**BỘ QUỐC PHÒNG**

# HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

*

**PHAN THỊ HƯƠNG**

# MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ CAPUTO NGẪU NHIÊN

**Chuyên ngành: Toán ứng dụng**
**Mã số: 9 46 01 12**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

**HÀ NỘI - 2020**

Công trình được hoàn thành tại Học viện Kỹ thuật Quân sự

**Người hướng dẫn khoa học:**

**1. PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn**

**2. TS. Tạ Ngọc Ánh**

**Phản biện 1: PGS. TS Trần Đình Kế**

**Phản biện 2: PGS. TS Nguyễn Tiến Dũng**

**Phản biện 3: PGS. TS Hồ Đăng Phúc**

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng đánh giá luận án cấp Học viện theo quyết định số 4672/QĐ-HV, ngày 25 tháng 12 năm 2020 của Giám đốc Học viện Kỹ thuật Quân sự, họp tại Học viện Kỹ thuật Quân sự vào hồi....giờ....ngày....tháng ...năm....

Có thể tìm hiểu luận án tại Thư viện Học viện Kỹ thuật Quân sự, Thư viện Quốc gia.

# MỞ ĐẦU

## 1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Phép tính vi phân, tích phân là một công cụ phổ biến để mô tả các quá trình tiến hóa. Bằng việc nghiên cứu nghiệm của phương trình vi phân, người ta có thể biết trạng thái hiện thời cũng như dự đoán được dáng điệu ở quá khứ hay tương lai của quá trình đó. Tuy nhiên, các hiện tượng hay gặp trong cuộc sống có tính chất phụ thuộc vào quá khứ và sự phụ thuộc nói chung cũng không giống nhau tại tất cả các thời điểm. Một trong các lý thuyết được xây dựng để giải quyết các bài toán thực tế vừa nêu là giải tích phân thứ. Lý thuyết này có ưu thế hơn so với phép tính vi phân, tích phân cổ điển trong mô phỏng các quá trình có trí nhớ. Trong bốn thập kỷ gần đây, người ta phát hiện ra ngày càng nhiều ứng dụng của giải tích phân thứ trong các ngành khoa học khác nhau từ Vật lý, Hóa học, Sinh học đến Tài chính, Khoa học xã hội,....

Có nhiều loại đạo hàm phân thứ khác nhau tùy thuộc vào cách người ta tổng quát hóa đạo hàm $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ cho trường hợp $n$ không nguyên. Tuy nhiên, hai khái niệm được dùng phổ biến hơn cả là đạo hàm Riemann-Liouville và đạo hàm Caputo. Đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville được phát triển bởi Abel, Riemann và Liouville trong nửa đầu thế kỷ 19. Tuy nhiên, khi áp dụng đạo hàm này để mô tả các hiện tượng thực tế thì gặp hạn chế do điều kiện ban đầu trong các bài toán giá trị ban đầu không có ý nghĩa vật lý. Đạo hàm phân thứ Caputo được M. Caputo xây dựng năm 1969. So với đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville, đạo hàm Caputo dễ áp dụng cho các bài toán thực tế hơn vì điều kiện ban đầu của các mô hình sử dụng đạo hàm Caputo có ý nghĩa vật lý.

Lý thuyết phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên là một hướng nghiên cứu tương đối mới được sinh ra từ lý thuyết phương trình vi phân phân thứ và lý thuyết xác suất. Bằng cách kết hợp các kết quả của hai ngành cơ sở trên, lý thuyết phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên nhận được những lợi thế của cả hai ngành và có thể đưa ra được mô hình toán học thích hợp hơn cho các hiện tượng tự nhiên và xã hội.

Tuy nhiên, trong sự tương phản một số lớn các công bố về phương trình vi phân phân thứ tất định, chỉ có một số ít bài báo liên quan đến phương trình vi phân ngẫu nhiên với đạo hàm phân thứ Caputo và hầu hết các bài báo này mới dừng lại ở việc thiết lập kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm hoặc nghiên cứu tính chính quy của nghiệm (xem Sakthivel năm 2013, Y. Wang năm 2016, Z. Wang năm 2008). Ở đây chúng tôi phân biệt hai loại nghiệm, loại đầu tiên là nghiệm nhẹ (mild solutions), sự tồn tại và duy nhất của loại nghiệm này được đưa ra trong Sakthivel năm 2013. Tuy thế, các điều kiện đưa ra trong bài báo này khá chặt. Với các điều kiện yếu hơn, chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm nhẹ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Loại nghiệm thứ hai là nghiệm cổ điển (classical solutions) và theo sự hiểu biết của tác giả, câu hỏi về sự tồn tại và duy nhất nghiệm loại này mới được đề cập trong Y. Wang năm 2016 và Z. Wang năm 2008. Trong Z. Wang năm 2008, tác giả chưa chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển với bậc phân thứ $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ còn trong Y. Wang năm 2016 việc chứng minh định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục gặp vấn đề khi thác triển nghiệm từ một khoảng nhỏ $[0, T_a]$ ra toàn khoảng $[0, \infty)$. Luận án này sẽ khắc phục các hạn chế trên. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra được công thức biến thiên hằng số và một số tính chất nghiệm cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Việc giải số phương trình vi phân và phương trình vi phân ngẫu nhiên là bài toán có nhiều ý nghĩa trong ứng dụng. Thực tế rất ít phương trình vi phân ngẫu nhiên giải được nghiệm hiển hoặc nếu tìm được nghiệm hiển thì biểu thức quá phức tạp. Vì vậy, trong nhiều thập kỷ qua, bài toán này đã thu hút rất nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trong và ngoài nước. Đối với phương trình vi phân phân thứ tất định, các phương pháp giải số đã được xây dựng một cách có hệ thống và khá đầy đủ. Tiếp nối hướng nghiên cứu này và dựa theo ý tưởng của bài báo X. Zhang năm 2008, chúng tôi đã đưa ra được lược đồ số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và đánh giá được tốc độ hội tụ của lược đồ số này.

