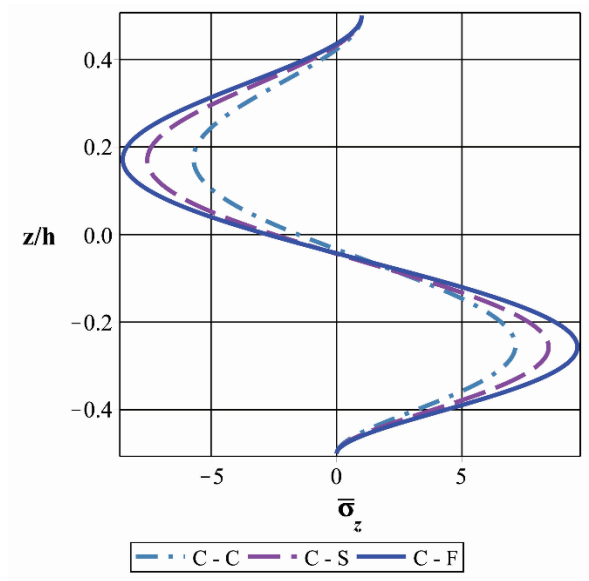
a) Sự thay đổi của chuyển vị  $\bar{w}$  tại vị trí giữa vỏ  $\xi = \xi_0 / 2$



b) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  tại vị trí giữa vỏ  $\xi = \xi_0 / 2$

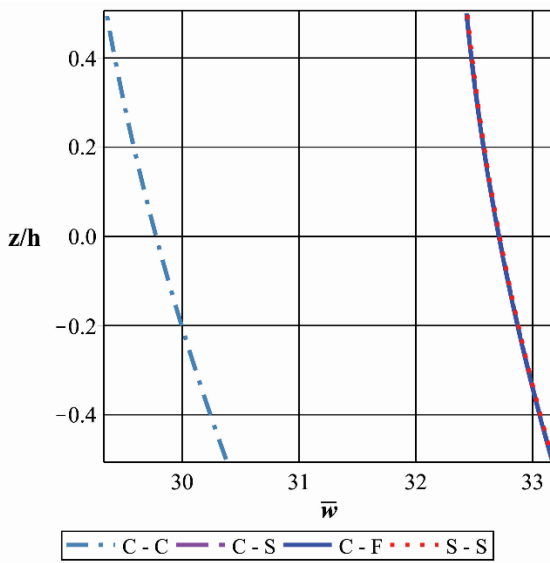


c) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  tại vị trí giữa vỏ  $\xi = \xi_0 / 2$

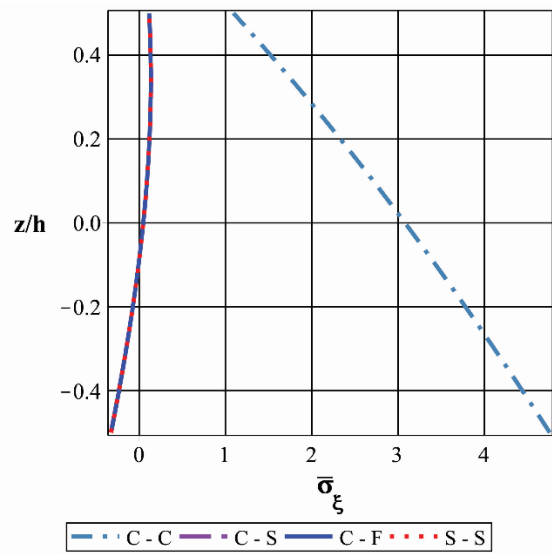


e) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  tại biên  $\xi = 0$

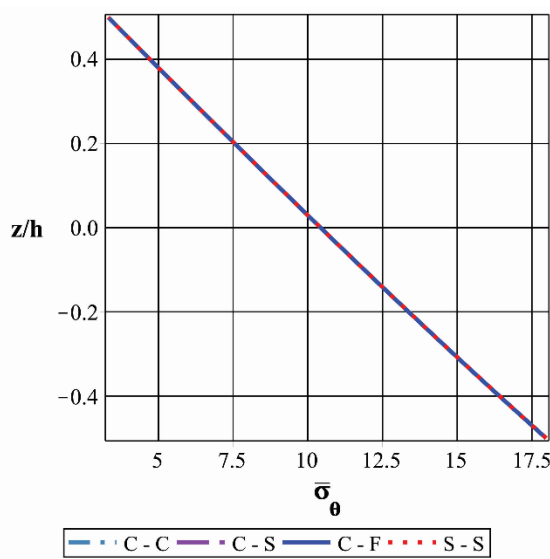
Hình 4.8. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ với  $L = 0.5R$ ,  $R/h = 10$ ,  $\eta = 1$ .



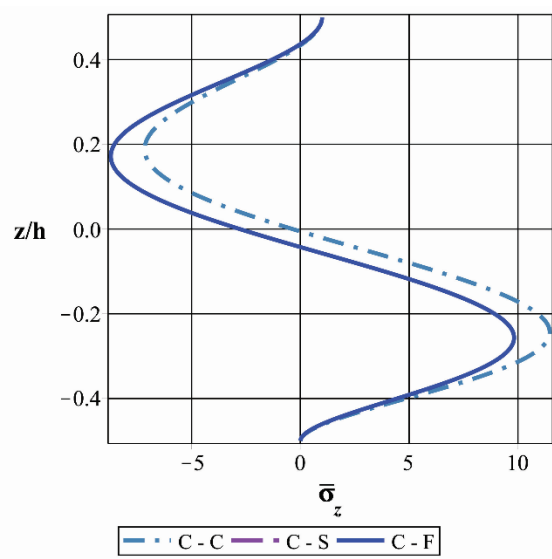
a) Sự thay đổi của chuyển vị  $\bar{w}$  tại vị trí giữa vỏ  $\xi = \xi_0 / 2$



b) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  tại vị trí giữa vỏ  $\xi = \xi_0 / 2$



c) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  tại vị trí giữa vỏ  $\xi = \xi_0 / 2$



e) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  tại biên  $\xi = 0$

Hình 4.9. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ  $z/h$  với  $L=4R$ ,  $R/h=10$ ,  $\eta=1$ .

Phân tích các kết quả từ số liệu Bảng 4.2 và các đồ thị trên Hình 4.8, 4.9 có thể rút ra một số nhận xét sau:

- Đối với vỏ có chiều dài trung bình trở lên, ở những vị trí giữa vỏ (xa biên), điều kiện biên không ảnh hưởng nhiều đến chuyển vị và ứng suất vỏ.

- Tại vị trí biên, ứng suất cực đại của vỏ trụ thay đổi tùy thuộc vào điều kiện biên. Tại vị trí biên ngầm xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất, trong đó ứng suất pháp ngang  $\bar{\sigma}_z$  tăng đột biến và đạt giá trị xấp xỉ bằng 30% so với ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_\xi$  cực đại.

- Trong trường hợp vỏ ngắn, các điều kiện biên có ảnh hưởng lớn tới chuyển vị và các ứng suất trên toàn vỏ.

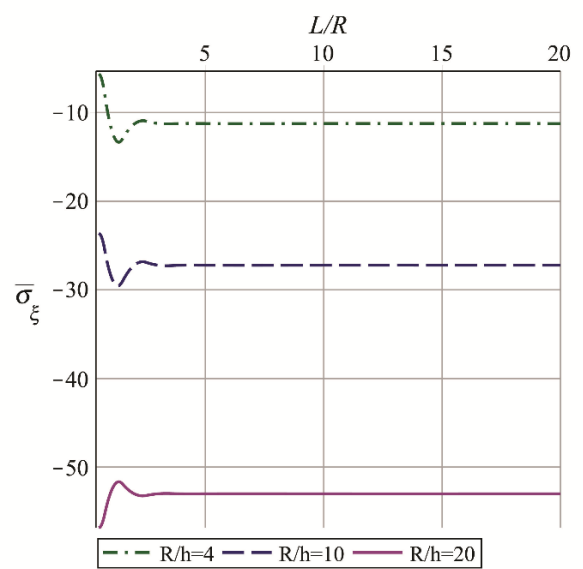
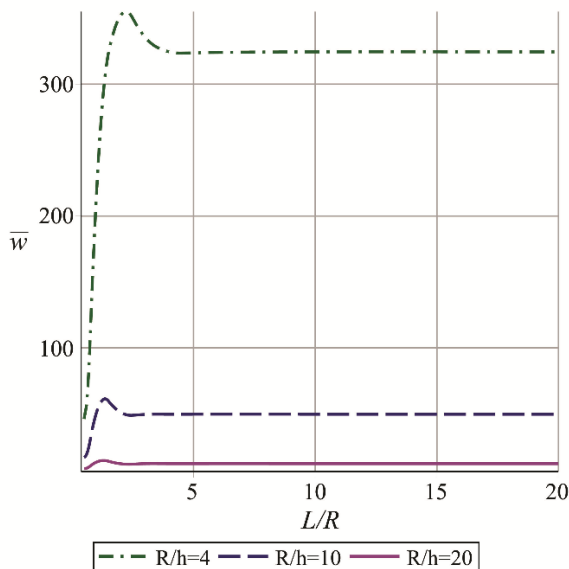
#### 4.1.3. Nghiên cứu ảnh hưởng của chiều dày và chiều dài vỏ

Ta nghiên cứu vỏ trụ với các tham số hình học và vật liệu sau: bán kính  $R=1$  m, bề mặt trong là kim loại [25] (Aluminum Alloy Al2024) với  $\mu_m=0.3$ ,  $E_m=73$  GPa, bề mặt ngoài là gốm [90] ceramic Zirconia với  $\mu_c=0.298$ ,  $E_c=168.06$  GPa, chỉ số tỉ lệ thể tích vật liệu  $\eta=0.2$ , chiều dài  $L$  và chiều dày tương đối  $R/h$  thay đổi. Điều kiện biên tương ứng với trường hợp ngầm - tựa đơn (C-S). Vỏ chịu tác dụng của tải trọng hướng kính phân bố đều trên bề mặt ngoài  $q^+=Q_0$ ,  $Q_0=1$  Pa. Trong Bảng 4.3 trình bày kết quả tính toán chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\tau}_{\xi z}$ ,  $\bar{\sigma}_z$  không thứ nguyên theo công thức (4.2) tại vị trí giữa vỏ và tại biên  $\xi=0$  tương ứng với mô hình lý thuyết cấp ba  $N_0=3$

Bảng 4.3. Ảnh hưởng của chiều dày và chiều dài vỏ tới chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\sigma}_z$

	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_z$	$\bar{\sigma}_\xi$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_z$
$R/h$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, 0\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, -\frac{h}{4}\right)$	$\left(0, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(0, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(0, \theta, -\frac{h}{4}\right)$
$L=0.5R$							

4	46.1308	-1.4464	-0.0553	0.1557	3.1512	1.3462	1.6483
10	17.0310	-5.2476	0.7597	0.1398	15.0752	6.4608	7.7488
20	8.4325	-11.3291	5.8366	0.1603	36.9279	15.8262	19.8642
50	2.0455	-13.6230	30.5323	0.2072	85.5064	36.6456	47.5249
100	0.5204	-3.8802	68.9029	0.2245	163.8853	70.2365	92.4781
$L = 4R$							
4	324.5210	0.1075	3.3387	0.2902	7.1825	3.0782	3.8415
10	49.6960	0.0219	7.1147	0.2449	17.4940	7.5403	9.3541
20	12.2132	0.0215	13.5152	0.2315	34.4170	14.7502	18.6219
50	1.9327	0.0167	32.7477	0.2236	83.6725	35.8597	46.4488
100	0.4814	0.0152	64.8153	0.2211	164.4653	70.4851	92.8063
$L = 10R$							
4	324.4943	0.0534	3.3202	0.2890	7.1821	3.0781	3.8408
10	49.7008	0.0286	7.1175	0.2450	17.5940	7.5403	9.3541
20	12.2132	0.0210	13.5150	0.2315	34.4170	14.7502	18.6219
50	1.9327	0.0167	32.7477	0.2236	83.6725	35.8597	46.4488
100	0.4814	0.0152	64.8153	0.2211	164.4653	70.4851	92.8063

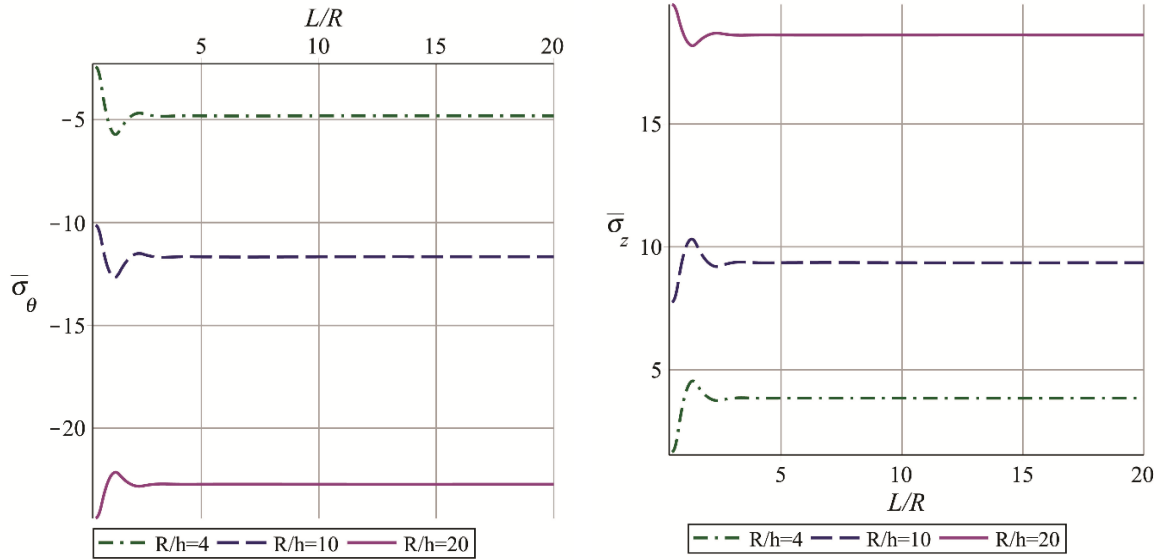


a) Sự thay đổi của chuyển vị  $\bar{w}$  ở giữa

$$\text{vỏ } \xi = \xi_0 / 2, z = 0$$

b) Sự thay đổi ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  tại biên

$$\xi = 0, z = -h / 2$$



- c) Sự thay đổi ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  tại biên  $\xi = 0, z = -h/2$
- d) Sự thay đổi ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  tại biên  $\xi = 0, z = -h/4$

Hình 4.10. Sự thay đổi chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dài tương đối  $L/R$  với chiều dày tương đối thay đổi

Từ số liệu Bảng 4.3 và các đồ thị trên Hình 4.10 cho thấy, đối với vỏ ngắn, chiều dày và chiều dài có ảnh hưởng lớn đến trường chuyển vị và ứng suất vỏ. Đối với vỏ dài ( $L/R \geq 4$ ), chỉ có sự biến đổi của chiều dày gây ảnh hưởng lớn đến trường chuyển vị và ứng suất vỏ, còn sự thay đổi về chiều dài hầu như không ảnh hưởng đến các đại lượng nêu trên.

#### 4.1.4. Nghiên cứu ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích

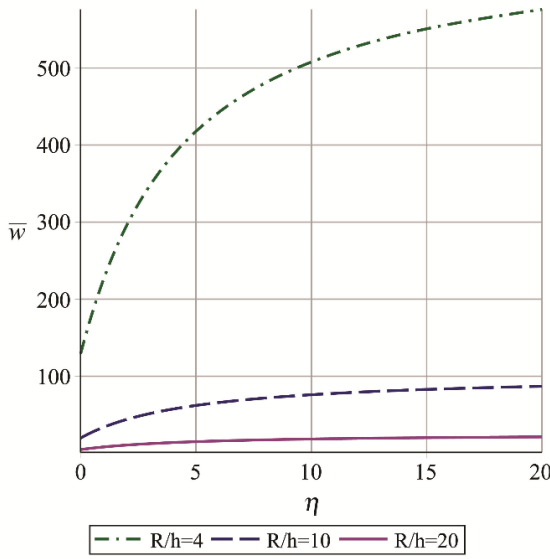
Ta nghiên cứu vỏ trụ với các tham số hình học và vật liệu sau: bán kính  $R = 1$  m, bề mặt trong là kim loại [25] (Aluminum Alloy Al2024) với  $\mu_m = 0.3$ ,  $E_m = 73$  GPa, bề mặt ngoài là gốm [25] (ceramic Alumina  $Al_2O_3$ ) với  $\mu_c = 0.3$ ,  $E_c = 380$  GPa, chiều dài  $L = 4$  m, hệ số lũy thừa  $\eta$  và chiều dày tương đối  $R/h$  thay đổi. Điều kiện biên tương ứng với trường hợp biên ngàm - tự do (C-F). Vỏ chịu tác dụng của tải trọng phân bố trên bề mặt ngoài theo quy luật hàm tuyến tính  $q^+ = Q_0(\xi_0 - \xi)$ ,  $Q_0 = 1$  Pa. Trong Bảng 4.4

trình bày kết quả tính toán chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\sigma}_z$  không thứ nguyên theo công thức (4.2) tại vị trí giữa vỏ và tại biên ngàm  $\xi = 0$  tương ứng với mô hình lý thuyết cấp ba  $N_0 = 3$ .