## 2. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau:

**Nội dung 1.** Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

**Nội dung 2.** Công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

**Nội dung 3.** Một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

**Nội dung 4.** Xây dựng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

## 3. Phương pháp nghiên cứu

- Để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên, chúng tôi xây dựng một chuẩn có trọng số phù hợp và áp dụng Định lý điểm bất động của Banach.
- Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm cổ điển vào điều kiện ban đầu được chứng minh dựa trên ước lượng khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt khi thời gian hữu hạn. Để chứng minh sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt chúng tôi dùng phương pháp chứng minh phản chứng.
- Để có được công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên, chúng tôi dùng Định lý biểu diễn Itô và công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ tất định.
- Lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và đánh giá tốc độ hội tụ được dựa trên các kết quả đã biết về lược đồ Euler-Maruyama cho phương trình vi phân ngẫu nhiên và kỹ thuật rời rạc hóa để tránh các điểm kỳ dị của nhân.

## 5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- *Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển, nghiệm nhẹ đối với phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.
- *Đưa ra được công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.
- *Chứng minh được sự phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.
- *Chứng minh được khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tiến đến 0 không nhanh hơn tốc độ đa thức với số mũ đủ lớn. Từ đó, chúng tôi chứng minh được số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường bất kỳ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tuyến tính bị chặn luôn không âm.*
- *Xây dựng được lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *và đưa ra được tốc độ hội tụ cho lược đồ này. Đánh giá được tốc độ hội tụ và tính ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tuyến tính một chiều.*

## 6. Cấu trúc của luận án

Luận án gồm ba chương.
Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.
Chương 2: Một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.
Chương 3: Lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

# Chương 1

# Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các khái niệm cũng như các kết quả bổ trợ cần thiết được sử dụng ở các chương sau.

## 1.1 Một số kiến thức về giải tích ngẫu nhiên

Mục này trình bày một số khái niệm về chuyển động Brown, tích phân ngẫu nhiên Itô và các kết quả bổ trợ gồm Định lý biểu diễn Itô, định lý tồn tại và duy nhất nghiệm cho phương trình vi phân ngẫu nhiên, lược đồ Euler-Maruyama cho phương trình vi phân ngẫu nhiên và tốc độ hội tụ.

## 1.2 Một số kiến thức về giải tích phân thứ

Mục này dành để trình bày khái niệm tích phân phân thứ Riemann-Liouville, đạo hàm phân thứ Caputo, phương trình vi phân phân thứ Caputo, hàm Mittag-Leffler và công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ tất định.

# Chương 2

# Một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển, nghiệm nhẹ, công thức biến thiên hằng số và một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Nội dung của Chương 2 được viết dựa trên bài báo [CT1] và [CT2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

## 2.1 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này, chúng tôi xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.1}$$

với $T > 0$ bất kỳ, $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được và $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ thỏa mãn các điều kiện thông thường. Với mỗi $t \in [0, \infty)$, đặt $\mathfrak{X}_t := L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ ký hiệu là không gian tất cả các hàm khả tích bình phương trung bình $f = (f_1, \ldots, f_d)^{\mathrm{T}} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ với

$$\|f\|_{\mathrm{ms}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}(|f_i|^2)} = \sqrt{\mathbb{E}\|f\|^2},$$

ở đây $\mathbb{R}^d$ được trang bị chuẩn Euclide. Một quá trình ngẫu nhiên đo được $X : [0, \infty) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được gọi là $F$-tương thích nếu $X(t) \in \mathfrak{X}_t$ với mọi $t \in [0, \infty)$.

**Định nghĩa 2.1.** *Với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, một quá trình ngẫu nhiên đo được, $F$-tương thích $X$ được gọi là nghiệm cổ điển của* (2.1) *với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta$ nếu $X(0) = \eta$ và với mọi $t \in (0, T]$*

$$X(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b(\tau, X(\tau)) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sigma(\tau, X(\tau)) dW_\tau \right).$$

Sau đây chúng tôi phát biểu kết quả chính của mục này về sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

**Định lý 2.1.** (**Sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Giả sử các hệ số $b, \sigma$ của phương trình* (2.1) *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(H1) *Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$ ta có*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \le L\|x-y\|, \quad \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le L\|x-y\|.$$

(H2) *$\sigma(\cdot, 0)$ và $b(\cdot, 0)$ thỏa mãn*

$$\|\sigma(\cdot,0)\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{\tau \in [0,T]} \|\sigma(\tau, 0)\| < \infty, \int_0^T \|b(\tau,0)\|^2 \, d\tau < \infty.$$

*Khi đó, phương trình* (2.1) *với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$ có nghiệm toàn cục duy nhất $\varphi(\cdot, \eta)$ trên đoạn $[0, T]$.*

Để chứng minh định lý này, chúng tôi xây dựng một chuẩn có trọng số phù hợp và áp dụng Định lý điểm bất động của Banach. Cụ thể, chứng minh gồm các bước sau:

- *Bước 1*: Xây dựng không gian Banach $(H^2([0,T]), \|\cdot\|_{H^2})$.
- *Bước 2*: Đưa ra toán tử $\mathcal{T}_\eta$ xác định trên không gian này.