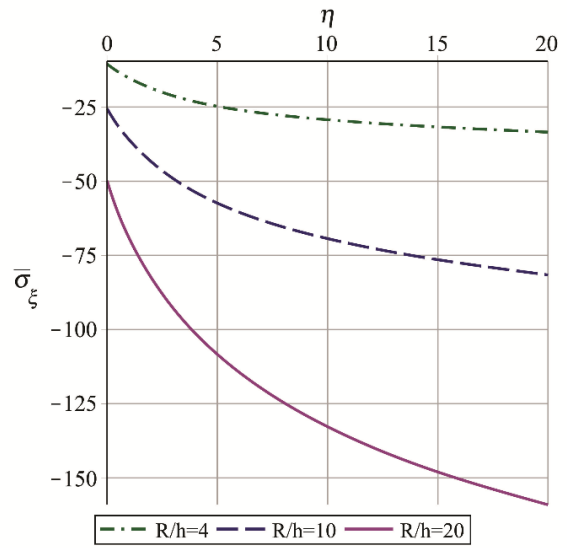
Bảng 4.4. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta$  và chiều dày tới chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\sigma}_z$

	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_z$	$\bar{\sigma}_\xi$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_z$
$\eta$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, 0\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta, -\frac{h}{4}\right)$	$\left(0, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(0, \theta, -\frac{h}{2}\right)$	$\left(0, \theta, -\frac{h}{4}\right)$
$R/h = 4$							
0	129.0714	0.0957	5.1385	0.3286	10.4056	4.4596	3.9252
0.1	140.2744	0.0795	3.4006	0.2971	7.2584	3.1108	3.8544
0.2	151.1466	0.0669	2.4274	0.2704	5.4194	2.3226	3.7856
1	226.1590	0.0854	1.7570	0.1697	4.4816	1.9207	3.3709
10	507.6642	0.2471	3.9957	0.2536	9.1825	3.9354	3.7303
$R/h = 20$							
0	4.8838	0.0101	21.0224	0.2643	49.8812	21.3777	19.2160
0.1	5.2778	0.0182	13.8048	0.2376	34.7574	14.8960	18.7178
0.2	5.6583	0.0203	9.7871	0.2152	25.9384	11.1165	18.2595
1	8.2678	0.0429	6.8540	0.1312	21.8030	9.3441	15.8677
10	18.5590	0.1536	15.4408	0.1938	43.2432	18.5328	18.4692
$R/h = 100$							
0	0.1928	0.0019	101.0044	0.2528	237.5102	101.7901	95.9692
0.1	0.2081	0.0122	66.2309	0.2270	165.9082	71.1035	93.3165
0.2	0.2228	0.0156	46.8951	0.2054	124.1057	53.1881	90.8971
1	0.3240	0.0382	32.6278	0.1246	106.3988	45.5995	78.5827
10	0.7273	0.1426	73.2942	0.1834	204.5827	87.6782	92.7428

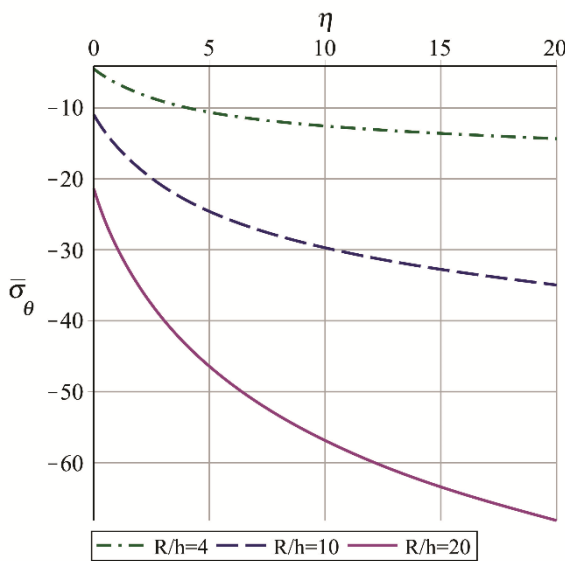




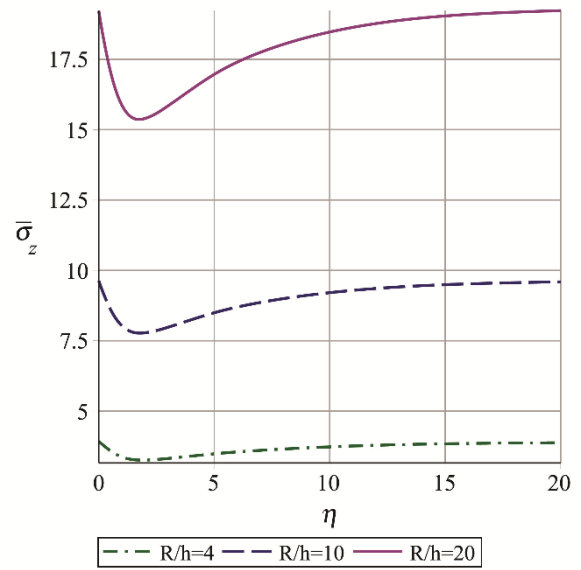
a) Sự thay đổi của chuyển vị  $\bar{w}$  ở giữa vỏ  $\xi = \xi_0 / 2, z = 0$



b) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  tại biên  $\xi = 0, z = -h / 2$



c) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  tại biên  $\xi = 0, z = -h / 2$



d) Sự thay đổi của ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  tại biên  $\xi = 0, z = -h / 4$

Hình 4.11. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta$  với chiều dày tương đối  $R / h$  khác nhau.

Chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z$  trong tính toán với chiều dày tương đối của vỏ trụ khác nhau và có chỉ số tỷ lệ thể tích thay đổi thể hiện trong Bảng 4.4. Trong Hình 4.11 cho thấy chuyển vị không thứ

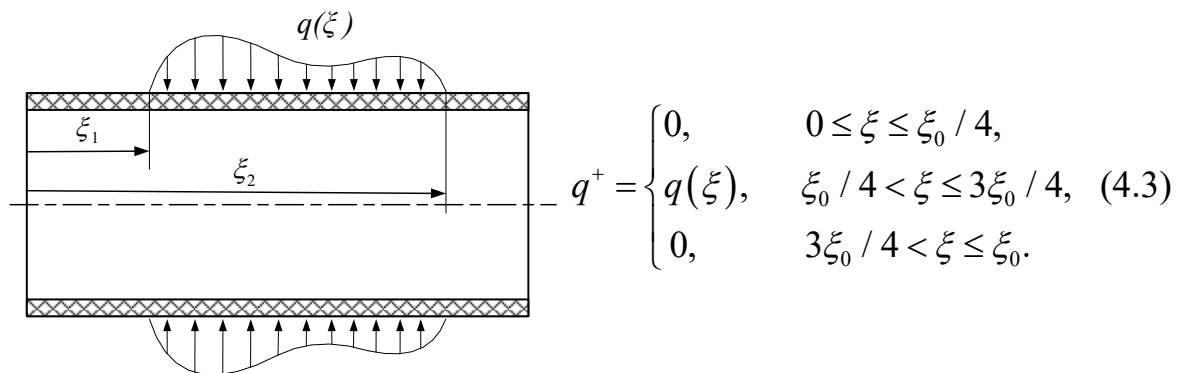
nguyên  $\bar{w}$  và ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\sigma}_z$  thay đổi ngược lại với chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta$  trong tương quan chiều dày tương đối  $R/h$  thay đổi.

Kết quả tính toán cho thấy rằng giá trị tuyệt đối của chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_\xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$  tăng khi hệ số  $\eta$  tăng lên. Ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_z$  trong các trường hợp đều đạt giá trị cực tiểu khi có chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta = 1.8$ . Đây là kết quả quan trọng, thể hiện ảnh hưởng của tính không đồng nhất đối với kết cấu vật liệu FGM.

#### 4.1.5. Nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tác dụng của các dạng tải cơ

Để đánh giá ứng xử vỏ trụ FGM khi chịu tác dụng của các dạng tải trọng khác nhau, ta xét mô hình đặt tải như Hình 4.12, khoảng đặt lực như (4.3).

Các thông số đầu vào phục vụ tính toán bao gồm: bán kính vỏ  $R = 1$  m, bề mặt trong là thép [127] Ti-6Al-4V với  $\mu_m = 0.298$ ,  $E_m = 105.7$  GPa, bề mặt ngoài là gốm [25] ceramic Alumina ( $Al_2O_3$ ) với  $\mu_c = 0.3$ ,  $E_c = 380$  GPa, chiều dài vỏ  $L = 2$  m,  $R/h = 20$ , hệ số phân bố vật liệu  $\eta = 1$ . Vỏ ngàm chặt hai đầu và chịu tác dụng của tải trọng cục bộ phân bố ở mặt ngoài.

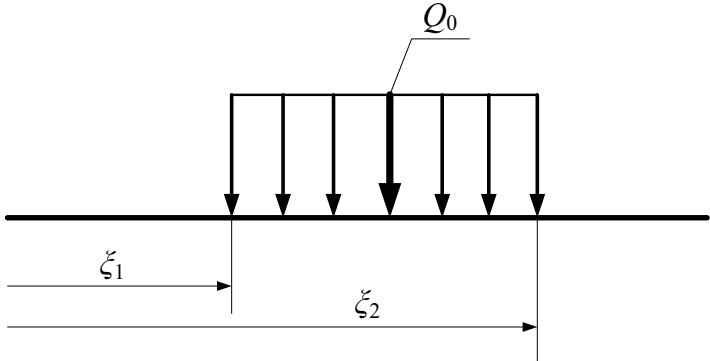
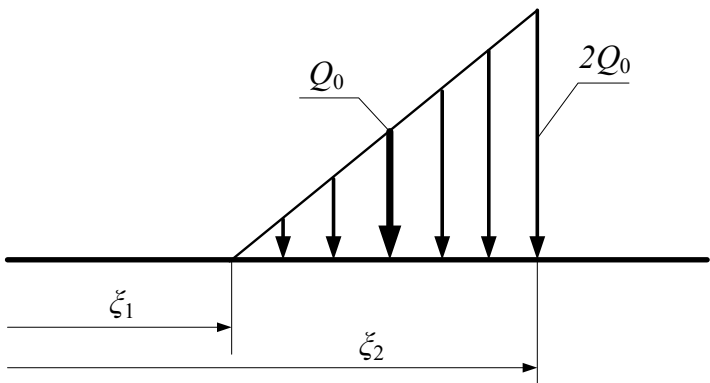


Hình 4.12. Vị trí đặt tải trọng cục bộ

Xét các dạng tải trọng phân bố cục bộ theo các quy luật hàm parabol, hàm tuyến tính, hàm sin và hằng số (Bảng 4.5). Các tải trọng phân bố cục bộ nêu trên có tổng hợp lực bằng nhau và bằng  $Q_0(\xi_2 - \xi_1)$ . Để đảm bảo vị trí

ngiên cứu có giá trị tải trọng tương đối tương đồng, ta xét vị trí  $\xi_3$  có tải trọng phân bố đạt độ lớn bằng  $Q_0$  (Bảng 4.5) tương ứng với từng dạng tải trọng. Tại đây, ta nghiên cứu, đánh giá ảnh hưởng của các dạng tải trọng khác nhau đối với chuyển vị và ứng suất. Xét  $Q_0 = 1 \text{ Pa}$ , các ứng suất và chuyển vị không thứ nguyên tính theo (4.2). Kết quả tính toán, so sánh được trình bày trên Bảng 4.6 và đồ thị Hình 4.13.

Bảng 4.5. Quy luật phân bố của một số dạng tải trọng

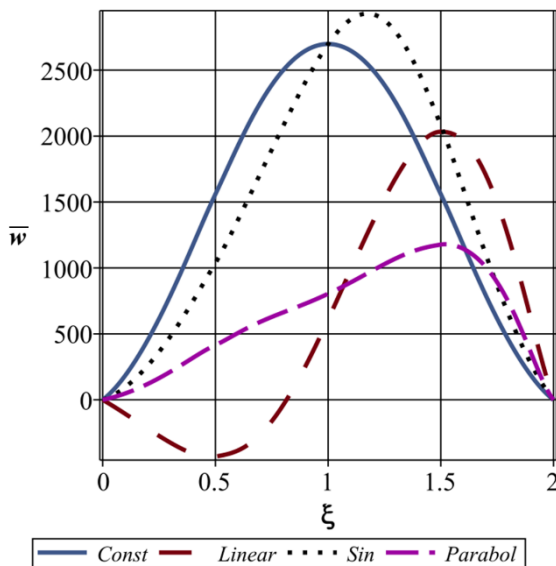
Sơ đồ tải trọng	Quy luật phân bố tải trọng $q(\xi)$	Vị trí đạt $Q_0$ ( $\xi_3$ )
	$Q_0(\xi_2 - \xi_1)$	$\xi_1 + \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{2}$
	$2Q_0 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$	$\xi_1 + \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{2}$

	$Q_0 + \sin \frac{2\pi(\xi - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$	$\xi_1 + \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{2}$
	$3Q_0 \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right)^2$	$\xi_1 + \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{\sqrt{3}}$

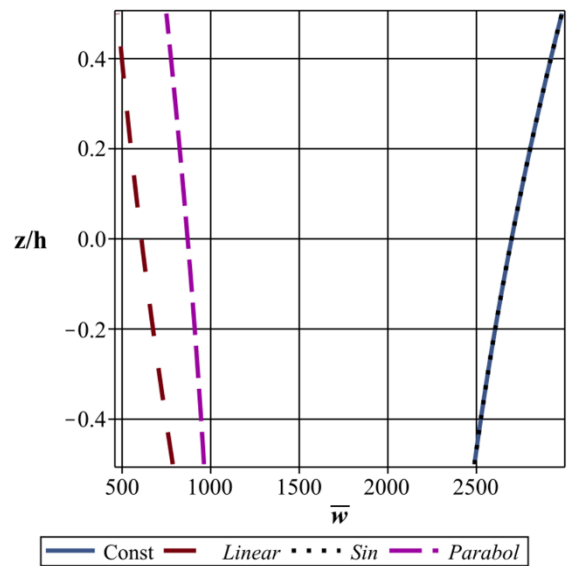
Bảng 4.6. Ảnh hưởng của các dạng tải trọng tới chuyển vị  $\bar{w}$  và ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{\xi z}, \bar{\sigma}_z$

$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$		$\bar{\sigma}_\theta$		$\bar{\tau}_{\xi z}$		$\bar{\sigma}_z$	
$(\xi_3, \theta)$	$(\xi_3, \theta)$	$(\xi_0, \theta)$	$(\xi_3, \theta)$	$(\xi_0, \theta)$	$(\xi_3, \theta)$	$(\xi_0, \theta)$	$(\xi_3, \theta)$	$(\xi_0, \theta)$
$(z = 0)$	$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm 3h/8)$		$(z = \pm h/4)$	
Tải trọng phân bố đều $q(\xi) = Q_0(\xi_2 - \xi_1)$								
2698.35	1.4795	-1.2088	1.7877	-0.5181	0.0000	-0.0836	0.8278	-0.1415
	-0.1639	0.9374	0.5870	0.4017	0.0000	-0.2911	0.2605	0.4656
Tải trọng phân bố tuyến tính $q(\xi) = 2Q_0 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$								
608.92	-0.0087	-4.5420	0.1132	-1.9466	0.3572	-1.3717	-0.0044	-1.5334

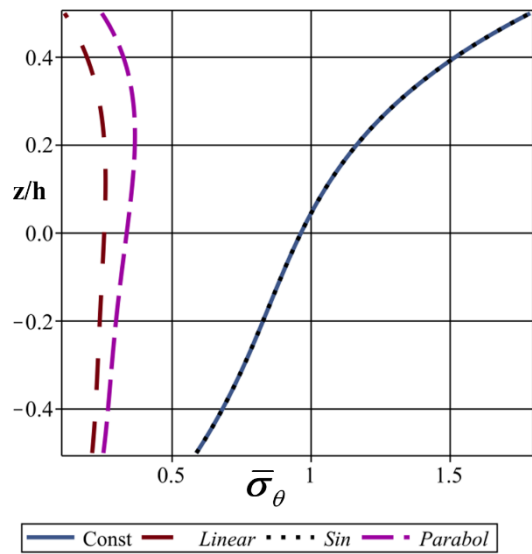
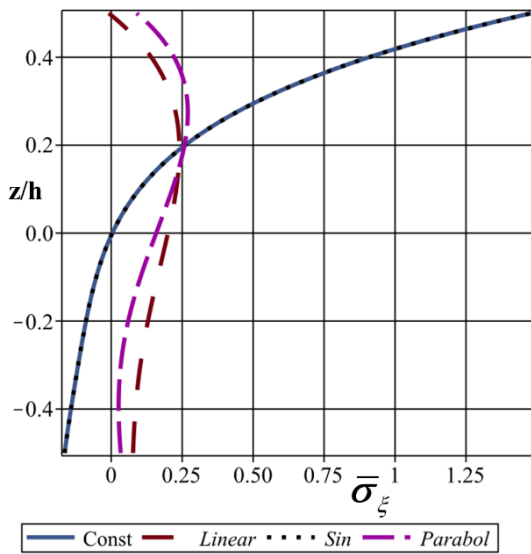
	0.0769	1.3695	0.2124	0.5869	0.2215	0.2987	0.0451	1.5382
Tải trọng phân bố hình sin $q(\xi) = Q_0 + \sin \frac{2\pi(\xi - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$								
2698.35	1.4795	-1.7700	1.7877	-0.7586	0.4286	-0.1831	0.8278	-0.2227
	-0.1639	1.1088	0.5870	0.4752	0.1173	-0.3879	0.2605	0.5624
Tải trọng phân bố theo hàm parabol $q(\xi) = 3Q_0 \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right)^2$								
869.72	0.0897	-3.1967	0.2472	-1.3700	0.0770	-1.1044	0.0659	-1.9881
	0.0356	1.0596	0.2529	0.4541	0.0576	-0.0116	0.0690	1.8500



a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$

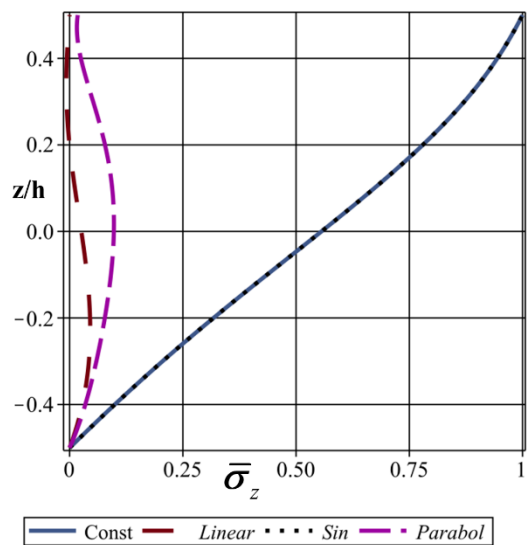
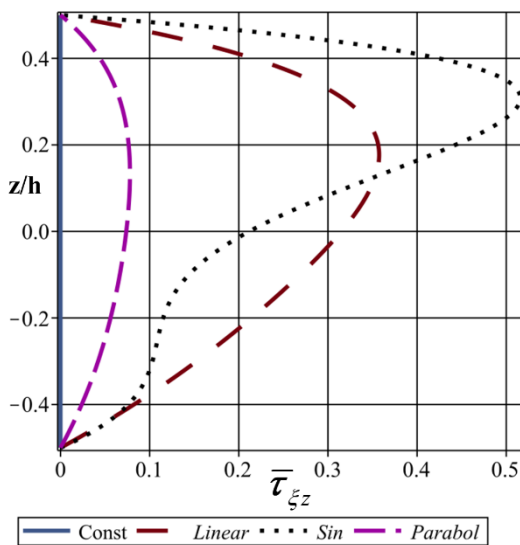


b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày  $z/h$  tại vị trí có giá trị  $Q_0$



c) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  theo chiều dày  $z/h$  tại vị trí có giá trị  $Q_0$

d) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  theo chiều dày  $z/h$  tại vị trí có giá trị  $Q_0$



e) Ứng suất  $\bar{\tau}_{\xi z}$  theo chiều dày  $z/h$  tại vị trí có giá trị  $Q_0$

f) Ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  theo chiều dày  $z/h$  tại vị trí có giá trị  $Q_0$

Hình 4.13. Ảnh hưởng của các dạng tải trọng tới chuyển vị và ứng suất

Từ số liệu Bảng 4.6 và đồ thị Hình 4.13 ở cho thấy, với tải trọng phân bố đều và tải Sin cho chuyển vị lớn hơn so với tải trọng phân bố tuyến tính và tải trọng Parabol, trong đó tải trọng dạng Sin cho chuyển vị lớn nhất, tải trọng

Parabol cho chuyển vị nhỏ nhất. Tại vị trí độ lớn các tải là  $Q_0$  giá trị chuyển vị và ứng suất của tải phân bố đều và tải Sin cũng có giá trị tuyệt đối lớn hơn hẳn so với tải phân bố tuyến tính và tải Parabol. Tuy nhiên tại vùng biên có biên độ tải lớn ( $\xi = \xi_0$ ) với tải phân bố tuyến tính hay tải Parabol thì giá trị tuyệt đối của ứng suất với hai dạng tải này lớn hơn hẳn với dạng tải phân bố đều và tải Sin. Điều này cho thấy với quy luật tải phân bố tuyến tính và tải Parabol sẽ làm tăng sự tập trung ứng suất tại vùng biên (phía có biên độ tải lớn).

#### 4.2. Nghiên cứu vỏ chỉ chịu tác dụng của nhiệt độ

Trong phần nghiên cứu vỏ FGM chịu tải nhiệt độ, với giả thiết nhiệt độ trên toàn bề mặt là như nhau, chỉ thay đổi theo hướng chiều dày và đối xứng trục. Quy luật phân bố tỷ lệ thể tích xác định theo công thức (2.6).

Nghiên cứu vỏ trụ FGM có hai đầu biên được ngàm chặt. Tại mặt trong vỏ, vật liệu [127] có các đặc tính sau: module đàn hồi  $E_{in} = 105.7$  GPa, hệ số dẫn nhiệt  $\kappa_{in} = 18.1$  W/mK và hệ số nở nhiệt  $\alpha_{in} = 6.9 \times 10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>. Các pha thành phần vật liệu đều có hệ số Poisson là  $\mu = 0.3$ . Các đặc tính hiệu dụng của FGM tính theo công thức sau:

$$E_{FGM}(z) = E_{in} (\bar{r})^\eta, \quad \alpha_{FGM}(z) = \alpha_{in} (\bar{r})^\eta, \quad \kappa_{FGM}(z) = \kappa_{in} (\bar{r})^\eta, \\ \bar{r} = \frac{r_{in} + z}{r_{in}}, \quad z = -\frac{h}{2} \div \frac{h}{2}. \quad (4.4)$$

Vỏ trụ có thông số hình học, với bán kính mặt trong  $r_{in} = 40$  mm, bán kính trung bình  $R = 50$  mm, chiều dài vỏ  $L = 0.2$  m.

##### 4.2.1. Nghiên cứu ảnh hưởng chênh lệch nhiệt độ bề mặt trong và ngoài

Nhiệt độ mặt ngoài cố định  $T_o = 25$  °C, nhiệt độ môi trường  $T_{ref} = 25$  °C, nhiệt độ mặt trong thay đổi theo các mốc nhiệt độ như sau  $T_{in} = \{75, 125, 175, 225\}$  °C. Vỏ trụ FGM có chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta = 1$ , chiều

dày tương đối  $R/h=5$ . Độ võng tương đối  $\bar{w}$  và chênh nhiệt độ giữa bề mặt trong và ngoài tính như sau:

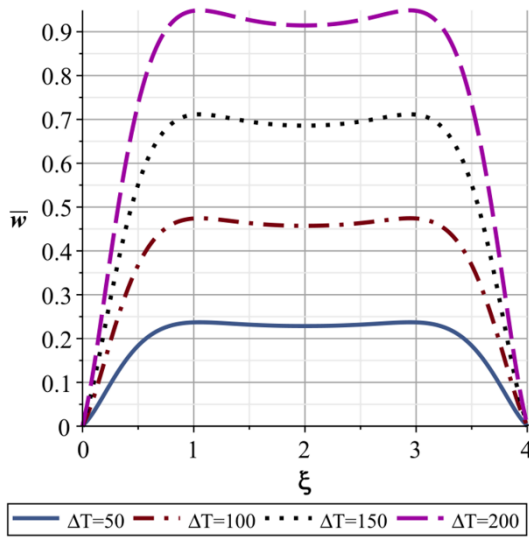
$$\Delta T = T_i - T_o; \quad \bar{w} = \frac{w}{R} \times 10^3 \quad (4.5)$$

Kết quả ảnh hưởng sự chênh lệch nhiệt độ tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ cho ở Bảng 4.7 và đồ thị Hình 4.14.

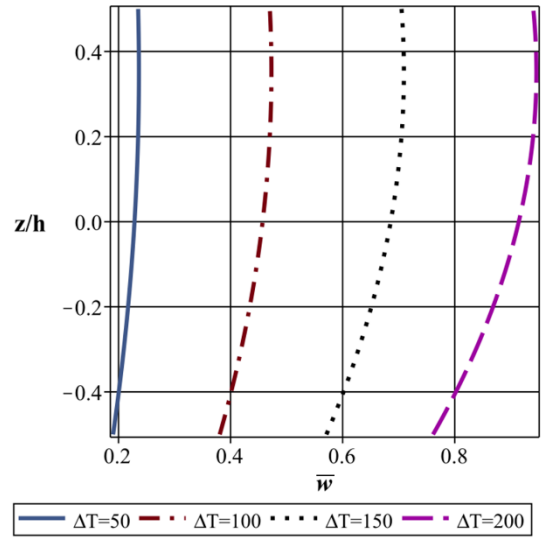
Bảng 4.7. Ảnh hưởng sự chênh lệch nhiệt độ tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ

$\Delta T$ °C	$\bar{w}$	$\sigma_\xi$ MPa		$\sigma_\theta$ MPa		$\tau_{\xi z}$ MPa		$\sigma_z$ MPa	
	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$
	$(z=0)$	$(z=\pm h/2)$		$(z=\pm h/2)$		$(z=\pm 3h/8)$		$(z=\pm h/4)$	
50	0.2286	-74.00	6.43	-31.71	29.09	27.33	0.00	-15.68	-1.035
		-43.62	-46.57	-70.79	-28.60	-28.52	0.00	-61.16	-1.135
100	0.4572	-148.00	12.87	-63.43	58.18	54.66	0.00	-31.36	-2.069
		-87.25	-93.15	-141.58	-57.20	-57.04	0.00	-122.32	-2.270
150	0.6857	-221.99	19.30	-95.14	87.28	82.00	0.00	-47.05	-3.104
		-130.87	-139.72	-212.37	-85.80	-85.56	0.00	-183.48	-3.405
200	0.9143	-295.99	25.73	-126.85	116.37	109.33	0.00	-62.73	-4.139
		-174.50	-186.30	-283.16	-114.40	-114.08	0.00	-244.94	-4.540

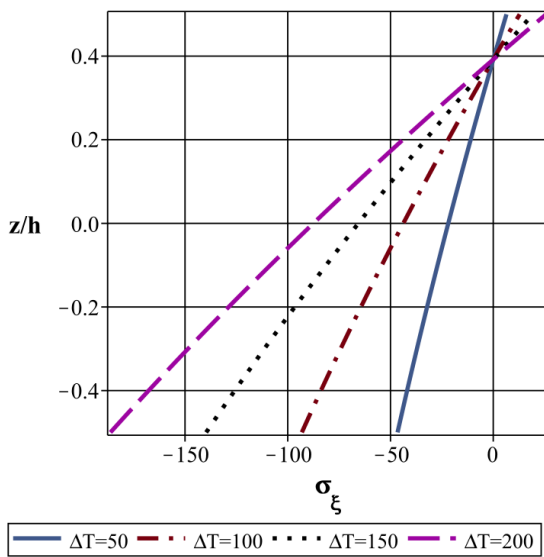




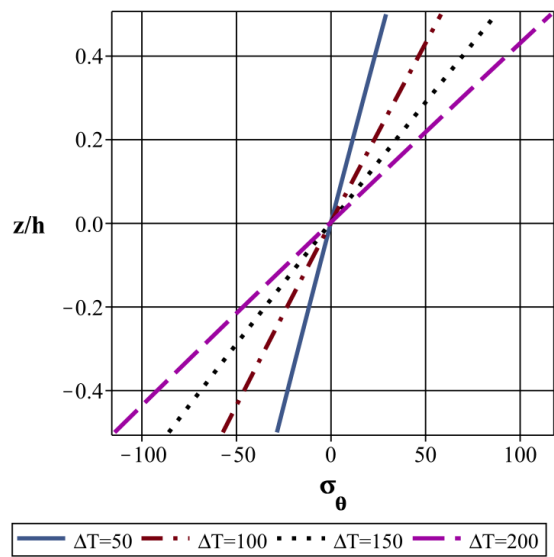
a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$



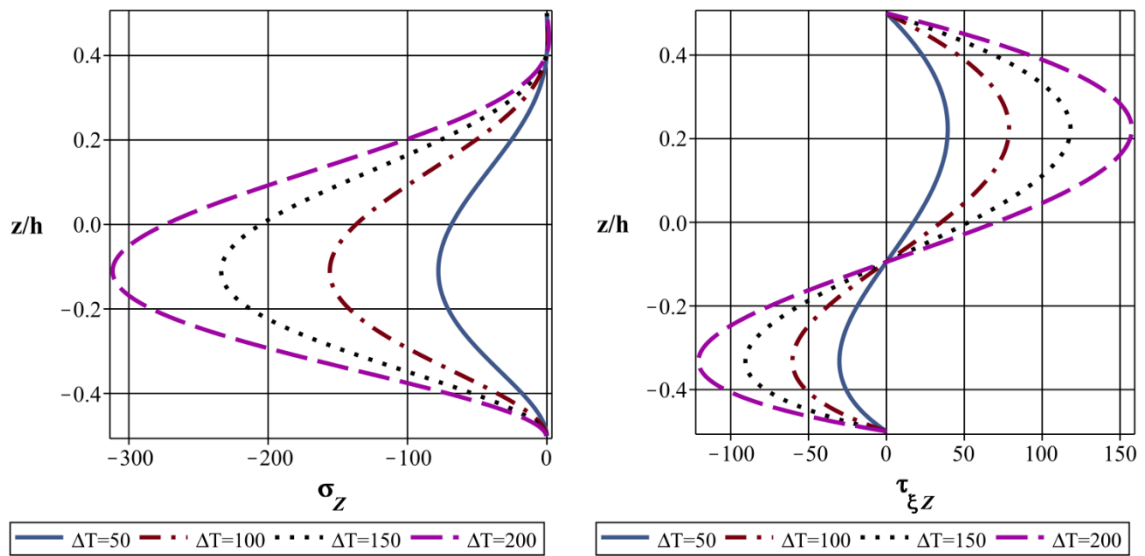
b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



c) Ứng suất  $\sigma_\xi$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



d) Ứng suất  $\sigma_\theta$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



e) Ứng suất  $\sigma_z$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

f) Ứng suất  $\tau_{\xi z}$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

Hình 4.14. Ảnh hưởng của chênh lệch nhiệt độ tới biến dạng và ứng suất của vỏ trụ FGM

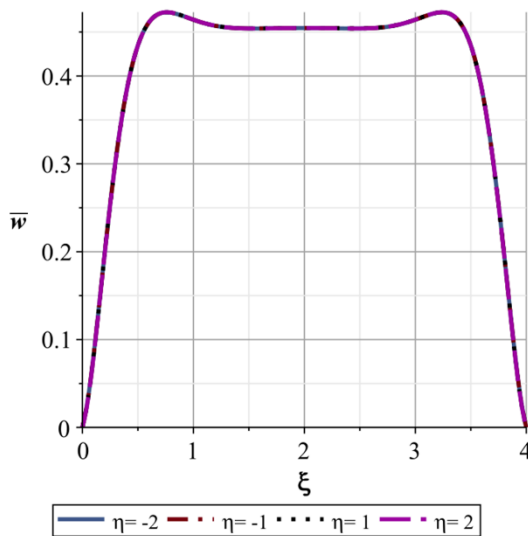
Từ kết quả ở Bảng 4.7 và đồ thị Hình 4.14 cho thấy, sự chênh lệch nhiệt độ giữa bề mặt trong và bề mặt ngoài có ảnh hưởng lớn tới chuyển vị và trạng thái ứng suất của vỏ trụ FGM. Khi chênh lệch nhiệt độ ở bề mặt trong và ngoài tăng thì sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất tại các vị trí cũng tăng tương ứng. Tương tự như đối với trường hợp vỏ chịu tác dụng của tải trọng cơ thuần túy, khi chịu tải trọng nhiệt ở vùng biên ngàm cũng xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất, ứng suất  $\sigma_z$  có giá trị cực đại xấp xỉ bằng 75% so với giá trị cực đại của ứng suất pháp  $\sigma_\xi$ , ứng suất  $\tau_{\xi z}$  cũng có giá trị tương đối lớn ở vùng biên.

#### 4.2.2. Nghiên cứu ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích

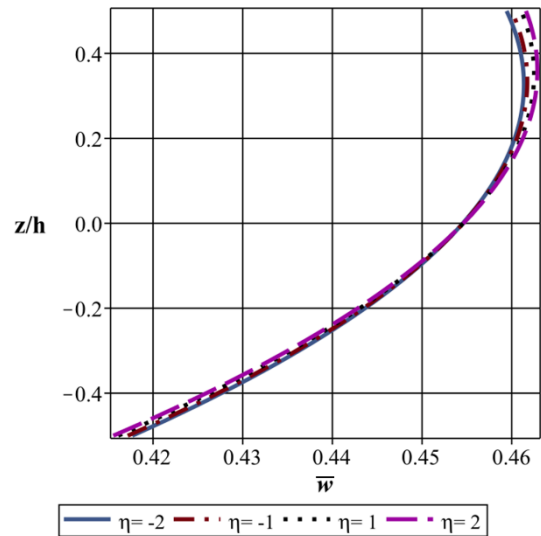
Xét vỏ trụ FGM có  $T_{in} = 125$  °C,  $R/h = 10$ , và chỉ số tỷ lệ thể tích có các giá trị  $\eta = -2, -1, 1, 2$ . Chuyển vị không thứ nguyên  $\bar{w}$  tính theo (4.5).

Bảng 4.8. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích phân bố vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ

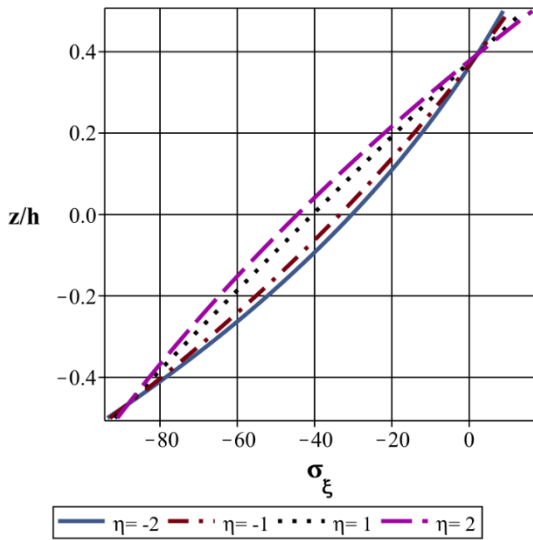
$\eta$	$\bar{w}$	$\sigma_\xi$ MPa		$\sigma_\theta$ MPa		$\tau_{\xi z}$ MPa		$\sigma_z$ MPa	
		$(0, \theta)$	$(\frac{\xi_0}{2}, \theta)$	$(0, \theta)$	$(\frac{\xi_0}{2}, \theta)$	$(0, \theta)$	$(\frac{\xi_0}{2}, \theta)$	$(0, \theta)$	$(\frac{\xi_0}{2}, \theta)$
	$(z=0)$	$(z=\pm h/2)$		$(z=\pm h/2)$		$(z=\pm 3h/8)$		$(z=\pm h/4)$	
-2	0.4545	-105.76	8.80	-45.33	39.05	34.05	0.00	-14.20	-0.782
		-86.16	-93.59	-141.12	-56.40	-56.50	0.00	-115.38	-0.989
-1	0.4546	-115.96	10.34	-49.70	43.81	38.07	0.00	-18.29	-0.851
		-85.75	-92.97	-140.94	-55.82	-57.81	0.00	-117.06	-1.010
1	0.4546	-139.35	14.09	-59.72	55.07	47.34	0.00	-28.02	-1.005
		-84.78	-91.67	-140.52	-54.63	-60.42	0.00	-120.35	-1.053
2	0.4546	-152.73	16.35	-65.46	61.70	52.67	0.00	-33.76	-1.092
		-84.23	-91.03	-140.29	-54.02	-61.72	0.00	-121.93	-1.074



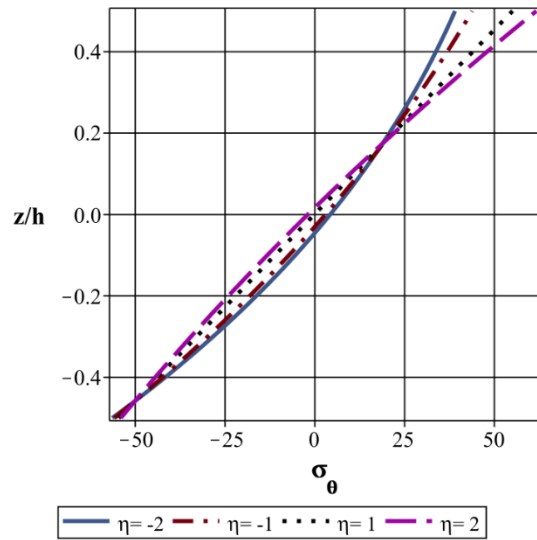
a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$



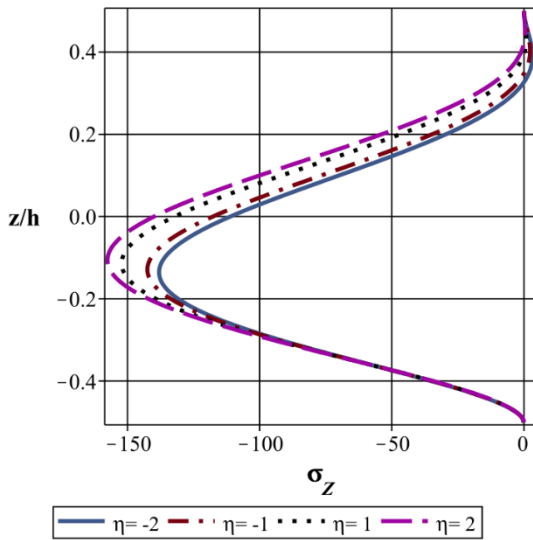
b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



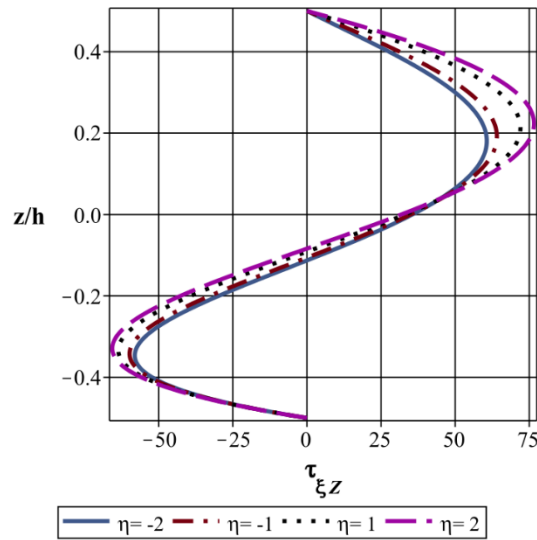
b) Ứng suất  $\sigma_{\xi}$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



c) Ứng suất  $\sigma_{\theta}$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



d) Ứng suất  $\sigma_z$  theo chiều dày  $z/h$  tại biên  $\xi = 0$



e) Ứng suất  $\tau_{\xi z}$  theo chiều dày  $z/h$  tại biên  $\xi = 0$

Hình 4.15. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích phân bố vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ

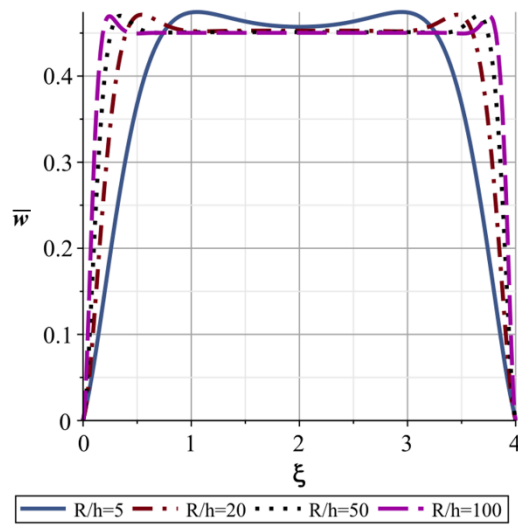
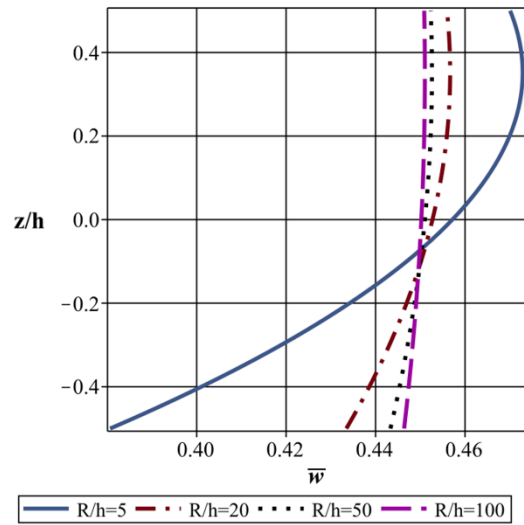
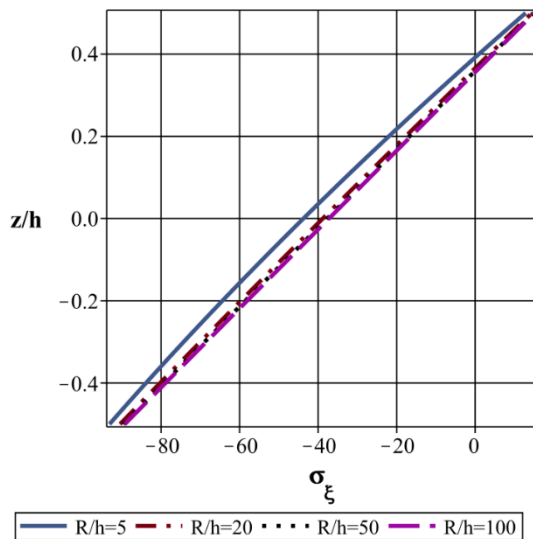
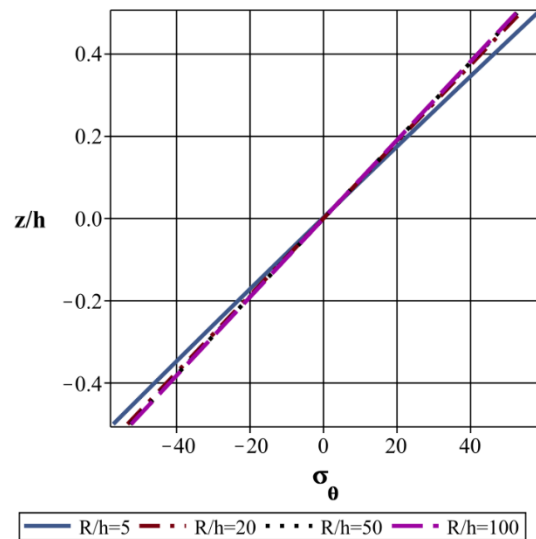
Kết quả từ số liệu Bảng 4.8 và đồ thị Hình 4.15 cho thấy rằng, khi thay đổi chỉ số tỷ lệ thể tích thì chuyển vị theo chiều dài gần như không đổi, chuyển vị và ứng suất theo chiều dày có thay đổi, tuy nhiên sự thay đổi không lớn trong trường hợp được xét. Như vậy khi thay đổi chỉ số tỷ lệ thể tích phân bố vật liệu không làm thay đổi nhiều tới trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM.

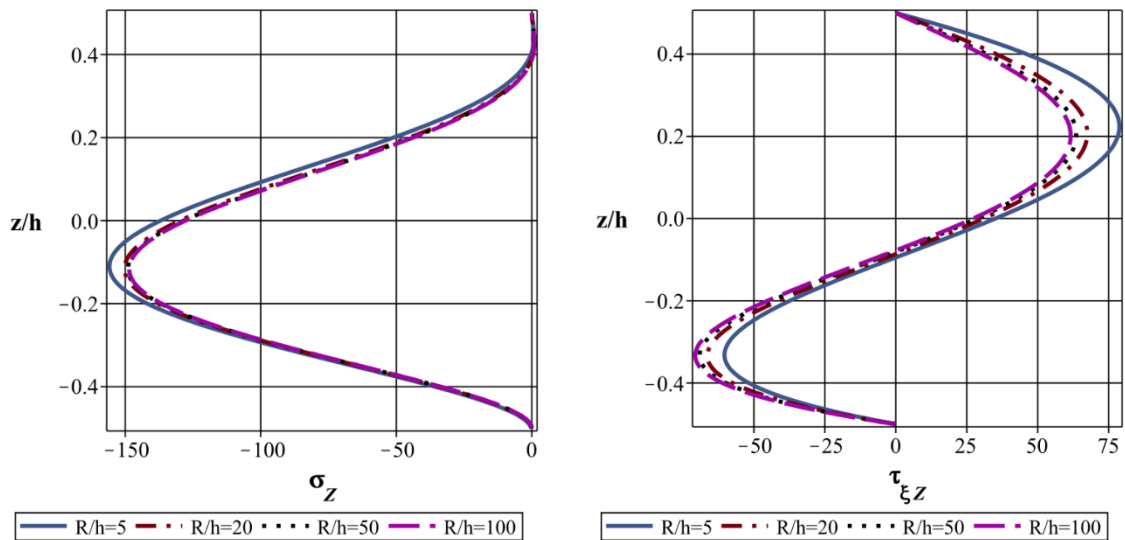
#### 4.2.3. Nghiên cứu ảnh hưởng của chiều dày

Xét vỏ trụ FGM có  $T_{in} = 125$  °C, chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta = 1$  và có chiều dày tương đối  $R/h$  thay đổi. Chuyển vị không thứ nguyên  $\bar{w}$  tính theo (4.5).

Bảng 4.9. Ảnh hưởng chiều dày tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng của nhiệt độ

$\frac{R}{h}$	$\bar{w}$	$\sigma_\xi$ MPa		$\sigma_\theta$ MPa		$\tau_{\xi z}$ MPa		$\sigma_z$ MPa	
		$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$
	$(z = 0)$	$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm 3h/8)$		$(z = \pm h/4)$	
5	0.4572	-148.00	12.87	-63.43	58.18	54.66	0.00	-31.36	-2.069
		-87.25	-93.15	-141.58	-57.20	-57.04	0.00	-122.32	-2.270
20	0.4527	-133.80	14.47	-57.34	53.54	42.78	0.00	-26.66	-0.495
		-84.88	-90.46	-140.57	-53.32	-63.06	0.00	-119.20	-0.507
50	0.4510	-128.79	14.88	-55.20	52.67	39.02	0.00	-25.91	-0.196
		-86.46	-89.61	-141.25	-52.58	-65.65	0.00	-118.39	-0.198
100	0.4502	-126.14	15.09	-54.06	52.38	37.21	0.00	-25.65	-0.098
		-87.82	-89.25	-141.83	-52.33	-67.04	0.00	-118.08	-0.098

a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$ b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày  $z/h$   
tại  $\xi = \xi_0 / 2$ c) Ứng suất  $\sigma_\xi$  theo chiều dày  
 $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$ d) Ứng suất  $\sigma_\theta$  theo chiều dày  
 $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



e) Ứng suất  $\sigma_z$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

f) Ứng suất  $\tau_{\xi z}$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

Hình 4.16. Ảnh hưởng của chiều dày tương đối tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM chịu tải trọng nhiệt độ

Với kết quả số liệu từ Bảng 4.9 và đồ thị ở Hình 4.16 cho thấy rằng, khi chiều dày của vỏ trụ thay đổi thì chuyển vị và ứng suất cũng thay đổi, sự thay đổi ở vùng biên lớn hơn vùng xa biên, nhưng giá trị thay đổi không nhiều. Khi vỏ càng mỏng thì sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất ít, ngược lại vỏ dày thì sự thay đổi lớn hơn. Ảnh hưởng của chiều dày khi vỏ chịu tải nhiệt cũng khác với vỏ chịu tải cơ, vì khi vỏ chịu tải cơ, ảnh hưởng của chiều dày rõ nét hơn.

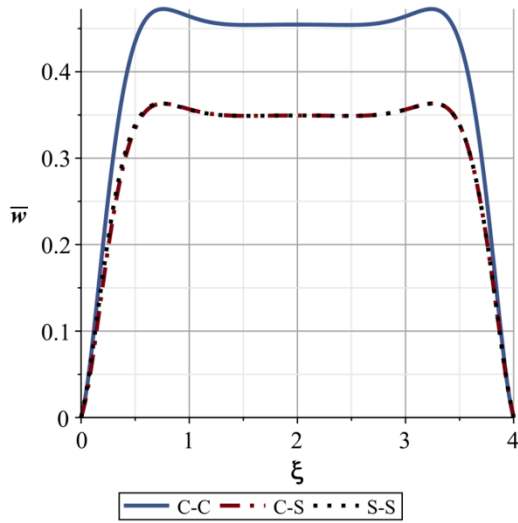
#### 4.2.4. Nghiên cứu ảnh hưởng của điều kiện biên

Xét vỏ trụ FGM có thông số nhiệt độ  $T_o = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , nhiệt độ môi trường  $T_{ref} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_{in} = 125 \text{ }^\circ\text{C}$ . Vỏ trụ FGM có chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta = 1$ , chiều dày tương đối  $R/h$  nhận các giá trị khác nhau bằng 5, 10, 20. Khảo sát vỏ trụ FGM với các điều kiện biên khác nhau được thể hiện ở Bảng 4.10 và đồ thị Hình 4.17. Chuyển vị không thứ nguyên  $\bar{w}$  tính theo (4.5).

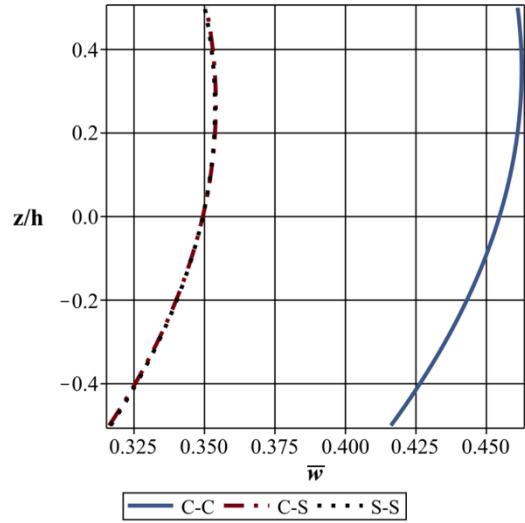
Bảng 4.10. Ảnh hưởng của điều kiện biên tới chuyển vị không thứ nguyên  $\bar{w}$  và ứng suất  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{\xi z}$ ,  $\sigma_z$

Điều kiện biên	$\bar{w}$	$\sigma_\xi$ MPa		$\sigma_\theta$ MPa		$\tau_{\xi z}$ MPa		$\sigma_z$ MPa	
	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$
	$(z = 0)$	$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm 3h/8)$		$(z = \pm h/4)$	
$L = 8R, R/h = 5, \Delta T = 100^\circ\text{C}, \eta = 1$									
C-C	0.4542	-144.67	15.06	-62.00	58.43	53.86	0.00	-30.26	-2.077
		-86.39	-92.46	-141.21	-57.31	-56.91	0.00	-122.16	-2.276
C-S	0.3540	-53.68	58.21	-23.01	58.43	31.85	0.00	0.16	-2.077
		-62.63	-57.15	-131.03	-57.31	-53.21	0.00	-117.60	-2.276
S-S	0.3540	0.00	58.21	0.00	58.43	19.93	0.00	1.34	-2.077
		0.00	-57.15	-140.19	-57.31	-39.71	0.00	-118.82	-2.276
$L = 4R, R/h = 10, \Delta T = 100^\circ\text{C}, \eta = 1$									
C-C	0.4546	-139.35	14.09	-59.72	55.07	47.34	0.00	-28.02	-1.005
		-84.78	-91.69	-140.52	-54.63	-60.42	0.00	-120.35	-1.053
C-S	0.3494	-51.43	55.06	-22.04	55.72	26.79	0.00	1.48	-1.005
		-59.54	-54.59	-129.71	-54.62	-55.40	0.00	-114.81	-1.053
S-S	0.3494	0.00	49.17	0.00	49.13	13.21	0.00	7.82	-0.925
		0.00	-55.24	-104.19	-55.22	-40.94	0.00	-116.42	-1.031
$L = 2R, R/h = 20, \Delta T = 100^\circ\text{C}, \eta = 2$									
C-C	0.4555	-143.14	13.36	-61.35	56.33	45.88	0.00	-30.43	-0.513
		-85.43	-90.73	-140.80	-52.88	-63.91	0.00	-120.14	-0.510
C-S	0.3465	-51.75	56.09	-22.18	56.41	25.23	0.00	0.40	-0.514
		-58.92	-52.46	-129.44	-52.93	-57.96	0.00	-114.42	-0.511
S-S	0.3464	0.00	56.12	0.00	56.41	14.28	0.00	6.04	-0.514
		0.00	-52.48	-104.19	-52.95	-44.76	0.00	-120.07	-0.511

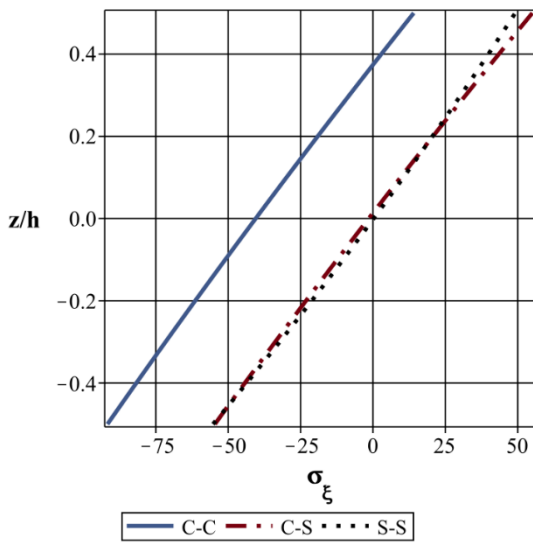




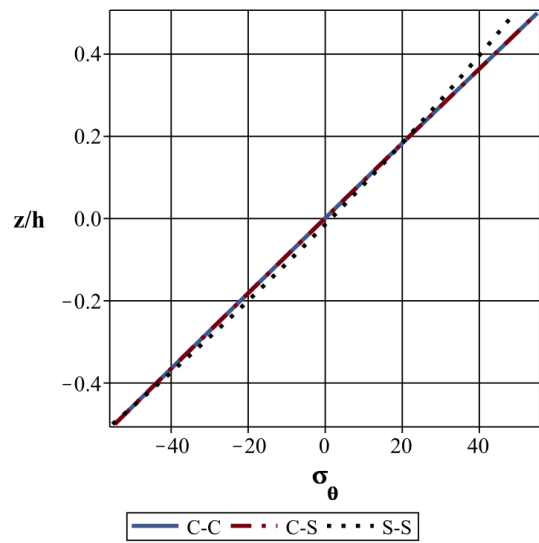
a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$



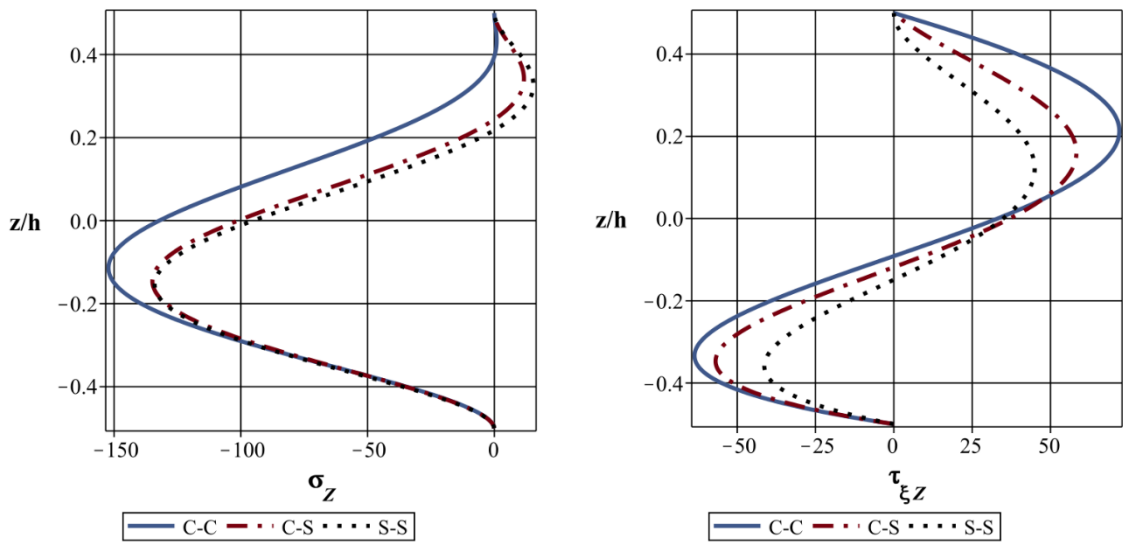
b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



c) Sự thay đổi của ứng suất  $\sigma_\xi$  theo chiều dày tại  $\xi = \xi_0 / 2$



d) Sự thay đổi của ứng suất  $\sigma_\theta$  theo chiều dày tại  $\xi = \xi_0 / 2$



e) Sự thay đổi của ứng suất  $\sigma_z$  theo chiều dày tại  $\xi = 0$

f) Sự thay đổi của ứng suất  $\tau_{xz}$  theo chiều dày tại  $\xi = 0$

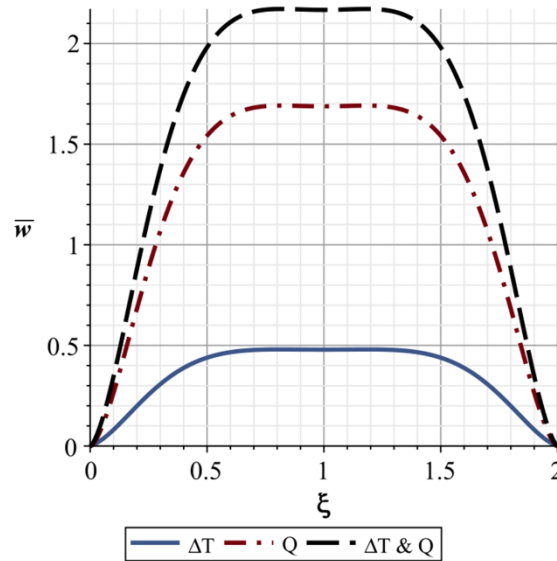
Hình 4.17. Sự thay đổi của chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ với  $L = 4R$ ,  $R/h = 10$ ,  $\eta = 1$ ,  $\Delta T = 100$  °C.