- *Bước 3*: Chứng minh toán tử $\mathcal{T}_\eta$ là ánh xạ co đối với chuẩn có trọng số phù hợp, phương pháp này cũng đã được dùng để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên (xem Nhận xét 2.1 trong X. Han và P. E. Kloeden năm 2017). Ở đây, hàm trọng số là hàm Mittag-Leffler $E_{2\alpha-1}(\cdot)$ được định nghĩa như sau

$$E_{2\alpha-1}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma((2\alpha-1)k+1)} \quad \text{với mọi } t \in \mathbb{R}.$$

Ký hiệu không gian $H^2([0,T])$ là tất cả các quá trình ngẫu nhiên

$$X : [0,T] \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

đo được, $F_T$-tương thích với $F_T := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ và thỏa mãn

$$\|X\|_{H^2} := \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \|X(t)\|_{\mathrm{ms}} < \infty.$$

Khi đó, ta có $(H^2([0,T]), \|\cdot\|_{H^2})$ là không gian Banach. Với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, chúng tôi định nghĩa toán tử $\mathcal{T}_\eta : H^2([0,T]) \to H^2([0,T])$ bởi $\mathcal{T}_\eta\xi(0) := \eta$ và với mọi $t \in (0,T]$

$$\mathcal{T}_\eta\xi(t) := \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^t \frac{b(\tau,\xi(\tau))}{(t-\tau)^{\alpha-1}}\, d\tau + \int_0^t \frac{\sigma(\tau,\xi(\tau))}{(t-\tau)^{\alpha-1}}\, dW_\tau \right).$$

Bổ đề dưới đây chỉ ra rằng toán tử này được xác định tốt.

**Bổ đề 2.1.** *Với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, toán tử $\mathcal{T}_\eta$ được xác định tốt.*

Kết quả sau đây là bổ đề kỹ thuật dùng để ước lượng cho toán tử $\mathcal{T}_\eta$ và để phục vụ cho chứng minh các kết quả trong phần tiếp theo.

**Bổ đề 2.2.** *Với $\alpha > \frac{1}{2}$ bất kỳ và $\gamma > 0$ ta có bất đẳng thức sau là đúng*

$$\frac{\gamma}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} E_{2\alpha-1}\left(\gamma\tau^{2\alpha-1}\right) d\tau \le E_{2\alpha-1}\left(\gamma t^{2\alpha-1}\right).$$

Chọn và cố định hằng số dương $\gamma$ sao cho

$$\gamma > \frac{3L^2(T+1)\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2}. \tag{2.2}$$

Trên không gian $H^2([0,T])$, chúng tôi định nghĩa chuẩn có trọng số $\|\cdot\|_\gamma$ như sau

$$\|X\|_\gamma := \operatorname*{esssup}_{\tau\in[0,T]} \sqrt{\frac{\mathbb{E}(\|X(t)\|^2)}{E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})}} \qquad \text{với mọi } X \in H^2([0,T]). \tag{2.3}$$

Nhận thấy, hai chuẩn $\|\cdot\|_{H^2}$ và $\|\cdot\|_\gamma$ là tương đương. Do đó, $(H^2([0,T]), \|\cdot\|_\gamma)$ cũng là không gian Banach. Ta chọn và cố định $\eta \in \mathfrak{X}_0$. Khi đó, toán tử $\mathcal{T}_\eta$ được xác định tốt và ánh xạ $\mathcal{T}_\eta$ là co đối với chuẩn $\|\cdot\|_\gamma$.

**Chú ý 2.1.** *Các điều kiện* (H1), (H2) *trong Định lý 2.1 là sự mở rộng tự nhiên các điều kiện trong định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên.*

## 2.2 Sự phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này chúng tôi sẽ nghiên cứu tính phụ thuộc liên tục của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên vào điều kiện ban đầu. Cụ thể, chúng tôi xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0,T]$ có dạng

$${}^C D^\alpha_{0+} X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.4}$$

với $T > 0$ bất kỳ, $b, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được và $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất có lọc đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, F := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$.

**Định lý 2.2.** (**Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm cổ điển vào điều kiện ban đầu**). *Giả sử các hệ số $b$, $\sigma$ của phương trình* (2.4) *thỏa mãn các điều kiện* (H1) *và* (H2) *trong Định lý 2.1. Khi đó, trên đoạn $[0,T]$ nghiệm cổ điển $\varphi(\cdot,\eta)$ của phương trình* (2.4) *phụ thuộc liên tục vào $\eta$, tức là*

$$\lim_{\zeta\to\eta} \|\varphi(t,\zeta) - \varphi(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}} = 0.$$

## 2.3 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng sau

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = AX(t) + b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t)) \, \frac{dW_t}{dt}, \tag{2.5}$$

ở đây $T > 0$ bất kỳ, $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất có lọc đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, F := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ và $b,\ \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là các hàm đo được thỏa mãn các điều kiện (H1) và (H2) trong Định lý 2.1.

Bây giờ chúng tôi nhắc lại khái niệm nghiệm nhẹ của phương trình (2.5).