Từ kết quả số liệu Bảng 4.10 và các đồ thị trên Hình 4.17, cho thấy khi điều kiện biên thay đổi dẫn tới chuyển vị  $\bar{w}$  và trạng thái ứng suất cũng thay đổi theo. Khi vỏ trụ FGM ngâm hai đầu, chuyển vị là lớn so với vỏ chịu các điều kiện biên C-S và S-S. Các ứng suất cắt  $\sigma_z$  và  $\tau_{xz}$  tập trung ở vùng biên (với biên ngâm có giá trị lớn hơn), khi ra xa biên các thành phần ứng suất này có giá trị rất nhỏ. Mặt khác, khi chịu tác dụng của tải trọng nhiệt độ, hiện tượng tập trung ứng suất cũng xuất hiện tại vùng biên đối với biên tựa đơn. Đây là điểm khác biệt so với trường hợp vỏ chỉ chịu tác dụng của tải trọng cơ học thuần túy.

### 4.3. Nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tác dụng đồng thời tải trọng cơ và nhiệt

Phần này luận án tập trung nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tác đồng thời của tải cơ-nhiệt, với giả thiết tải trọng cơ đối xứng trục, phân bố đều trên bề mặt, tải nhiệt định nghĩa như phần 4.2 và quy luật phân bố tỷ lệ thể tích vật liệu định nghĩa theo công thức (2.6), các tính chất hiệu dụng theo (4.4), vật liệu FGM nghiên cứu tương tự như mục 4.2.

Xét vỏ trụ FGM có nhiệt độ bên trong và ngoài lần lượt là  $T_{in} = 125 \text{ }^\circ\text{C}$  và  $T_o = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , nhiệt độ môi trường  $T_{ref} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Tải áp suất bên trong vỏ là  $Q_{in} = 20 \text{ MPa}$ . Vỏ trụ FGM có chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta = 1$ , chiều dày tương đối  $R/h = 10$ , chiều dài vỏ  $L = 0.1 \text{ m}$ . Chuyển vị  $\bar{w}$  tính theo (4.5):



Hình 4.18. Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$  dưới các dạng tải trọng:  $\Delta T$  - tải nhiệt,  $Q_{in}$  - tải cơ,  $\Delta T \& Q_{in}$  - tải nhiệt và cơ đồng thời.

Bảng 4.11. Ảnh hưởng của tải nhiệt, tải cơ và tải cơ-nhiệt tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM

Tải	$\bar{w}$	$\sigma_\xi$ MPa		$\sigma_\theta$ MPa		$\tau_{\xi z}$ MPa		$\sigma_z$ MPa	
	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$	$(0,0)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$	$(0,0)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$	$(0,0)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$	$(0,0)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, 0\right)$
	$(0)$	$(\pm h/2)$		$(\pm h/2)$		$(\pm 3h/8)$		$(\pm h/4)$	
$\Delta T$	0.4855	-143.68	11.48	-61.58	57.00	48.35	0.000	-29.46	-1.020
		-86.16	-93.04	-141.12	-52.29	-60.70	0.000	-120.67	-1.028
$Q_{in}$	1.6546	377.37	-42.89	161.73	-197.22	-3.39	0.000	142.06	4.689
		-505.75	-41.44	-216.75	-199.08	-49.52	0.000	-184.73	14.516
$\Delta T$	2.1401	521.05	-54.36	233.31	-254.22	-75.47	0.000	171.53	5.709

$Q_{in}$		-419.58	51.59	-75.63	-146.79	-13.79	0.000	-64.06	15.543
----------	--	---------	-------	--------	---------	--------	-------	--------	--------

Kết quả từ số liệu Bảng 4.11 và đồ thị Hình 4.18 cho thấy, trong trường hợp đang xét chuyển vị và trạng thái ứng suất của vỏ trụ FGM khi chỉ có tải nhiệt có giá trị nhỏ so với trường hợp chỉ có tải cơ và trường hợp có tải cơ-nhiệt. Điều này cho thấy, khi vỏ FGM dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt đồng thời chuyển vị và ứng suất trong vỏ sẽ tăng lên so với chỉ có tải nhiệt hoặc tải cơ.

#### 4.3.1. Nghiên cứu ảnh hưởng chênh lệch nhiệt độ bề mặt trong và ngoài

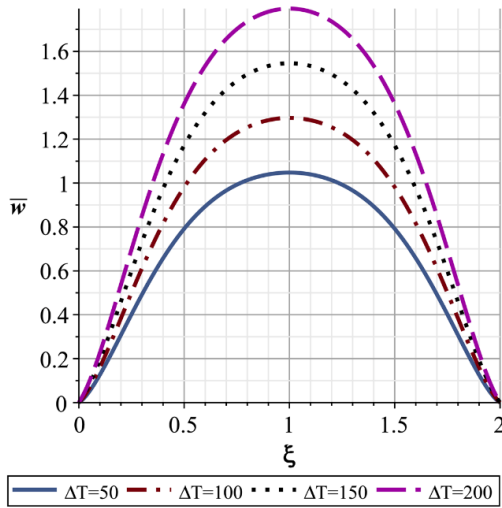
Vỏ trụ FGM có chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta = 1$ , chiều dày tương đối  $R/h = 5$ ,  $L = 0.1$  m. Tải phân bố đều ở bề mặt trong  $Q_{in} = 20$  MPa. Khoảng nhiệt độ bề mặt ngoài  $T_o = 25$  °C, nhiệt độ môi trường  $T_{ref} = 25$  °C, nhiệt bề mặt trong khác nhau lần lượt  $T_i = \{75, 125, 175, 225\}$  °C. Chuyển vị  $\bar{w}$  tính theo (4.5), ứng suất không thứ nguyên tính theo công thức dưới đây:

$$\{\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{\xi z}\} = \frac{\{\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\xi z}\}}{Q_{in}} \quad (4.6)$$

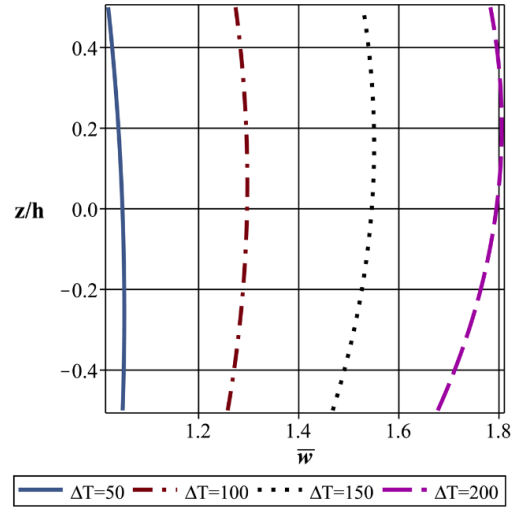
Bảng 4.12. Ảnh hưởng sự chênh lệch nhiệt độ tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời tải cơ-nhiệt

$\Delta T$ °C	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$		$\bar{\sigma}_\theta$		$\bar{\tau}_{\xi z}$		$\bar{\sigma}_z$	
		$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$
		$(z = 0)$	$(z = \pm h/2)$	$(z = \pm h/2)$	$(z = \pm h/2)$	$(z = \pm 3h/8)$	$(z = \pm 3h/8)$	$(z = \pm h/4)$	$(z = \pm h/4)$
50	1.0194	-2.380	13.159	-6.695	5.639	0.000	-2.286	0.284	4.187
		2.793	-9.724	-3.200	-1.563	0.000	-0.913	0.770	-1.246
100	1.2739	-2.906	17.043	-8.322	7.304	0.000	-4.248	0.340	5.034
		5.465	-7.513	-1.780	1.990	0.000	-0.056	0.828	1.814

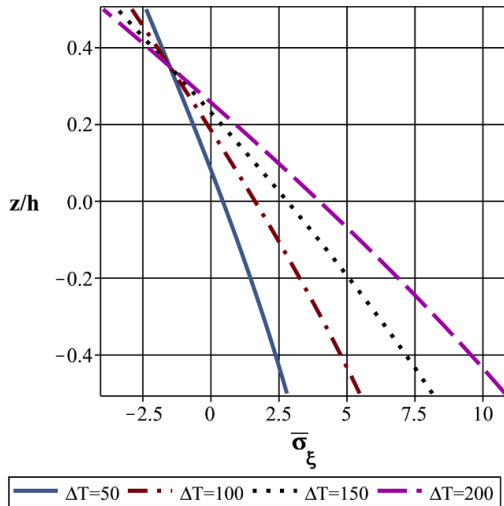
150	1.5284	-3.432	20.927	-9.950	8.9967	0.000	-6.209	0.396	5.881
		8.137	-5.302	-0.361	5.542	0.000	0.801	0.886	4.873
200	1.7829	-3.959	24.811	-11.577	10.633	0.000	-8.171	0.452	6.729
		10.810	-3.092	1.058	9.094	0.000	1.658	0.944	7.933



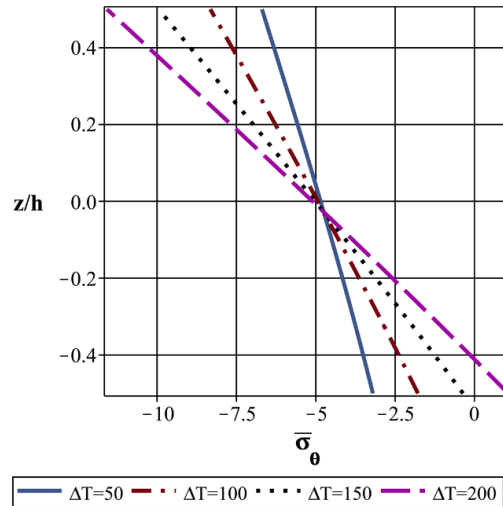
a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$



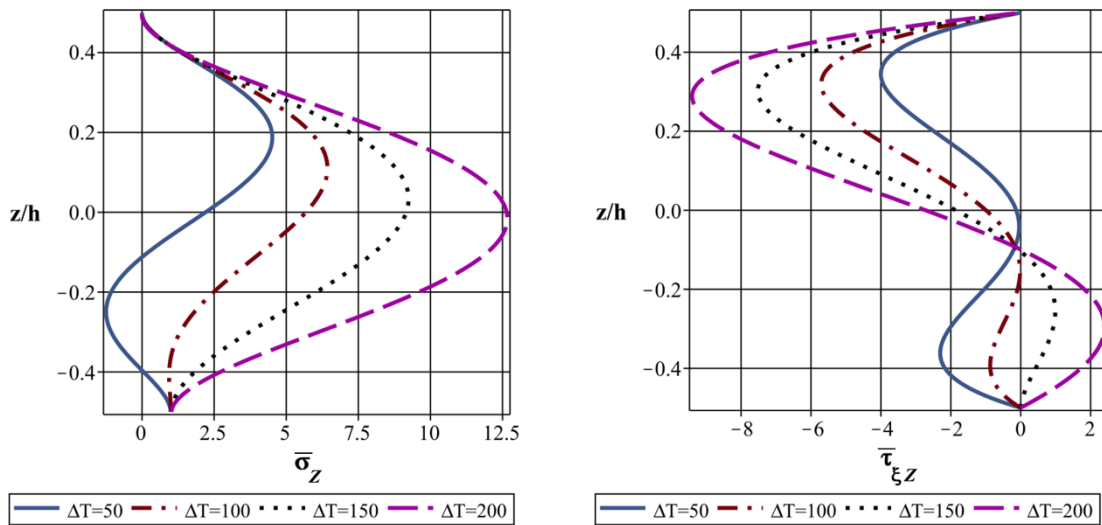
b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



c) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



d) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



e) Ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

f) Ứng suất  $\bar{\tau}_{\xi z}$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

Hình 4.19. Ảnh hưởng chênh lệch nhiệt độ tới biên dạng và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời tải cơ-nhiệt

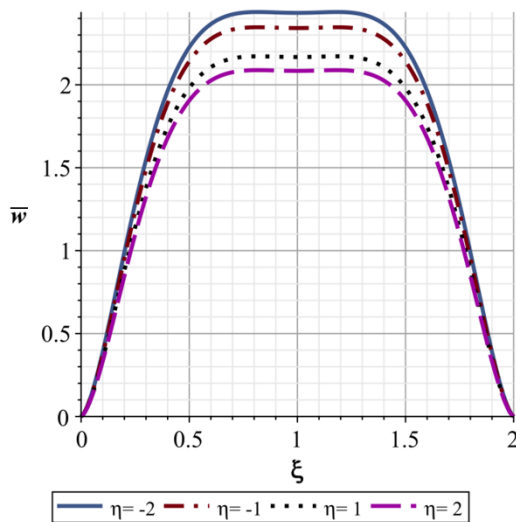
Kết quả Bảng 4.12 và các đồ thị chuyển vị và ứng suất trên Hình 4.19 cho thấy sự chênh lệch nhiệt độ có ảnh hưởng lớn tới chuyển vị và ứng suất trong vỏ. Tuy nhiên trường hợp này, vỏ chịu tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt nên giá trị ứng xử tuyệt đối lớn hơn. Khi khoảng chênh lệch nhiệt độ mặt trong và ngoài nhỏ ( $\Delta T = 50$  °C) thì ảnh hưởng của tải cơ tới chuyển vị và ứng suất lớn, khi chênh lệch nhiệt độ cao hơn thì ảnh hưởng của tải cơ tới chuyển vị và ứng suất của vỏ giảm dần, đồng thời ảnh hưởng của tải nhiệt tới chuyển vị và ứng suất tăng lên.

#### 4.3.2. Nghiên cứu ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích

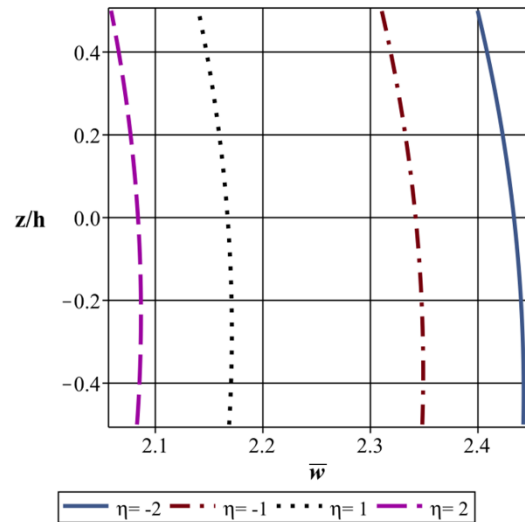
Xét vỏ trụ FGM có nhiệt độ bề mặt trong  $T_{in} = 125$  °C, chiều dày tương đối  $R/h = 10$ , và chỉ số tỷ lệ thể tích cho các giá trị  $\eta = -2, -1, 1, 2$ . Tải phân bố đều ở bề mặt trong  $Q_{in} = 20$  MPa. Các chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên tính theo (4.5) và (4.6).

Bảng 4.13. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt

$\eta$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$		$\bar{\sigma}_\theta$		$\bar{\tau}_{\xi z}$		$\bar{\sigma}_z$	
	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$
	$(z = 0)$	$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm 3h/8)$		$(z = \pm h/4)$	
-2	2.3997	-2.167	22.589	-10.470	9.681	0.000	-3.408	0.248	7.838
		2.298	-23.790	-8.871	-4.986	0.000	-0.9133	0.744	-3.793
-1	2.3105	-2.337	23.685	-11.171	10.151	0.000	-3.522	0.260	8.06
		2.398	-22.834	-8.343	-4.577	0.000	-0.850	0.755	-3.599
1	2.1401	-2.718	26.052	-12.711	11.165	0.000	-3.774	0.285	8.576
		2.580	-20.980	-7.340	-3.782	0.000	-0.690	0.777	-3.203
2	2.0589	-2.932	27.332	-13.556	11.714	0.000	-3.910	0.299	8.870
		2.662	-20.082	-6.864	-3.397	0.000	-0.592	0.788	-3.002

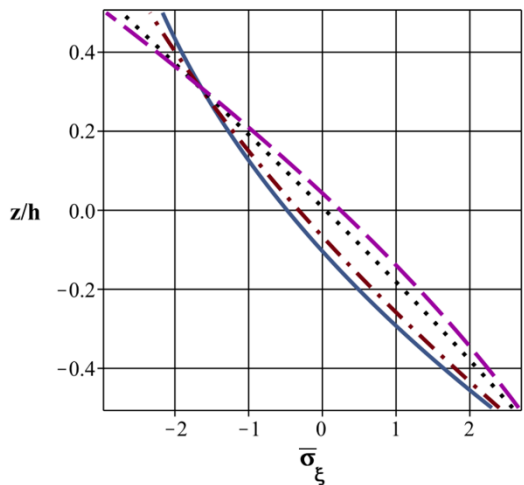


a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dài  $\xi$

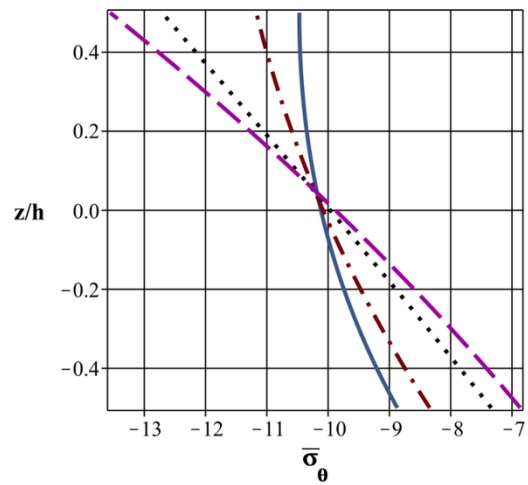


b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày

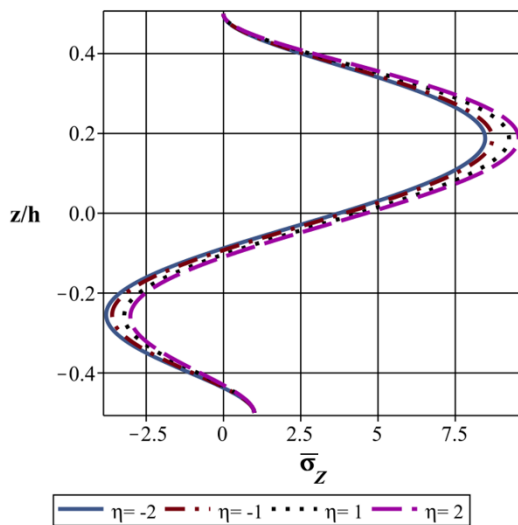
$z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



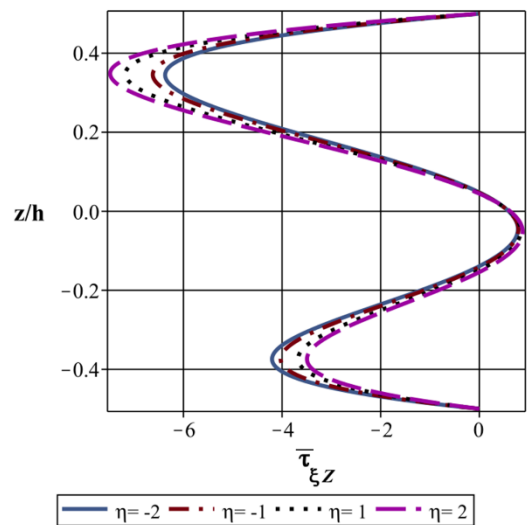
c) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



d) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



e) Ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  theo chiều dày  $z/h$  tại biên  $\xi = 0$



f) Ứng suất  $\bar{\tau}_{\xi z}$  theo chiều dày  $z/h$  tại biên  $\xi = 0$

Hình 4.20. Ảnh hưởng của sự không đồng nhất của vật liệu tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời tải cơ-nhiệt

Khi thay đổi giá trị chỉ số tỷ lệ thể tích gây ảnh hưởng nhất định tới trạng thái ứng suất và chuyển vị của vỏ, tuy nhiên sự thay đổi trạng thái ứng suất và chuyển vị của vỏ không quá lớn, điều này thể hiện từ kết quả ở Bảng 4.13 và



Hình 4.20. Tuy vậy ảnh của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu trong trường hợp này vẫn rõ ràng hơn khi vỏ FGM chỉ chịu tải nhiệt.