**Định nghĩa 2.2.** (**Nghiệm nhẹ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**) (xem R. Sakthivel năm 2013). *Một quá trình ngẫu nhiên đo được, $F$-tương thích $Y$ được gọi là nghiệm nhẹ của phương trình* (2.5) *với điều kiện ban đầu $Y(0) = \eta$ nếu $Y(0) = \eta$ và đẳng thức sau đúng với $t \in (0, T]$*

$$\begin{aligned} Y(t) \;\; = \;\; & E_\alpha(t^\alpha A)\eta + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) b(\tau, Y(\tau)) \, d\tau \\ & + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) \sigma(\tau, Y(\tau)) \, dW_\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ của phương trình (2.5). Để đạt được kết quả này, chúng tôi yêu cầu rằng các hệ số $b, \sigma$ của phương trình thỏa mãn các điều kiện (H1), (H2) trong Định lý 2.1. Kỹ thuật chính để chứng minh kết quả đó là xây dựng một chuẩn có trọng số phù hợp (so sánh với Định lý 2.1).

**Định lý 2.3.** (**Sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ toàn cục**). *Giả thiết các hệ số $b$, $\sigma$ của phương trình* (2.5) *thỏa mãn các điều kiện* (H1) *và* (H2). *Khi đó, với $\eta \in \mathfrak{X}_0$ bất kỳ, tồn tại duy nhất nghiệm nhẹ $Y$ của phương trình* (2.5) *thỏa mãn $Y(0) = \eta$ trên toàn đoạn $[0, T]$, ký hiệu là $\psi(t, \eta)$.*

**Chú ý 2.2.** *Kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ đối với lớp các hệ phương trình rộng hơn đã được chứng minh trong R. Sakthivel năm 2013. Tuy nhiên, giả thiết cho các hệ số của các hệ này là mạnh hơn* (H1), (H2).

## 2.4 Công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này, chúng tôi xây dựng công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng sau

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = AX(t) + b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\, \frac{dW_t}{dt}, \tag{2.7}$$

ở đây $T > 0$ bất kỳ, $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất có lọc đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, F := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ và $b,\ \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là các hàm đo được thỏa mãn các điều kiện (H1) và (H2) trong Định lý 2.1.

Theo Định nghĩa 2.1, nghiệm cổ điển của phương trình (2.7) với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$ là một quá trình ngẫu nhiên đo được, $F$-tương thích thỏa mãn $X(0) = \eta$ và đẳng thức sau đúng với mọi $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} X(t) \;&=\; \eta + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(AX(\tau) + b(\tau, X(\tau)))\, d\tau \\ &\quad + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sigma(\tau, X(\tau))\, dW_\tau. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Theo Định lý 2.1, với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, phương trình (2.7) tồn tại duy nhất nghiệm, ký hiệu bởi $\varphi(\cdot, \eta)$. Định lý sau đây đưa ra công thức biến thiên hằng số cho phương trình (2.7), đó là một biểu diễn đặc biệt của nghiệm $\varphi(\cdot, \eta)$.

**Định lý 2.4.** (**Công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Cho $\eta \in \mathfrak{X}_0$ bất kỳ và $\varphi(\cdot, \eta)$ là nghiệm của phương trình* (2.7)*. Khi đó, đẳng thức*

$$\begin{aligned} \varphi(t, \eta) = \;& E_\alpha(t^\alpha A)\eta + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) b(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, d\tau \\ & + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\sigma(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, dW_\tau \end{aligned} \tag{2.9}$$

*đúng với mọi $t \in [0, T]$.*

**Chú ý 2.3.** (i) *Nếu không có nhiễu trong phương trình* (2.7)*, tức là $\sigma(t, X(t)) \equiv 0$, khi đó* (2.9) *trở thành công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ tất định.*

(ii) *Ta có* $E_1(M) = E_{1,1}(M) = e^M$ *với* $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$. *Cho* $\alpha \to 1$, (2.9) *trở thành dạng sau (một cách hình thức)*

$$\varphi(t,\eta) \;=\; e^{tA}\eta + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau,\varphi(\tau,\eta))\, d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))\, dW_\tau.$$

*Đây là công thức biến thiên hằng số cho nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên*

$$dX(t) = (AX(t) + b(t, X(t)))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dW_t.$$

Như một ứng dụng của Định lý 2.4, hệ quả sau đây đưa ra công thức nghiệm tường minh của phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên tuyến tính không thuần nhất có dạng

$$^C D^\alpha_{0+} X(t) = AX(t) + b(t) + \sigma(t)\,\frac{dW_t}{dt}, \quad X(0) = \eta. \tag{2.10}$$

**Hệ quả 2.1.** *Giả sử* $b \in L^2([0,T],\mathbb{R}^d), \sigma \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^d)$, *ở đây* $T > 0$. *Khi đó, nghiệm hiển của phương trình* (2.10) *trên đoạn* $[0,T]$ *được cho bởi*

$$\begin{aligned} X(t) \;&=\; E_\alpha(t^\alpha A)\eta + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) b(\tau)\, d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\sigma(\tau)\, dW_\tau. \end{aligned}$$

Nhờ kết quả của Định lý 2.3 nên muốn chứng minh Định lý 2.4 chúng tôi chỉ cần chứng minh rằng

$$\varphi(t,\eta) = \psi(t,\eta) \qquad \text{với mọi } \eta \in \mathfrak{X}_0, t \in [0,T], \tag{2.11}$$

ở đây $\psi(\cdot,\eta)$ là nghiệm nhẹ của phương trình (2.7). Để rõ ràng hơn, chúng tôi sẽ trình bày tóm tắt ý tưởng chứng minh định lý này. Trước tiên, chúng tôi áp dụng Định lý biểu diễn Itô cho hàm $f \in \mathfrak{X}_T$ bất kỳ ta được tồn tại duy nhất một quá trình tương thích $\Xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ sao cho

$$f = \mathbb{E}f + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau,$$

ở đây $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ là không gian các quá trình ngẫu nhiên $(f(t))_{0\le t\le T}$ đo được, $F_t$-tương thích nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ và thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right) <$