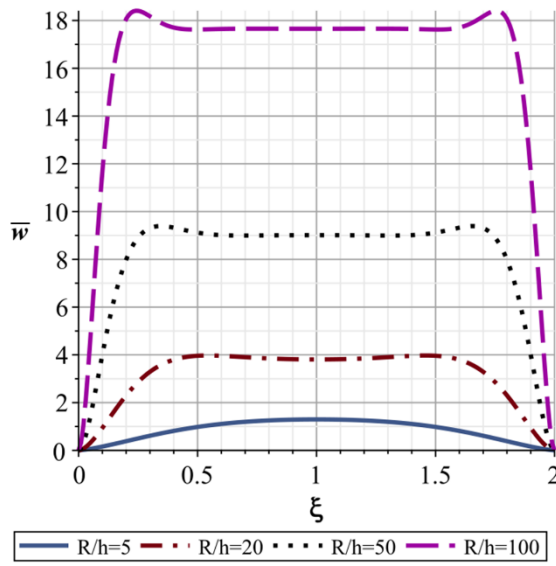
### 4.3.3. Nghiên cứu ảnh hưởng của chiều dày

Xét vỏ trụ FGM có nhiệt độ bề mặt trong  $T_{in} = 125 \text{ }^\circ\text{C}$ , chỉ số tỷ lệ thể tích  $\eta = 1$  và có chiều dày tương đối  $R/h$  thay đổi, tải phân bố đều ở bề mặt trong  $Q_{in} = 20 \text{ MPa}$ . Các chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên tính theo (4.5) và (4.6).

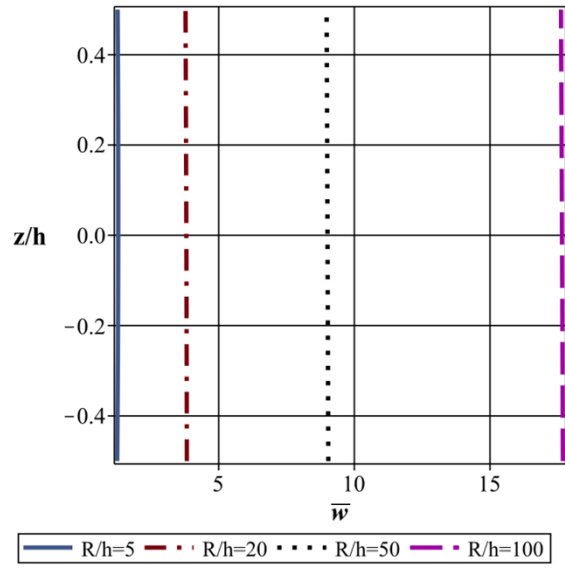
Ảnh hưởng chiều dày vỏ tới trạng thái ứng suất và chuyển vị rõ ràng theo chiều hướng vỏ càng mỏng thì giá trị tuyệt đối của ứng suất và chuyển vị càng lớn, điều này thể hiện rõ ở số liệu Bảng 4.14 và Hình 4.21. Trong trường hợp vỏ chịu tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt này, sự ảnh hưởng của chiều dày vỏ rõ ràng hơn khi vỏ chỉ chịu tải nhiệt độ.

Bảng 4.14. Ảnh hưởng chiều dày tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt

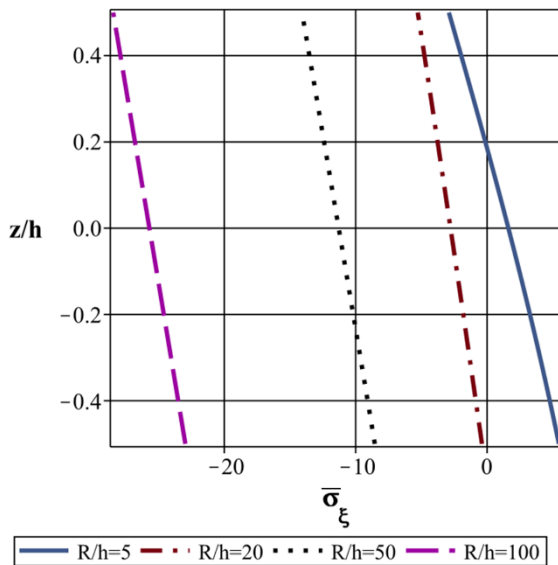
$\frac{R}{h}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_\xi$		$\bar{\sigma}_\theta$		$\bar{\tau}_{\xi z}$		$\bar{\sigma}_z$	
	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$	$\left(\frac{\xi_0}{2}, \theta\right)$	$(0, \theta)$
	$(z = 0)$	$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm h/2)$		$(z = \pm 3h/8)$		$(z = \pm h/4)$	
5	1.2739	-2.906	17.043	-8.322	7.304	0.000	-4.428	0.340	5.034
		5.465	-7.513	-1.780	1.990	0.000	-0.056	0.828	1.814
20	3.7772	-5.274	44.163	-22.053	18.927	0.000	-2.657	0.264	16.067
		-0.389	-47.322	-16.907	-15.072	0.000	-1.469	0.765	-13.298
50	8.9775	-14.084	96.808	-52.149	41.489	0.000	1.517	0.256	38.550
		-8.543	-124.585	-46.878	-48.184	0.000	-2.831	0.756	-43.508
100	17.6190	-28.453	182.396	-102.119	78.170	0.000	9.547	0.253	75.856
		-22.960	-251.695	-96.887	-102.660	0.000	-4.098	0.753	-93.846



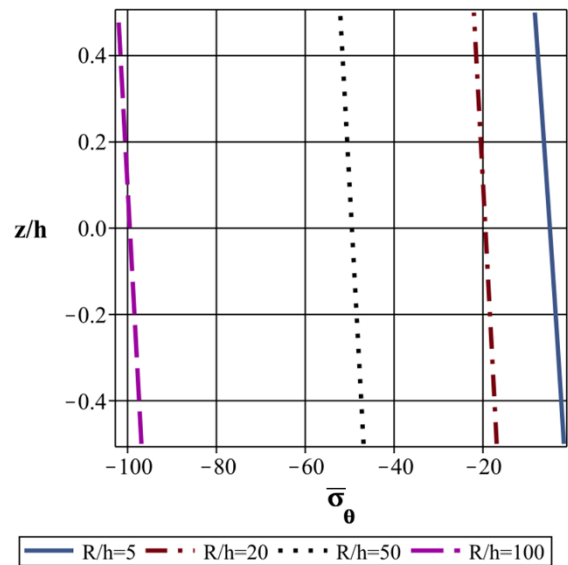
a) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều  $\xi$



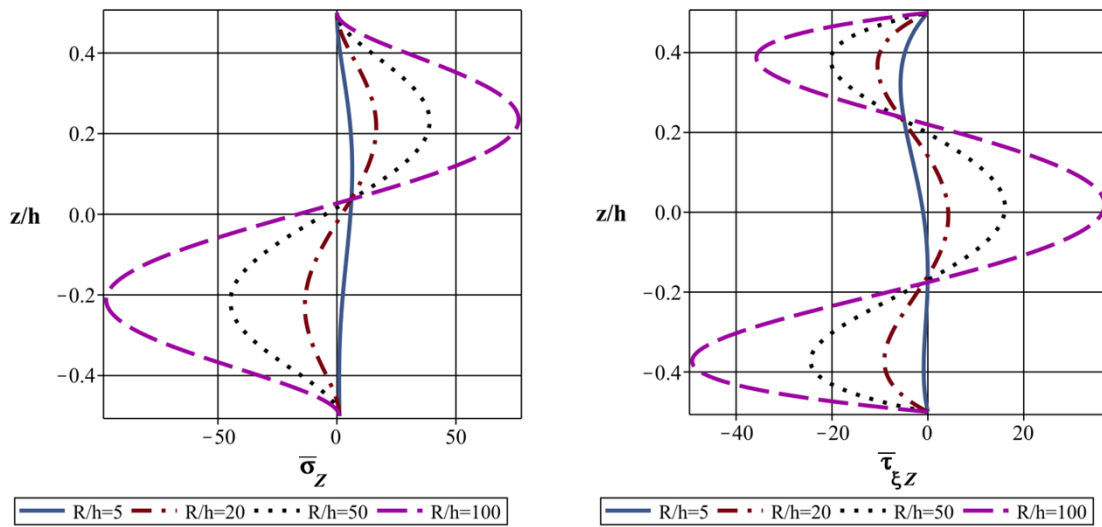
b) Chuyển vị  $\bar{w}$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



c) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\xi$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



d) Ứng suất  $\bar{\sigma}_\theta$  theo chiều dày  $z/h$  tại  $\xi = \xi_0 / 2$



e) Ứng suất  $\bar{\sigma}_z$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

f) Ứng suất  $\bar{\tau}_{\xi z}$  theo chiều dày  $z/h$   
tại biên  $\xi = 0$

Hình 4.21. Ảnh hưởng của chiều dày tương đối tới chuyển vị và ứng suất của vỏ trụ FGM dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt

Như vậy khi vỏ chịu đồng thời của tải cơ-nhiệt trạng thái ứng suất và chuyển vị sẽ bị ảnh hưởng mạnh hơn khi chỉ có tải nhiệt hoặc tải cơ. Điều này có ý nghĩa quan trọng tới việc ứng dụng vỏ FGM trong các trường hợp chịu cả tải nhiệt và cơ.

#### Kết luận chương 4

Trong Chương 4, luận án đã thực hiện khảo sát và đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên, thông số hình học, chỉ số tỷ lệ thể tích, các dạng tải trọng tới trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM. Qua kết quả thực hiện nghiên cứu có thể đưa ra một số nhận xét sau:

- Xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất tại khu vực biên ngàm. Phạm vi ảnh hưởng của hiện tượng tập trung ứng suất tương đối nhỏ, với kích thước bằng một nửa chiều dày vỏ. Đặc biệt với trường hợp vỏ trụ FGM chịu nhiệt độ thì hiện tượng tập trung ứng suất xảy ra cả với biên ngàm và biên tựa. Hiện

tượng tập trung ứng suất tại khu vực này không xác định được khi sử dụng lý thuyết cổ điển, hoặc lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất.

- Thành phần ứng suất cắt theo phương pháp tuyến  $\sigma_z$  (thường bị bỏ qua trong lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất và lý thuyết cổ điển do có giá trị nhỏ) có giá trị tương đối lớn so với các thành phần ứng suất khác tại khu vực xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất. Do đó, trong nghiên cứu tính toán kết cấu vỏ tại những khu vực mà trạng thái ứng suất có đặc tính không gian rõ rệt (như tại khu vực tập trung ứng suất), cần thiết tính đến ảnh hưởng đầy đủ của các thành phần ứng suất cắt.

- Khi nghiên cứu vỏ mỏng tại những khu vực xa biên, kết quả tính toán theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D và lý thuyết bậc nhất, lý thuyết cổ điển có sai lệch không đáng kể. Vì vậy, đối với vỏ mỏng và thực hiện phân tích ở khu vực xa biên, việc sử dụng các lý thuyết bậc nhất và cổ điển vẫn cho kết quả có độ chính xác cao. Còn trong trường hợp vỏ dày, hoặc nghiên cứu vỏ tại khu vực gần biên (vùng có xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất), cần thiết phải sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D, hoặc các lý thuyết bậc cao khác, lý thuyết đàn hồi 3D.

- Thực hiện nghiên cứu đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học (chiều dày, chiều dài), các điều kiện biên khác nhau, chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu, quy luật phân bố tải trọng, độ chênh lệch nhiệt độ, v.v. lên trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ, tải trọng nhiệt độ và tải trọng cơ-nhiệt đồng thời. Kết quả nghiên cứu có ý nghĩa thực tiễn cao trong nghiên cứu thiết kế, cũng như khai thác, vận hành kết cấu vỏ làm từ vật liệu FGM.

## KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

### 1. Kết quả đạt được của luận án

- Luận án đã nghiên cứu tổng quan về vật liệu FGM, các ứng dụng của nó và các mô hình tính toán thường được sử dụng trong nghiên cứu kết cấu FGM.

- Xây dựng được mô hình toán học trong nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tải trọng cơ, nhiệt và cơ-nhiệt đồng thời với các điều kiện biên khác nhau trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D, có sử dụng phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi 3D để xác định các thành phần ứng suất cắt.

- Xây dựng phương pháp nghiên cứu theo hướng tiếp cận giải tích trong nghiên cứu vỏ trụ FGM với các điều kiện biên khác nhau chịu tác dụng của các dạng tải trọng cơ, nhiệt, cơ-nhiệt đồng thời, trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D. Độ tin cậy của mô hình toán học, phương pháp nghiên cứu và chương trình tính toán được kiểm chứng thông qua kết quả so sánh với các công bố trên tạp chí quốc tế uy tín trong các bài toán khác nhau về phân tích panel trụ, vỏ trụ chịu tác dụng của tải trọng cơ, tải trọng nhiệt và cơ nhiệt đồng thời.

- Trên cơ sở chương trình tính toán đã xây dựng, luận án thực hiện nghiên cứu đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học (chiều dày, chiều dài), các điều kiện biên khác nhau, chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu, quy luật phân bố tải trọng, độ chênh lệch nhiệt độ, v.v. lên trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ, tải trọng nhiệt độ và tải trọng cơ-nhiệt đồng thời. Trên cơ sở nghiên cứu, luận án đã đưa ra các đánh giá cụ thể và khuyến cáo đối với hiện tượng tập trung ứng suất, ảnh hưởng của các tham số kết cấu, hình học, điều kiện biên, đặc tính vật liệu lên trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ. Điều này có ý nghĩa quan trọng trong ứng dụng các vật liệu FGM trong các thiết kế kết cấu dạng vỏ trụ.

## 2. Những đóng góp mới của luận án

- Xây dựng mô hình, các biểu thức và phương trình vi phân cân bằng cho kết cấu vỏ trụ composite FGM khi sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D chịu tải cơ, nhiệt và cơ-nhiệt đồng thời. Đề xuất việc sử dụng chuỗi lượng giác đơn kết hợp với phương pháp phân ly biến số và phép biến đổi Laplace để giải quyết bài toán biên đối với vỏ trụ FGM chịu tác dụng của các dạng tải trọng cơ, nhiệt và điều kiện biên khác nhau.

- Nghiên cứu đánh giá hiện tượng tập trung ứng suất tại các vị trí có trạng thái ứng suất-biến dạng bị suy biến (khu vực biên). Phân tích chỉ ra phạm vi áp dụng (cần đánh giá chính xác trạng thái ứng suất vùng biên, vỏ có độ dày lớn và vỏ trụ ngắn) của lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D trong tính toán vỏ trụ composite FGM chịu tải trọng cơ, nhiệt.

- Khảo sát ảnh hưởng của các yếu tố về hình học và vật liệu vỏ trụ composite FGM, các dạng tải trọng cơ, nhiệt, điều kiện biên đến trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ và sự tập trung ứng suất tại biên của vỏ trụ FGM, từ đó đưa ra những khuyến cáo cụ thể khi áp dụng tính toán với vỏ trụ FGM.

## 3. Hướng phát triển tiếp theo của luận án

Trên cơ sở áp dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D;

- Nghiên cứu bài toán đáp ứng động lực học vỏ FGM có biện pháp gia cường chịu các dạng tải trọng khác nhau gồm cả cơ và nhiệt.

- Nghiên cứu bài toán ổn định của vỏ FGM cho các kết cấu vỏ khác nhau dưới tác dụng cơ, nhiệt và cơ-nhiệt đồng thời.

- Nghiên cứu các bài toán đáp ứng phi tuyến khác nhau cho vỏ FGM dưới tác dụng của các dạng tải trọng cơ, nhiệt hướng kính và dọc trục.

- Nghiên cứu bài toán tối ưu hóa vật liệu và tối ưu hóa kết cấu với các dạng vỏ FGM nhằm đưa ra và khắc phục hiện tượng tập trung ứng suất trong kết cấu.

- Nghiên cứu phân tích đáp ứng tĩnh, động lực học và ổn định vỏ FGM với tính chất cơ lý phụ thuộc vào phân bố trường nhiệt độ trong vỏ.

## DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

1. **Trần Văn Hùng**, Trần Ngọc Đoàn và Nguyễn Trường Thanh (2018), "Khảo sát trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ composite có cơ tính biến thiên chịu tải trọng tĩnh trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao Quasi-3D", *Tuyển tập Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn lần thứ XIV*, trang 315-322.
2. **Trần Văn Hùng**, Trần Ngọc Đoàn và Nguyễn Trường Thanh (2019), "Phân tích trạng thái ứng suất của vỏ trụ FGM với các điều kiện biên khác nhau trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu quasi - 3D", *Tuyển tập Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc, Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học*, trang 167-174.
3. Trần Ngọc Đoàn, Vũ Quốc Trụ và **Trần Văn Hùng** (2019), "Khảo sát trạng thái ứng suất-biến dạng của vỏ trụ FGM trên cơ sở lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kiểu Quasi-3D", *Tạp chí Khoa học và Kỹ thuật/Học Viện Kỹ thuật Quân sự*, số 201, trang 24-33.
4. **Tran Van Hung**, Tran Ngoc Doan, Nguyen Truong Thanh & Nguyen Ngoc Hoa (2019), "Analytical solutions for bending of FGM cylindrical shells using higher-order shear and normal deformation theory", *Processing of The 5th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 5)*, pp. 192-198.
5. **Trần Văn Hùng**, Trần Ngọc Đoàn và Vũ Quốc Trụ (2020), "Phân tích tĩnh vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải cơ và nhiệt độ", *Tuyển tập Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XV*, trang 191-199.
6. **Tran Van Hung**, Tran Ngoc Doan, Vu Quoc Tru, Nguyen Anh Tuan & Vu Xuan Duc. (2020), "Static Analysis of FGM Cylindrical Shells under Local Load using Quasi-3D Higher-Order Shear Deformation Theory", *Journal*

*of Science and Technology - Military University of Science and Technology*. N.209, pp 96-107.