$\infty$. Do vậy, để chứng minh (2.11) điều kiện đủ là chứng minh được đẳng thức

$$\left\langle \varphi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle = \left\langle \psi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle$$

đúng với mọi $C \in \mathbb{R}^d$ và $\Xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$. Để làm điều này, chúng tôi thiết lập một ước lượng trong Mệnh đề 2.1 cho

$$\left| \left\langle \varphi(t,\eta) - \psi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle \right| .$$

Trước khi khẳng định và chứng minh ước lượng này, chúng tôi cần chuẩn bị kết quả về ước lượng các thành phần của hạng tử trên, tức là ta cần ước lượng

$$\left\| \mathbb{E}(\varphi(t,\eta) - \psi(t,\eta)) \Big( c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau \Big) \right\| \quad \text{ở đây } c \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}).$$

Tiếp theo chúng tôi định nghĩa các hàm $\chi_{\xi,\eta,c}, \kappa_{\xi,\eta,c}, \widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}, \widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c} : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ bởi

$$\begin{aligned} \chi_{\xi,\eta,c}(t) &:= \mathbb{E}\varphi(t,\eta) \left( c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau \right), && (2.12)\\ \kappa_{\xi,\eta,c}(t) &:= \mathbb{E}b(t,\varphi(t,\eta)) \left( c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau \right), && (2.13)\\ \widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}(t) &:= \mathbb{E}\psi(t,\eta) \left( c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau \right), && (2.14)\\ \widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c}(t) &:= \mathbb{E}b(t,\psi(t,\eta)) \left( c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau \right). && (2.15) \end{aligned}$$

Để chứng minh Định lý 2.4 ta cần các kết quả bổ trợ sau.

**Chú ý 2.4.** *Trong chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển và nghiệm nhẹ, ta có*

$$\varphi(\cdot,\eta), \psi(\cdot,\eta) \in H^2([0,T],\mathbb{R}^d).$$

*Do đó,* $\chi_{\xi,\eta,c}, \kappa_{\xi,\eta,c}, \widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}, \widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c}$ *là đo được và bị chặn trên* $[0,T]$.

**Bổ đề 2.3.** *Với mọi* $t \in [0,T]$, *khẳng định sau đây là đúng*

$$\chi_{\xi,\eta,c}(t) \;=\; c\, E_\alpha(t^\alpha A)\mathbb{E}\eta$$

$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)\big(\kappa_{\xi,\eta,c}(t)+\mathbb{E}\xi(\tau)\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))\big)d\tau, \quad (2.16)$$

$$\widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}(\tau) = c\,E_{\alpha}(t^{\alpha}A)\mathbb{E}\eta$$
$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)\big(\widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c}(\tau)+\mathbb{E}\xi(\tau)\sigma(\tau,\psi(\tau,\eta))\big)d\tau. \quad (2.17)$$

**Mệnh đề 2.1.** *Cho* $M_T := \max_{t\in[0,T]} \|E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)\|$. *Khi đó, với* $C \in \mathbb{R}^d$ *bất kỳ và* $\Xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ *ta có*

$$\left|\left\langle \varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta), C+\int_0^T \Xi(\tau)\,dW_\tau\right\rangle\right|^2$$
$$\le 2dM_T^2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\left\|C+\int_0^T \xi(\tau)\,dW_\tau\right\|_{\mathrm{ms}}^2\int_0^t \|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2\,d\tau$$
$$+2dM_T^2L^2\left\|C+\int_0^T \xi(\tau)\,dW_\tau\right\|_{\mathrm{ms}}^2\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2\,d\tau.$$

## 2.5 Cận dưới cho sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này, chúng tôi sẽ dành thời gian để nghiên cứu khoảng cách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2},1)$ trên đoạn $[0,T]$ có dạng

$$^{C}D_{0+}^{\alpha}X(t) = b(t,X(t))+\sigma(t,X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \quad (2.18)$$

với $T>0$ bất kỳ, $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất có lọc đầy đủ $(\Omega,\mathcal{F},F:=(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)},\mathbb{P})$ và $b,\ \sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được thỏa mãn các điều kiện (H1) và (H2) trong Định lý 2.1.

Kết quả chính của mục này về sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên được phát biểu trong định lý sau.

**Định lý 2.5.** (**Sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Cho* $\eta,\zeta \in \mathfrak{X}_0$

*sao cho $\eta \neq \zeta$ và $\varphi(\cdot,\zeta), \varphi(\cdot,\eta)$ là hai nghiệm cổ điển của phương trình* (2.18). *Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$ ta có*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\epsilon} \|\varphi(t,\eta) - \varphi(t,\zeta)\|_{\mathrm{ms}} = \infty.$$

Để kết thúc phần này, chúng tôi đưa ra một ứng dụng của Định lý 2.5 liên quan đến số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường bất kỳ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tuyến tính bị chặn. Cụ thể, chúng ta xét phương trình sau

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = A(t)X(t) + B(t)X(t)\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.19}$$

trong đó $A, B : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ đo được và thỏa mãn

$$\operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \|A(t)\| < \infty, \quad \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \|B(t)\| < \infty.$$

Theo Định lý 2.1, với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0 \setminus \{0\}$, phương trình (2.18) tồn tại nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện ban đầu $X(0) = \eta$, được ký hiệu bởi $\Phi(\cdot,\eta)$. *Số mũ Lyapunov bình phương trung bình* của nghiệm không tầm thường $\Phi(\cdot,\eta)$ được định nghĩa bởi

$$\lambda_{\mathrm{ms}}(\Phi(\cdot,\eta)) := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}.$$

Trong hệ quả sau đây, chúng tôi chỉ ra rằng số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường bất kỳ là không âm.

**Hệ quả 2.2.** (**Tính không âm của số mũ Lyapunov bình phương trung bình**). *Số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường của phương trình* (2.19) *luôn không âm, tức là*

$$\lambda_{\mathrm{ms}}(\Phi(\cdot,\eta)) \geq 0 \quad \text{với mọi } \eta \in \mathfrak{X}_0 \setminus \{0\}.$$

# Chương 3

# Lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong thực tế chỉ một số ít phương trình vi phân ngẫu nhiên có thể tìm được công thức tường minh của nghiệm chính xác, vì vậy việc tìm nghiệm xấp xỉ của nó là một vấn đề đáng quan tâm.

Mục đích chính của chương này là xây dựng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và đánh giá tốc độ hội tụ cũng như tính ổn định của lược đồ vừa đưa ra.

Nội dung của Chương 3 được viết dựa trên bài báo [CT3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

## 3.1 Lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Cho $T > 0$ bất kỳ và xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{3.1}$$

ở đây $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất có lọc đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, F := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, \mathbb{P})$ và $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được và thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(H3) *Tính liên tục Lipschitz toàn cục trong $\mathbb{R}^d$ của $b$ và $\sigma$*: Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$,

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| \le L\|x - y\|, \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \le L\|x - y\|.$$

(H4) *Tính liên tục Hölder trong đoạn* $[0,T]$ *của* $b$ *và* $\sigma$: Tồn tại $L_1, L_2 > 0$ và $\beta, \gamma \in [0,1]$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}^d$, $t, s \in [0,T]$ ta có

$$\|b(t,x) - b(s,x)\| \le L_1|t-s|^\beta, \quad \|\sigma(t,x) - \sigma(s,x)\| \le L_2|t-s|^\gamma.$$

**Chú ý 3.1.** *Dễ dàng chứng minh được từ các điều kiện* (H3) *và* (H4) *ta có tính chất sau*

*(H5) Tăng trưởng không quá tuyến tính: Tồn tại* $K > 0$ *sao cho với* $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d$ *ta có*

$$\|b(t,x)\| \le K(1 + \|x\|), \quad \|\sigma(t,x)\| \le K(1 + \|x\|).$$

Để tránh các điểm kỳ dị của nhân, chúng tôi giới thiệu lược đồ rời rạc hóa dưới đây và được gọi là lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, nghiệm xấp xỉ $X^{(n)}(\cdot, \eta)$ được xác định bởi $X^{(n)}(0,\eta) := \eta$ và với $t \in (0,T]$ ta đặt

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t,\eta) := \eta \ &+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds \\ &+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\, dW_s, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ở đây $\tau_n(s) = \frac{kT}{n} =: \tau_k^{(n)}$ và $\rho_n(s) = \frac{(k+1)T}{n} =: \rho_k^{(n)}$ với $s \in (\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}]$.

Phương trình này có thể được giải từng bước trên mỗi khoảng $\left(\frac{Tk}{n}, \frac{T(k+1)}{n}\right]$, với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

## 3.2 Tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả chính của chương là đánh giá khoảng cách bình phương trung bình giữa nghiệm số $X^{(n)}(t,\eta)$ và nghiệm chính xác $X(t,\eta)$ của phương trình (3.1).

**Định lý 3.1.** (**Tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Giả thiết rằng các hệ số* $b, \sigma$ *của phương trình* (3.1) *thỏa mãn các điều kiện* (H3) *và*

(H4). *Khi đó, tồn tại một hằng số $C$ chỉ phụ thuộc vào $T, L, L_1, L_2, \alpha, \beta, \gamma$ sao cho*

$$\sup_{0\le t\le T} \|X^{(n)}(t,\eta) - X(t,\eta)\|^2_{\mathrm{ms}} \le \frac{C}{n^{2\kappa}}, \tag{3.3}$$

*ở đây* $\kappa := \min\left\{\beta, \gamma, \alpha - \frac{1}{2}\right\}$.

**Chú ý 3.2.** (i) *Khi các hệ số $b, \sigma$ không phụ thuộc vào thời gian thì tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình* (3.1) *là* $\alpha - \frac{1}{2}$.

(ii) *Khi $\alpha = 1$, tức là phương trình* (3.1) *trở thành phương trình vi phân ngẫu nhiên thì tốc độ hội tụ của lược đồ trong Định lý 3.1 trùng với tốc độ hội tụ mà chúng ta đã biết cho lược đồ Euler-Maruyama cổ điển (xem P. E. Kloeden và E. Platen năm 1992).*

(iii) *Rõ ràng luôn tồn tại mối quan hệ giữa kết quả trong chương này với các kết quả đã được đưa ra về lược đồ Euler cho phương trình Volterra ngẫu nhiên với nhân kỳ dị (xem X. Zhang năm 2008). Vì các nhân trong hệ mà chúng tôi nghiên cứu là hiển nên tốc độ hội tụ của lược đồ Euler nhận được là hiển. Lưu ý rằng tốc độ hội tụ trong X. Zhang năm 2008 là không hiển.*

Để chứng minh Định lý 3.1 chúng tôi cần hai bổ đề bổ trợ sau.