7. Tran Ngoc Doan, Anh Tuan Nguyen, Van Binh Phung, **Tran Van Hung**, Vu Quoc Tru & Doan Trac Luat (2020), "Static analysis of FGM cylindrical shells and the effect of stress concentration using Quasi-3D type higher-order shear deformation theory", *Composite Structures*, pp. 113357, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113357>.
8. Tran Ngoc Doan, **Tran Van Hung** & Duong Van Quang (2020), "Thermal bending analysis of FGM cylindrical shells using a Quasi-3D type higher-order shear deformation theory", *Modern Mechanics and Applications. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-16-3239-6\_24. (Indexed by SCOPUS)*



## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tiếng Việt

- [1] Lê Thúc Định (2016), *Phân tích động lực học của tấm và vỏ trụ thoải làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên chịu tải trọng khí động*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
- [2] Lê Khả Hòa (2015), *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học quốc gia. Hà Nội.
- [3] Phạm Quốc Hòa (2019), *Nghiên cứu đáp ứng của kết cấu vỏ composite sử dụng điều kiện kết hợp giữa phương pháp phần tử hữu hạn tron (SFEM) và phần tử vỏ MITC3*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự. Hà Nội.
- [4] Vũ Hoài Nam (2015), *Phân tích phi tuyến động lực của vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên*, Luận án tiến sĩ cơ học, Đại học Quốc gia. Hà Nội.
- [5] Nguyễn Thị Nga (2018), *Phân tích ổn định của tấm và vỏ cơ tính biến thiên có gân gia cường chịu tải cơ và nhiệt*, Luận án tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Quốc gia. Hà Nội.

### Tiếng Anh

- [6] Abrate S & Sciuva M Di. (2017), "Equivalent single layer theories for composite and sandwich structures: A review", *Composite Structures*, 179, pp. 482-494.
- [7] Alashti R.A & Khorsand M. (2011), "Three-dimensional thermo-elastic analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 88(5-7), pp. 167-180.

- [8] Alibeigloo A, Kani A.M, Pashaei M.H, & Piping. (2012), "Elasticity solution for the free vibration analysis of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 89, pp. 98-111.
- [9] Alibeigloo A. (2009), "Static analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers as sensor and actuator", *Smart Materials Structures*, 18(6), pp. 065004.
- [10] Alijani F, Amabili M, Karagiozis K, & Bakhtiari-Nejad F. (2011), "Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells", *Journal of Sound and Vibration*, 330(7), pp. 1432-1454.
- [11] Alijani F, Amabili M, & Bakhtiari-Nejad F. (2011), "Thermal effects on nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shells using higher order shear deformation theory", *Composite Structures*, 93(10), pp. 2541-2553.
- [12] Altenbach J, Altenbach H, & Eremeyev V.A. (2009), "On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography", *Archive of Applied Mechanics*, 80(1), pp. 73-92.
- [13] Vu Thi Thuy Anh, Dao Huy Bich, & Nguyen Dinh Duc (2015), "Nonlinear stability analysis of thin FGM annular spherical shells on elastic foundations under external pressure and thermal loads", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 50, pp. 28-38.
- [14] Aragh B.S & Yas M.H. (2010), "Three-dimensional analysis of thermal stresses in four-parameter continuous grading fiber reinforced cylindrical panels", *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(8), pp. 1047-1063.

- [15] Arciniega R.A & Reddy J.N. (2007), "Large deformation analysis of functionally graded shells", *International Journal of Solids and Structures*, 44(6), pp. 2036-2052.
- [16] Aron H. (1874), "Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen, beliebig gekrümmten elastischen Schale", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 78, pp. 136-174.
- [17] Arshad S.H *et al.* (2011), "Effects of exponential volume fraction law on the natural frequencies of FGM cylindrical shells under various boundary conditions", *Archive of applied mechanics*, 81(8), pp. 999-1016.
- [18] Arshad S.H, Naeem M.N, & Sultana N. (2007), "Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 221(12), pp. 1483-1495.
- [19] Bagherizadeh E, Kiani Y, & Eslami M.R. (2011), "Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation", *Composite Structures*, 93(11), pp. 3063-3071.
- [20] Bahtui A & Eslami M.R. (2007), "Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(4), pp. 676-697.
- [21] Behjat B *et al.* (2009), "Static, dynamic, and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric panels using finite element method", *Journal of Intelligent Material Systems Structures*, 20(13), pp. 1635-1646.
- [22] Bich Dao Huy & Ninh Dinh Gia. (2017), "An analytical approach: Nonlinear vibration of imperfect stiffened FGM sandwich toroidal shell

- segments containing fluid under external thermo-mechanical loads", *Composite Structures*, 162, pp. 164-181.
- [23] Bich Dao Huy, Dung Dao Van, & Hoa Le Kha. (2012), "Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects", *Composite Structures*, 94(9), pp. 2952-2960.
- [24] Bich Dao Huy, Duc Nguyen Dinh, & Quan Tran Quoc. (2014), "Nonlinear vibration of imperfect eccentrically stiffened functionally graded double curved shallow shells resting on elastic foundation using the first order shear deformation theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 80, pp. 16-28.
- [25] Brischetto S. (2017), "A general exact elastic shell solution for bending analysis of functionally graded structures", *Composite Structures*, 175, pp. 70-85.
- [26] Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, & Soave M. (2010), "Refined and Advanced Models for Multilayered Plates and Shells Embedding Functionally Graded Material Layers", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 17(8), pp. 603-621.
- [27] Chen W.Q, Wang X, & Ding H.J. (1999), "Free vibration of a fluid-filled hollow sphere of a functionally graded material with spherical isotropy", *The journal of the Acoustical Society of America*, 106(5), pp. 2588-2594.
- [28] Chen H, Wang A, Hao Y, & Zhang W. (2017), "Free vibration of FGM sandwich doubly-curved shallow shell based on a new shear deformation theory with stretching effects", *Composite Structures*, 179, pp. 50-60.

- [29] Chorfi S.M & Houmat A. (2010), "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form", *Composite Structures*, 92(10), pp. 2573-2581.
- [30] Cinefra M, Carrera E, Brischetto S, & Belouettar S. (2010), "Thermo-Mechanical Analysis Of Functionally Graded Shells", *Journal of Thermal Stresses*, 33(10), pp. 942-963.
- [31] Cong Pham Hong, Khanh Nguyen Duy, Khoa Nguyen Dinh, & Duc Nguyen Dinh (2018), "New approach to investigate nonlinear dynamic response of sandwich auxetic double curves shallow shells using TSDT", *Composite Structures*, 185, pp. 455-465.
- [32] Dai H.L & Dai T. (2013), "Analysis for the thermoelastic bending of a functionally graded material cylindrical shell", *Meccanica*, 49(5), pp. 1069-1081.
- [33] Dai H.L, Rao Y.N, & Dai T. (2016), "A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015", *Composite Structures*, 152, pp. 199-225.
- [34] Do Vuong Nguyen Van & Lee Chin-Hyung. (2018), "Quasi-3D higher-order shear deformation theory for thermal buckling analysis of FGM plates based on a meshless method", *Aerospace Science and Technology*, 82-83, pp. 450-465.
- [35] Du C, Li Y, & Jin X. (2014), "Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells", *Thin-Walled Structures*, 78, pp. 26-36.
- [36] Du C & Li Y. (2013), "Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments", *Composite Structures*, 102, pp. 164-174.

- [37] Duc Nguyen Dinh & Thiem Hoang Thi. (2017), "Dynamic Analysis of Imperfect FGM Circular Cylindrical Shells Reinforced by FGM Stiffener System Using Third Order Shear Deformation Theory in Term of Displacement Components", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 14(13), pp. 2534-2570.
- [38] Duc Nguyen Dinh & Quan Tran Quoc. (2015), "Nonlinear dynamic analysis of imperfect functionally graded material double curved thin shallow shells with temperature-dependent properties on elastic foundation", *Journal of Vibration Control*, 21(7), pp. 1340-1362.
- [39] Duc Nguyen Dinh & Thang Pham Toan. (2015), "Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable imperfect eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations", *Aerospace Science Technology*, 40, pp. 115-127.
- [40] Duc Nguyen Dinh (2013), "Nonlinear dynamic response of imperfect eccentrically stiffened FGM double curved shallow shells on elastic foundation", *Composite Structures: Applied Mathematical Modelling*, 99, pp. 88-96.
- [41] Duc Nguyen Dinh & Quan Tran Quoc (2013), "Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments", *Composite Structures*, 106, pp. 590-600.
- [42] Duc Nguyen Dinh & Thang Pham Toan. (2014), "Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic–metal–ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression", *Composite Structures*, 110, pp. 200-206.
- [43] Duc Nguyen Dinh, Seung-Eock K, & Chan Do Quang (2017), "Thermal buckling analysis of FGM sandwich truncated conical shells

- reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT", *Journal of Thermal Stresses*, 41(3), pp. 331-365.
- [44] Dung Dao Van & Hoa Le Kha. (2015), "Semi-analytical approach for analyzing the nonlinear dynamic torsional buckling of stiffened functionally graded material circular cylindrical shells surrounded by an elastic medium", *Applied Mathematical Modelling*, 39(22), pp. 6951-6967.
- [45] Ebrahimi M.J & Najafizadeh M.M. (2014), "Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells", *Applied Mathematical Modelling*, 38(1), pp. 308-324.
- [46] Fazzolari F.A & Carrera E. (2014), "Refined hierarchical kinematics quasi-3D Ritz models for free vibration analysis of doubly curved FGM shells and sandwich shells with FGM core", *Journal of Sound and Vibration*, 333(5), pp. 1485-1508.
- [47] Firsanov V.V & Doan T.N. (2011), "Energy-consistent theory of cylindrical shells", *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 40(6), pp. 543-548.
- [48] Firsanov V.V & Doan T.N. (2015), "Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory", *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 6(2), pp. 135-166.
- [49] Firsanov V.V & Doan T.N. (2014), "Natural oscillations of general shells based on nonclassical theory", *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 43(5), pp. 349-357.
- [50] Gharooni H, Ghannad M, & Nejad M. Z. (2016), "Thermo-Elastic Analysis of Clamped-Clamped Thick FGM Cylinders by Using Third-Order Shear Deformation Theory", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(4), pp. 750-774.

- [51] Gol'denveizer (1961), *Theory of elastic thin shells: solid and structural mechanics*, Elsevier,
- [52] Han S.C, Lee W.H, & Park W.T. (2009), "Non-linear analysis of laminated composite and sigmoid functionally graded anisotropic structures using a higher-order shear deformable natural Lagrangian shell element", *Composite Structures*, 89(1), pp. 8-19.
- [53] Hildebrand F.B, Reissner E, & Thomas G.B. (1949), "Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells".
- [54] Duong Thanh Huan, Tran Minh Tu, & Tran Huu Quoc. (2017), "Free vibration analysis of functionally graded doubly-curved shell panels resting on elastic foundation in thermal environment", *Hội nghị Cơ học toàn quốc, Cơ học vật rắn biến dạng lần thứ X*, pp. 496-503.
- [55] Huang H, Han Q, Feng N, & Fan X. (2011), "Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells under Combined Loads", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 18(5), pp. 337-346.
- [56] Isvandzibaei M.R, Jamaluddin H, & Hamzah R.I.R. (2016), "Vibration analysis of supported thick-walled cylindrical shell made of functionally graded material under pressure loading", *Journal of Vibration Control*, 22(4), pp. 1023-1036.
- [57] Kant T & Ramesh C.K. (1976), *Analysis of thick orthotropic shells*, Place Published, 401-409.
- [58] Kant T & Patil S. (1979), "Numerical Analysis of Pressure Vessels using various Shell Theories", *Research Report IITB/CE 79-1*.
- [59] Kant T. (1976), *Thick Shells of Revolution-Some Studies*, Indian Institute of Technology Bombay.
- [60] Khazaeinejad P, Najafizadeh M.M, Jenabi J, & Isvandzibaei M.R. (2010), "On the buckling of functionally graded cylindrical shells under



- combined external pressure and axial compression", *Journal of Pressure Vessel Technology*, 132(6), pp. 064501.
- [61] Kiani Y, Shakeri M, & Eslami M.R. (2012), "Thermoelastic free vibration and dynamic behaviour of an FGM doubly curved panel via the analytical hybrid Laplace–Fourier transformation", *Acta Mechanica*, 223(6), pp. 1199-1218.
- [62] Kien N.T, Phuong V.T, Duy N.B, & Lee J (2016), "An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory", *Composite Structures*, 156, pp. 238-252.
- [63] Kilchevskiy N.A. (1939), "Generalization of the modern theory of shells", *PMM*(2).
- [64] Kim K.D, Lomboy G.R, & Han S.C. (2008), "Geometrically non-linear analysis of functionally graded material (FGM) plates and shells using a four-node quasi-conforming shell element", *Journal of Composite Materials*, 42(5), pp. 485-511.
- [65] Kirchhoff V.G. (1850), "Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein", *Journal Fur Die Reine und Angewandte Mathematik*, 1850(40), pp. 51–88.
- [66] Lang Z & Xuewu L (2013), "Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells", *Applied Mathematical Modelling*, 37(4), pp. 2279-2292.
- [67] Liew K.M, He X.Q, & Kitipornchai S. (2004), "Finite element method for the feedback control of FGM shells in the frequency domain via piezoelectric sensors and actuators", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(3-5), pp. 257-273.

- [68] Liu C.B, Bian Z.G, Chen W.Q, & Lü C.F. (2012), "Three-dimensional pyroelectric analysis of a functionally graded piezoelectric hollow sphere", *Journal of Thermal Stresses*, 35(6), pp. 499-516.
- [69] Loy C.T, Lam K.Y, & Reddy J.N. (1999), "Vibration of functionally graded cylindrical shells", *Applied Acoustics International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3), pp. 309-324.
- [70] Mantari J.L & Soares C.G. (2014), "Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells", *Composites Part B: Engineering*, 56, pp. 126-136.
- [71] Mantari J.L. (2015), "Refined and generalized hybrid type quasi-3D shear deformation theory for the bending analysis of functionally graded shells", *Composites Part B: Engineering*, 83, pp. 142-152.
- [72] Matsunaga H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, 84(2), pp. 132-146.
- [73] RD Mindlin (1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 1(18), pp. 31-38.
- [74] Mori T & Tanaka K. (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", *Acta metallurgica*, 21(5), pp. 571-574.
- [75] Naeem M.N, Arshad S.H, & Sharma C.B. (2010), "The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 224(1), pp. 43-54.

- [76] Naghdi P.M. (1957), "On the theory of thin elastic shells", *Quarterly of Applied Mathematics*, 14(4), pp. 369-380.
- [77] Najafizadeh M.M & Isvandzibaei M.R. (2007), "Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support", *Acta Mechanica*, 191(1-2), pp. 75-91.
- [78] Nam N.V, Hung N.X, & Lee J (2021), "A quasi-three-dimensional isogeometric model for porous sandwich functionally graded plates reinforced with graphene nanoplatelets", *Journal of Sandwich Structures & Materials*.
- [79] Neves A.M.A *et al.* (2013), "Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 37, pp. 24-34.
- [80] Patel B.P, Gupta S.S, Loknath M.S, & Kadu C.P. (2005), "Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory", *Composite Structures*, 69(3), pp. 259-270.
- [81] Pelletier J.L & Vel S.S. (2006), "An exact solution for the steady-state thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells", *International Journal of Solids and Structures*, 43(5), pp. 1131-1158.
- [82] Pradhan S.C, Loy C.T, Lam K.Y, & Reddy J.N. (2000), "Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions", *Applied Acoustics International Journal of Mechanical Sciences*, 61(1), pp. 111-129.
- [83] Punera D, Kant T, & Desai Y.M. (2017), "Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models", *Journal of Thermal Stresses*, 41(1), pp. 54-79.

- [84] Reddy J.N & Liu C.F. (1985), "A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells", *International Journal of Engineering Science*, 23(3), pp. 319-330.
- [85] Reddy J.N. (2004), *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press, New York,
- [86] Reddy J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *Journal of applied mechanics*, 51(4), pp. 745-752.
- [87] Reddy J.N & Chin C.D. (1998), "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", *Journal of thermal Stresses*, 21(6), pp. 593-626.
- [88] Rohwer K, Rolfes R, & Sparr H. (2001), "Higher-order theories for thermal stresses in layered plates", *International Journal of Solids Structures*, 38(21), pp. 3673-3687.
- [89] Roque C.M.C *et al.* (2010), "Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates and Shells by Radial Basis Functions", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 17(8), pp. 636-652.
- [90] H Santos, Soares C.M.M, Soares CA.M., & JN Reddy (2009), "A semi-analytical finite element model for the analysis of cylindrical shells made of functionally graded materials", *Composite Structures*, 91(4), pp. 427-432.
- [91] Santos H, Soares C.M.M, Soares CA.M., & Reddy J.N (2008), "A semi-analytical finite element model for the analysis of cylindrical shells made of functionally graded materials under thermal shock", *Composite Structures*, 86(1-3), pp. 10-21.
- [92] Sedighi M.R & Shakeri M. (2009), "A three-dimensional elasticity solution of functionally graded piezoelectric cylindrical panels", *Smart Materials and Structures*, 18(5).

- [93] Sepiani H.A, Rastgoo A, Ebrahimi F, & Arani A.G. (2010), "Vibration and buckling analysis of two-layered functionally graded cylindrical shell, considering the effects of transverse shear and rotary inertia", *Materials & Design*, 31(3), pp. 1063-1069.
- [94] Shen H.S. (2009), *Functionally Graded Materials. Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press,
- [95] Shen H.S. (2014), "Nonlinear thermal bending of FGM cylindrical panels resting on elastic foundations under heat conduction", *Composite Structures*, 113, pp. 216-224.
- [96] Shen H.S. (2012), "Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium", *Composite Structures*, 94(3), pp. 1144-1154.
- [97] Shen H.S. (2002), "Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments", *Composites Science and Technology*, 7-8(62), pp. 997-987.
- [98] Shen H.S. (2002), "Postbuckling analysis of axially loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments", *International journal of solids structures*, 39(24), pp. 5991-6010.
- [99] Shen H.S. (2003), "Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments", *Engineering Structures*, 25(4), pp. 487-497.
- [100] Shen H.S. (2005), "Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments", *Composites Science and Technology*, 65(11-12), pp. 1675-1690.
- [101] Shen H.S & Liew K.M. (2004), "Postbuckling of axially loaded functionally graded cylindrical panels with piezoelectric actuators in thermal environments", *Journal of Engineering Mechanics*, 130(8), pp. 982-995.

- [102] Shen H.S & Noda N. (2005), "Postbuckling of FGM cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments", *International Journal of Solids and Structures*, 42(16-17), pp. 4641-4662.
- [103] Shen H.S & Noda N. (2007), "Postbuckling of pressure-loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments", *Composite Structures*, 77(4), pp. 546-560.
- [104] Shen H.S & Leung A.Y. T. (2003), "Postbuckling of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels in thermal environments", *Journal of Engineering Mechanics*, 129(4), pp. 414-425.
- [105] Shen H.S. (2004), "Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties", *International Journal of Solids and Structures*, 41(7), pp. 1961-1974.
- [106] Sheng G.G & Wang X. (2009), "Studies on dynamic behavior of functionally graded cylindrical shells with PZT layers under moving loads", *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5), pp. 772-789.
- [107] Sheng G.G & Wang X. (2008), "Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium", *Journal of Reinforced Plastics Composites*, 27(2), pp. 117-134.
- [108] Sheng G.G & Wang X. (2010), "Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells", *Applied Mathematical Modelling*, 34(9), pp. 2630-2643.
- [109] Sheng G.G & Wang X. (2008), "Thermomechanical vibration analysis of a functionally graded shell with flowing fluid", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(6), pp. 1075-1087.