**Bổ đề 3.1.** *Nếu các hệ số $b, \sigma$ của phương trình* (3.1) *thỏa mãn điều kiện* (H5) *thì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có*

$$\sup_{0\le t\le T} \|X^{(n)}(t,\eta)\|^2_{\mathrm{ms}} \le C_1,$$

*ở đây*

$$C_1 := (1 + 3\|\eta\|^2_{\mathrm{ms}}) E_{2\alpha-1}\left(\frac{(6T+6)K^2\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma^2(\alpha)} T^{2\alpha-1}\right). \tag{3.4}$$

**Bổ đề 3.2.** *Giả sử rằng các hệ số $b, \sigma$ của phương trình* (3.1) *thỏa mãn điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính* (H5). *Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $t, \widetilde{t} \in [0, T]$ nghiệm xấp xỉ Euler-Maruyama có tính chất*

$$\|X^{(n)}(t,\eta) - X^{(n)}(\widetilde{t},\eta)\|^2_{\mathrm{ms}} \le \frac{C_2}{n^{2\alpha-1}} + C_3|t - \widetilde{t}\,|^{2\alpha-1},$$

*ở đây*

$$C_2 := \frac{8K^2(1+C_1)\,T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}, \quad C_3 := \frac{8(T+2)K^2(1+C_1)}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}, \tag{3.5}$$

*với $C_1$ được xác định trong Bổ đề 3.1.*

Kết quả chính của chương này có thể được mở rộng cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t)) + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(t, X(t))\, \frac{dW^i_t}{dt}, \tag{3.6}$$

ở đây $b$ và $\sigma_i, i = 1, \dots N$, là đo được và thỏa mãn các giả thiết (H3) và (H4) với cùng các hằng số $\beta, \gamma$. Cho điều kiện giá trị ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$, dạng tích phân tương ứng của phương trình (3.6) là

$$X(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{b(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\sigma_i(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, dW^i_s.$$

Bây giờ, chúng tôi áp dụng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama (3.2) trong Mục 3.1 cho phương trình này như sau:

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, nghiệm xấp xỉ $X^{(n)}(\cdot, \eta)$ được xác định bởi $X^{(n)}(0, \eta) := \eta$ và với $t \in (0, T]$ ta đặt

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t, \eta) := \eta \ &+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s), \eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds \\ &+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\sigma_i(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s), \eta))}{(\rho_n(t) - \tau_n(s))^{1-\alpha}}\, dW^i_s, \end{aligned}$$

ở đây $\tau_n(s) = \frac{kT}{n} =: \tau^{(n)}_k$ và $\rho_n(s) = \frac{(k+1)T}{n} =: \rho^{(n)}_k$ với $s \in (\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}]$. Bằng kỹ thuật chứng minh tương tự Định lý 3.1, ta được kết quả sau đây.

**Định lý 3.2.** *Giả sử $b$ và $\sigma_i, i = 1, \dots N$, là các hàm đo được và thỏa mãn các giả thiết* (H3) *và* (H4)*. Khi đó, tồn tại một hằng số $C$ không phụ thuộc vào $n$ sao cho*

$$\sup_{0 \le t \le T} \|X^{(n)}(t, \eta) - X(t, \eta)\|^2_{\mathrm{ms}} \le \frac{C}{n^{2\kappa}}, \tag{3.7}$$

*ở đây $\kappa := \min\left\{\beta, \gamma, \alpha - \frac{1}{2}\right\}$.*

## 3.3 Lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính

### 3.3.1 Lược đồ Euler-Maruyama mũ

Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính có dạng

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = \lambda X(t) + \mu X(t)\, \frac{dW_t}{dt}. \tag{3.8}$$

Gần đây, H. T. Tuan năm 2020 đã chứng minh được phương trình (3.8) ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu

$$\lambda < 0 \quad \text{và} \quad \mu^2 \int_0^{\infty} s^{2\alpha-2} \left(E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^{\alpha})\right)^2 \, ds < 1. \tag{3.9}$$

Công cụ chính để chứng minh kết quả trên là sử dụng công thức biến thiên hằng số được đưa ra trong Định lý 2.4, tức là dạng tích phân của phương trình (3.8) được cho bởi

$$X(t) = E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})X(0) + \mu \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha}) X(s)\, dW_s. \tag{3.10}$$

Dựa trên lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân ngẫu nhiên, chúng tôi xây dựng lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình (3.8). Với bước chia $h > 0$ cố định, *Lược đồ Euler-Maruyama mũ* cho phương trình (3.8) được xác định bởi $\widehat{X}_h(0) := X(0) \in \mathfrak{X}_0$ và với $t \in (0, T]$ ta đặt

$$\widehat{X}_h(t) := E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})X(0) + \mu \int_0^t (t-\tau_h(s))^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^{\alpha}) \widehat{X}_h(\tau_h(s))\, dW_s, \tag{3.11}$$

ở đây $\tau_h : (0, \infty) \to [0, \infty)$ được định nghĩa bởi

$$\tau_h(s) = kh \qquad \text{với } s \in (kh, (k+1)h], k = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.12}$$

### 3.3.2 Tốc độ hội tụ và sự ổn định của phương pháp Euler-Maruyama mũ

Trong mục này chúng tôi quan tâm đến tốc độ hội tụ và sự ổn định của phương pháp số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính (3.8).