- [110] Sofiyev A.H. (2010), "Dynamic response of an FGM cylindrical shell under moving loads", *Composite Structures*, 93(1), pp. 58-66.
- [111] Su Z *et al.* (2014), "A unified solution for vibration analysis of functionally graded cylindrical, conical shells and annular plates with general boundary conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, 80, pp. 62-80.
- [112] Sun J, Xu X, & Lim C.W. (2014), "Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined thermal and compressive loads", *Journal of Thermal Stresses*, 37(3), pp. 340-362.
- [113] Thai H.T & Kim S.E. (2015), "A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells", *Composite Structures*, 128, pp. 70-86.
- [114] Tham V.V, Quoc T.H, & Tu T.M (2019), "Free Vibration Analysis of Laminated Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Doubly Curved Shallow Shell Panels Using a New Four-Variable Refined Theory", *Journal of Composites Science*, 3(4).
- [115] Tornabene F & Ceruti A. (2013), "Mixed Static and Dynamic Optimization of Four-Parameter Functionally Graded Completely Doubly Curved and Degenerate Shells and Panels Using GDQ Method", *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, pp. 1-33.
- [116] Tu Tran Minh & Loi Nguyen Van (2016), "Vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells with orthogonal stiffeners", *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(15), pp. 2952-2969.
- [117] Tung Hoang Van & Duc Nguyen Dinh. (2014), "Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations and

- subjected to mechanical and thermal loading conditions", *Applied Mathematical Modelling*, 38(11-12), pp. 2848-2866.
- [118] Vel S.S. (2010), "Exact elasticity solution for the vibration of functionally graded anisotropic cylindrical shells", *Composite Structures*, 92(11), pp. 2712-2727.
- [119] Wang Q, Shi D, Liang Q, & Pang F. (2017), "Free vibration of four-parameter functionally graded moderately thick doubly-curved panels and shells of revolution with general boundary conditions", *Applied Mathematical Modelling*, 42, pp. 705-734.
- [120] Woo J & Meguid S.A. (2001), "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells", *International Journal of Solids Structures*, 38(42-43), pp. 7409-7421.
- [121] Woo J, Meguid S.A, & Liew K.M. (2003), "Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells", *Acta Mechanica*, 165(1-2), pp. 99-115.
- [122] Wu C.P & Tsai Y.H. (2004), "Asymptotic DQ solutions of functionally graded annular spherical shells", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(2), pp. 283-299.
- [123] Ye T, Jin G, & Su Z. (2016), "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded sandwich deep open spherical and cylindrical shells with general restraints", *Journal of Vibration Control*, 22(15), pp. 3326-3354.
- [124] Ye T, Jin G, & Su Z. (2014), "Three-dimensional vibration analysis of laminated functionally graded spherical shells with general boundary conditions", *Composite Structures*, 116, pp. 571-588.



- [125] Yu T, Hu H, Zhang J, & Tinh B.Q (2019), "Isogeometric analysis of size-dependent effects for functionally graded microbeams by a non-classical quasi-3D theory", *Thin-Walled Structures*, 138, pp. 1-14.
- [126] Zhang W & Hao Y. (2009), "Nonlinear dynamic of functionally graded cylindrical shells under the thermalmechanical loads", *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pp. 331-336.
- [127] Zhao X & Liew K.M. (2009), "Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells", *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(2), pp. 131-144.
- [128] Reuss A. (1929), "Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle", *ZAMM-Journal of Applied Mathematics Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 9(1), pp. 49-58.

## PHỤ LỤC

## Các hệ số của hệ phương trình cân bằng viết theo chuyển vị

$$\begin{aligned}
H_{10}^1 &= 0, & H_{11}^1 &= 0, & H_{12}^1 &= 0, & H_{13}^1 &= 0, & H_{10,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{11,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}z}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{12,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{13,11}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \frac{z^3}{3!} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{10,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} dz, & H_{11,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}z}{R+z} dz, & H_{12,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{13,22}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^3}{3!} dz, & H_{20,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right) dz, \\
H_{21,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right) z dz, & H_{22,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right) \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{23,12}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right) \frac{z^3}{3!} dz, & H_{30,1}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{31,1}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}z}{R+z} + A_{13} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{32,1}^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \frac{z^2}{2} + A_{13}z \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz. \\
H_{10}^2 &= 0, & H_{11}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R dz, & H_{12}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R z dz, \\
H_{13}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^2}{2} dz, & H_{10,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{11} \frac{z}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{11,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{11} \frac{z^2}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{12,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{11} \frac{z^3}{2R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{13,11}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{11} \frac{z^4}{6R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{10,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \frac{z}{R+z} dz, \\
H_{11,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \frac{z^2}{R+z} dz, & H_{12,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \frac{z^3}{2(R+z)} dz, & H_{13,22}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \frac{z^4}{6(R+z)} dz, \\
H_{20,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( A_{12} \frac{z}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + A_{44} \frac{z}{R} \right) dz, & H_{21,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( A_{12} \frac{z^2}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + A_{44} \frac{z^2}{R} \right) dz, \\
H_{22,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( A_{12} \frac{z^3}{2(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + A_{44} \frac{z^3}{2R} \right) dz, \\
H_{23,12}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( A_{12} \frac{z^4}{6(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + A_{44} \frac{z^4}{6R} \right) dz, & H_{30,1}^2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{31,1}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} (A_{13} - A_{55}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz, & H_{32,1}^2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( A_{13} - \frac{A_{55}}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^2 dz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{10}^3 &= 0, & H_{11}^3 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz, & H_{12}^3 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^2 dz, \\
H_{13}^3 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{2} dz, & H_{10,11}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^2}{2} dz, & H_{11,11}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{12,11}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^4}{4} dz, & H_{13,11}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^5}{12} dz, & H_{10,22}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{11,22}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, & H_{12,22}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^4}{4} dz, & H_{13,22}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{20,12}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^2}{2} dz, & H_{21,12}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{22,12}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^4}{4} dz, & H_{23,12}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{30,1}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^2}{2} dz, & H_{31,1}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} + A_{13} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{32,1}^3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \frac{z^4}{2} + A_{13} \frac{z^3}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz. \\
\\
H_{10}^4 &= 0, & H_{11}^4 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^2}{2} dz, & H_{12}^4 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{13}^4 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) R \frac{z^4}{2} dz, & H_{10,11}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{6} dz, & H_{11,11}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^4}{6} dz, \\
, & H_{12,11}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^5}{12} dz, & H_{13,11}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{11}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^6}{36} dz, & H_{10,22}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^3}{6} dz, \\
H_{11,22}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^4}{6} dz, & H_{12,22}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz, & H_{13,22}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R+z} \frac{z^6}{36} dz, \\
H_{20,12}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^3}{6} dz, & H_{21,12}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^4}{6} dz, \\
H_{22,12}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz, & H_{23,12}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{12}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) + \frac{A_{44}}{R} \right] \frac{z^6}{36} dz, \\
H_{30,1}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \frac{z^3}{6} - A_{55} \frac{z^2}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & H_{31,1}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \frac{z^4}{6} - A_{55} \frac{z^3}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \\
H_{32,1}^4 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{12}}{R+z} \frac{z^5}{12} - A_{55} \frac{z^4}{4} \right) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{20}^5 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} dz, & H_{21}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} R dz, & H_{22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} \left( Rz + \frac{z^2}{2} \right) dz, \\
H_{23}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} \left( R \frac{z^2}{2} + 2 \frac{z^3}{6} \right) dz, & H_{20,11}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, & H_{21,11}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z dz, \\
H_{22,11}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2} dz, & H_{23,11}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{6} dz, & H_{20,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} dz, \\
H_{21,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} z dz, & H_{22,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, & H_{23,22}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^3}{6} dz, \\
H_{10,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, & H_{11,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz, \\
H_{12,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^2}{2} dz, & H_{13,12}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{6} dz, \\
H_{30,2}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} (A_{22} + A_{66}) \frac{1}{R+z} dz, & H_{31,2}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{22} + A_{66}) \frac{z}{R+z} + A_{23} \right] dz, \\
H_{32,2}^5 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{22} + A_{66}) \frac{z^2}{2(R+z)} + A_{23} z \right] dz. \\
H_{20}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} R dz, & H_{21}^6 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} R^2 dz, & H_{22}^6 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{RA_{66}}{R+z} \left( Rz + \frac{z^2}{2} \right) dz, \\
H_{23}^6 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{RA_{66}}{R+z} \left( R \frac{z^2}{2} + 2 \frac{z^3}{6} \right) dz, & H_{20,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z}{R} dz, \\
H_{21,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{R} dz, & H_{22,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2R} dz, & H_{23,11}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^4}{6R} dz, \\
, & H_{20,22}^6 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} z dz, & H_{21,22}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} z^2 dz, & H_{22,22}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{23,22}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^4}{6} dz, & H_{10,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] z dz, \\
H_{11,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] z^2 dz, & H_{12,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{13,12}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} + \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^4}{6} dz, & H_{30,2}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} (A_{22} z - RA_{66}) \frac{1}{R+z} dz, \\
H_{31,2}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{22} z - RA_{66}) \frac{1}{R+z} + A_{23} \right] z dz, & H_{32,2}^6 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{22} z - RA_{66}) \frac{1}{2(R+z)} + A_{23} \right] z^2 dz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{20}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{66} \left( R - \frac{z}{2} \right) \frac{z}{R+z} dz, & H_{21}^7 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{66} \left( R + \frac{z}{2} \right) \frac{Rz}{R+z} dz, \\
H_{22}^7 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{66} \left( R + \frac{z}{2} \right) \left( Rz + \frac{z^2}{2} \right) \frac{z}{R+z} dz, & H_{23}^7 &= - \int_{-h/2}^{h/2} A_{66} \left( R + \frac{z}{2} \right) \left( R \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) \frac{z}{R+z} dz, \\
H_{20,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2R} dz, & H_{21,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2R} dz, \\
H_{22,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^4}{4R} dz, & H_{23,11}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} A_{44} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^5}{12R} dz, & H_{20,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{21,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, & H_{22,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^4}{4} dz, & H_{23,22}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{10,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^2}{2} dz, & H_{11,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{12,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^4}{4} dz, & H_{13,12}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{30,2}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( A_{22} \frac{z}{2} - RA_{66} - A_{66} \frac{z}{2} \right) \frac{z}{R+z} dz, \\
H_{31,2}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + \frac{A_{23}}{2} - \frac{RA_{66}}{R+z} - \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z}{2} \right) z^2 dz, \\
H_{32,2}^7 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + A_{23} - \frac{RA_{66}}{R+z} - \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z}{2} \right) \frac{z^3}{2} dz \\
H_{20}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left( R + \frac{2z}{3} \right) \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, & H_{21}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left( R + \frac{2z}{3} \right) \frac{RA_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{22}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left( R + \frac{2z}{3} \right) \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} \left( Rz + \frac{z^2}{2} \right) dz, & H_{23}^8 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left( R + \frac{2z}{3} \right) \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} \left( \frac{Rz^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) dz, \\
H_{20,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{6} dz, & H_{21,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^4}{6} dz, & H_{22,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{23,11}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{44}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^6}{36} dz, & H_{20,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^3}{6} dz, & H_{21,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^4}{6} dz, \\
H_{22,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^5}{12} dz, & H_{23,22}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^6}{36} dz, & H_{10,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^3}{6} dz, \\
H_{11,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^4}{6} dz, & H_{12,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^5}{12} dz, \\
H_{13,12}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{44}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + \frac{A_{21}}{R} \right] \frac{z^6}{36} dz, & H_{30,2}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( A_{22} \frac{z}{3} - RA_{66} - A_{66} \frac{2z}{3} \right) \frac{z^2}{2(R+z)} dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{31,2}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{22}}{(R+z)} \frac{z}{3} + A_{23} \frac{z}{3} - \frac{RA_{66}}{(R+z)} - \frac{A_{66}}{(R+z)} \frac{2z}{3} \right) \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{32,2}^8 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{22}}{(R+z)} \frac{z^2}{6} + A_{23} \frac{z}{3} - \frac{RA_{66}}{2(R+z)} - \frac{A_{66}}{(R+z)} \frac{z}{6} \right) \frac{z^4}{2} dz. \\
H_{30}^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{22}}{R+z} dz, \quad H_{31}^9 = - \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{22}z}{R+z} + A_{23} \right) dz, \quad H_{32}^9 = - \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{A_{22}z}{2(R+z)} + A_{23} \right) z dz, \\
H_{30,11}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad H_{31,11}^9 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z dz, \quad H_{32,11}^9 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{30,22}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} dz, \quad H_{31,22}^9 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} z dz, \quad H_{32,22}^9 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \quad H_{10,1}^9 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{21}}{R} dz, \\
H_{11,1}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{55} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{A_{21}}{R} z \right] dz, \quad H_{12,1}^9 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{55} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{A_{21}}{2R} z \right] z dz, \\
H_{13,1}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{55} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) - \frac{A_{21}}{2R} \frac{z}{3} \right] \frac{z^2}{2} dz, \quad H_{20,2}^9 = - \int_{-h/2}^{h/2} (A_{66} + A_{22}) \frac{1}{R+z} dz, \\
H_{21,2}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} (RA_{66} - A_{22}z) \frac{1}{R+z} dz, \quad H_{22,2}^9 = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{66} \left( Rz + \frac{z^2}{2} \right) - A_{22} \frac{z^2}{2} \right] \frac{1}{R+z} dz, \\
H_{23,2}^9 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{66} \left( R \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right) - A_{22} \frac{z^3}{6} \right] \frac{1}{R+z} dz, \quad H_4^9 = -R \left( 1 + \frac{h}{2R} \right), \quad H_5^9 = -R \left( 1 - \frac{h}{2R} \right), \\
H_{T_o}^9 &= - \int_{-h/2}^{h/2} (A_{21} + A_{22} + A_{23}) \alpha_z \Delta T_o dz, \quad H_{T_{in}}^9 = - \int_{-h/2}^{h/2} (A_{21} + A_{22} + A_{23}) \alpha_z \Delta T_{in} dz. \\
H_{30}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{22}z}{R+z} + \frac{RA_{32}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, \\
H_{31}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{22}z^2}{R+z} + A_{23}z + \frac{RA_{32}z}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) + RA_{33} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, \\
H_{32}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z^3}{2} + A_{23}z^2 + \frac{RA_{32}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2} + RA_{33} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z \right] dz, \\
H_{30,11}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z dz, \quad H_{31,11}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z^2 dz, \quad H_{32,11}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{30,22}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} z dz, \quad H_{31,22}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} z^2 dz, \quad H_{32,22}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{10,1}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} z + A_{31} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] dz, \quad H_{11,1}^{10} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{55} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z - \frac{A_{21}}{R} z^2 - A_{31} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z \right] dz, \\
H_{12,1}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{55} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) z^2 - \frac{A_{21}}{R} \frac{z^3}{2} - A_{31} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{z^2}{2} \right] dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{13,1}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{2} - \frac{A_{21}}{R} \frac{z^4}{6} - A_{31} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{6} \right] dz, \\
H_{20,2}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{66}z}{R+z} + \frac{A_{22}z}{R+z} + \frac{RA_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] dz, \\
H_{21,2}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{RA_{66}}{R+z} - \frac{A_{22}z}{R+z} - \frac{RA_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z dz, \\
H_{22,2}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{66}}{R+z} \left(R + \frac{z}{2}\right) - \frac{A_{22}z}{2(R+z)} - \frac{RA_{32}}{2(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z^2 dz, \\
H_{23,2}^{10} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{66}}{R+z} \left(R + \frac{2z}{3}\right) - \frac{A_{22}z}{3(R+z)} - \frac{RA_{32}}{3(R+z)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \quad H_4^{10} = -R \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \frac{h}{2}, \\
H_5^{10} &= R \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \frac{h}{2}, \quad H_{To}^{10} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{21} + A_{22} + A_{23})z + (A_{31} + A_{32} + A_{33})R \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] \alpha_z \Delta T_o dz, \\
H_{Tin}^{10} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{21} + A_{22} + A_{23})z + (A_{31} + A_{32} + A_{33})R \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] \alpha_z \Delta T_{in} dz. \\
H_{30}^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + \frac{RA_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z dz, \quad H_{31}^{11} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + \frac{A_{23}}{2} + \frac{RA_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z^2 dz, \\
H_{32}^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{22}}{R+z} \frac{z}{2} + A_{23} + \frac{RA_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{30,11}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{31,11}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{32,11}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{55}}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{z^4}{4} dz, \quad H_{30,22}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^2}{2} dz, \\
H_{31,22}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^3}{2} dz, \quad H_{32,22}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{A_{66}}{R+z} \frac{z^4}{4} dz, \quad H_{10,1}^{11} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{21}}{R} \frac{z}{2} + A_{31} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z dz, \\
H_{11,1}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{55}}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right) - \frac{A_{21}}{R} \frac{z}{2} - A_{31} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z^2 dz, \\
H_{12,1}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ A_{55} \left(1 + \frac{z}{R}\right) - \frac{A_{21}}{R} \frac{z}{2} - A_{31} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] \frac{z^3}{2} dz, \\
H_{13,1}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{55}}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right) - \frac{A_{21}}{R} \frac{z}{6} - \frac{A_{31}}{3} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] \frac{z^4}{2} dz, \\
H_{20,2}^{11} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{66}z}{2(R+z)} + \frac{A_{22}z}{2(R+z)} + \frac{RA_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z dz, \\
H_{21,2}^{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{RA_{66}}{2(R+z)} - \frac{A_{22}z}{2(R+z)} - \frac{RA_{32}}{R+z} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right] z^2 dz,
\end{aligned}$$

$$H_{22,2}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{66}}{R+z} \left( R + \frac{z}{2} \right) - \frac{A_{22}z}{2(R+z)} - \frac{RA_{32}}{R+z} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^3}{2} dz ,$$

$$H_{23,2}^{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{A_{66}}{R+z} \left( \frac{R}{2} + \frac{z}{3} \right) - \frac{A_{22}z}{6(R+z)} - \frac{RA_{32}}{3(R+z)} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \right] \frac{z^4}{2} dz ,$$

$$H_4^{11} = -\frac{R}{2} \left( 1 + \frac{h}{2R} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 ,$$

$$H_5^{11} = -\frac{R}{2} \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) \left( \frac{h}{2} \right)^2 ,$$

$$H_{T_o}^{11} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{21} + A_{22} + A_{23}) \frac{z^2}{2} + (A_{31} + A_{32} + A_{33}) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) Rz \right] \alpha_z \Delta T_o dz ,$$

$$H_{T_{in}}^{11} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left[ (A_{21} + A_{22} + A_{23}) \frac{z^2}{2} + (A_{31} + A_{32} + A_{33}) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) Rz \right] \alpha_z \Delta T_{in} dz .$$