**Định lý 3.3.** (**Tốc độ hội tụ và sự ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ**). *(i) Với $T > 0$ bất kỳ, tồn tại hằng số $C$ chỉ phụ thuộc vào $T, \lambda$ và $\mu$ sao cho*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\widehat{X}_h(t) - X(t)\|_{\mathrm{ms}} \le Ch^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

*(ii) Giả sử điều kiện (3.9) đúng. Với bước chia $h > 0$ bất kỳ, tồn tại $K > 0$ sao cho nghiệm $\widehat{X}_h$ của phương trình (3.11) thỏa mãn*

$$\|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}} \le K\|X(0)\|_{\mathrm{ms}} \qquad \text{với mọi } t \ge 0$$

*và hơn nữa với $\delta \in (0, \alpha)$ bất kỳ, ta có $\lim_{t\to\infty} t^\delta \|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}} = 0$. Từ đó suy ra nghiệm số vẫn ổn định tiệm cận.*

Để chứng minh Định lý 3.3, chúng tôi cần bốn bổ đề chuẩn bị.

**Bổ đề 3.3.** *Đặt $M_1 := \max_{0\le t\le T}(E_\alpha(\lambda t^\alpha))^2, M_2 := \max_{0\le t\le T}(E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha))^2$ và*

$$C_4 := M_1 E_{2\alpha-1}\left(\mu^2 M_2 \Gamma(2\alpha-1)T^{2\alpha-1}\right)\|X(0)\|^2_{\mathrm{ms}}. \tag{3.13}$$

*Khi đó, với mọi $h > 0$ ta có $\sup_{0\le t\le T} \|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\mathrm{ms}} \le C_4$.*

**Bổ đề 3.4.** *Đặt*

$$M_3 := \left(\max_{x\in[0,T^\alpha]} \partial_x E_\alpha(\lambda x)\right)^2, M_4 := \left(\max_{x\in[0,T^\alpha]} \partial_x E_{\alpha,\alpha}(\lambda x)\right)^2$$

*và*

$$C_5 := 4M_3 T\|X(0)\|^2_{\mathrm{ms}} + \frac{8\mu^2 M_2 C_4 + 4\mu^2 M_4 C_4 T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, \tag{3.14}$$

*ở đây $C_4$ được cho trong (3.13). Khi đó, với mọi $h > 0$ và $t, \widetilde{t} \in [0, T]$ ta có*

$$\|\widehat{X}_h(t) - \widehat{X}_h(\,\widetilde{t}\,)\|^2_{\mathrm{ms}} \le C_5|t - \widetilde{t}\,|^{2\alpha-1}.$$

**Bổ đề 3.5.** *Giả sử $\lambda > 0$. Khi đó, tồn tại $M(\lambda,\alpha)$ phụ thuộc vào $\lambda$ và $\alpha$ sao cho*

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) \le \frac{M(\lambda,\alpha)}{\max\{1, t^\alpha\}}, \quad E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \le \frac{M(\lambda,\alpha)}{\max\{1, t^{2\alpha}\}} \qquad \text{với mọi } t \ge 0. \tag{3.15}$$

**Bổ đề 3.6.** *Giả sử $\mu^2 \int_0^\infty \frac{\left(E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha)\right)^2}{s^{2-2\alpha}}\, ds < 1$, $\delta \in (0, \alpha)$ bất kỳ. Khi đó, ta có*

$$\limsup_{t\to\infty} \mu^2 \int_0^t \frac{\left(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\right)^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t^{2\delta}\}}{\max\{1, s^{2\delta}\}}\, ds < 1.$$

# Kết luận và kiến nghị

## 1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu một số vấn đề về phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- *Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển, nghiệm nhẹ đối với phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.
- *Chứng minh được sự phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.
- *Chứng minh được công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.
- *Chứng minh được khoảng cách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên là lớn hơn* $t^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}-\varepsilon}$ *khi* $t \to \infty$ *với mọi* $\epsilon > 0$.
- *Xây dựng được lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và đánh giá được tốc độ hội tụ của lược đồ này. Đánh giá được tốc độ hội tụ và tính ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính.*

**2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo**

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề về phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên cần được nghiên cứu thêm trong thời gian tới, chúng tôi dự định sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

- *Tính ổn định của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Tính chính quy của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Nghiên cứu nghiệm của phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên với đạo hàm "substantial" phân thứ Caputo bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *có dạng*

$$\begin{aligned} X(t) = \eta \; &+ \; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{e^{-\widetilde{\beta}(t-s)} b(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} \, ds \\ &+ \; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{e^{-\widetilde{\beta}(t-s)} \sigma(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} \, dW_s. \end{aligned}$$

- *Nghiên cứu mở rộng các kết quả trong* $L^p$ *với* $p > 2$ *cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Xây dựng các lược đồ số khác cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *và nghiên cứu tốc độ hội tụ cũng như tính ổn định của các lược đồ số đó.*

# Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án

[CT1] D. T. Son, P. T. Huong, Kloeden P. E., H. T. Tuan (2018), Asymptotic separation between solutions of Caputo fractional stochastic differential equations, *Stoch. Anal. Appl.*, **36**(4), pp. 654-664, (SCIE).

[CT2] P. T. Anh, D. T. Son, P. T. Huong (2019), A variation of constant formula for Caputo fractional stochastic differential equations, *Statist. Probab. Lett.*, **145**, pp. 351–358, (SCIE).

[CT3] D. T. Son, P. T. Huong, Kloeden P. E., V. A. My (2020), Euler-Maruyama scheme for Caputo fractional stochastic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **380**, https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112989, (SCIE).

## Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

1. Xêmina của Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

2. Xêmina của Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

3. Xêmina của Phòng Xác suất-Thống kê, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

4. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XIV (4/1/2018), Học viện Kỹ thuật Quân sự.

5. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX (14-18/8/2018), Nha Trang.

6. Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 17 (18/4/2019), Hà Nội.

7. Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 18 (20/8/2020), Hà Nội.