BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

PHAN THỊ HƯƠNG

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ CAPUTO NGẪU NHIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2020

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BỘ QUỐC PHÒNG**

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

PHAN THỊ HƯƠNG

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHÂN THỨ CAPUTO NGẪU NHIÊN

CHUYÊN NGÀNH: **TOÁN ỨNG DỤNG**

MÃ SỐ: **9 46 01 12**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

1. PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn

2. TS. Tạ Ngọc Ánh

HÀ NỘI - 2020

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, dưới sự hướng dẫn của các cán bộ trong tập thể hướng dẫn khoa học. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đều đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong công trình của các tác giả khác. Các tài liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

NCS. Phan Thị Hương

Lời cảm ơn

Bản luận án này được hoàn thành tại Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự dưới sự hướng dẫn của PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn và TS. Tạ Ngọc Ánh. Trong quá trình học tập và nghiên cứu, tác giả đã nhận được sự động viên, khuyến khích và chỉ bảo rất tận tình của tập thể giáo viên hướng dẫn. Các thầy đã không quản công sức, dành rất nhiều thời gian thảo luận, rèn giũa và định hướng cho trò. Nghiên cứu sinh xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới hai Thầy.

Nghiên cứu sinh xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Bộ môn Toán, Học viện Kỹ thuật Quân sự và các thầy cô ở Viện Toán học-Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã quan tâm giúp đỡ, động viên và đã cho nghiên cứu sinh những ý kiến đóng góp quý báu. Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS. TS. Ngô Hoàng Long, TS. Phạm Thế Anh, TS. Bùi Văn Định, TS. Nguyễn Như Thắng, các anh chị và bạn bè đồng nghiệp đã luôn bên cạnh động viên, chỉ dạy và giúp đỡ nghiên cứu sinh trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Nghiên cứu sinh trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám đốc, Phòng Sau đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Công nghệ Thông tin, Hệ quản lý Học viên Sau đại học, Học viện Kỹ thuật Quân sự đã luôn giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Tác giả thành kính dâng tặng món quà tinh thần này đến gia đình thân yêu của mình với lòng biết ơn sâu sắc. Bản luận án này sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự cảm thông và giúp đỡ của những người thân trong gia đình tác giả.

Tác giả

Mở đầu

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Phép tính vi phân, tích phân là một công cụ phổ biến để mô tả các quá trình tiến hóa (xem [25, 43, 55]). Thông thường, mỗi quá trình tiến hóa được biểu diễn bởi các phương trình vi phân thường. Bằng việc nghiên cứu (định tính hoặc định lượng) nghiệm của phương trình, người ta có thể biết trạng thái hiện thời cũng như dự đoán được dáng điệu ở quá khứ hay tương lai của quá trình đó. Tuy nhiên, các hiện tượng hay gặp trong cuộc sống có tính chất phụ thuộc vào quá khứ (xem [11, 12, 29]). Đối với các hiện tượng này, việc ngoại suy dáng điệu của hệ tại một thời điểm tương lai từ quá khứ phụ thuộc cả vào quan sát địa phương lẫn toàn bộ quá khứ. Hơn nữa, sự phụ thuộc nói chung cũng không giống nhau ở tất cả các thời điểm. Một trong các lý thuyết được xây dựng để giải quyết những bài toán thực tế vừa nêu là giải tích phân thứ (xem [18, 21, 35, 36, 45, 46, 53]).

Mặc dù đã được nghiên cứu từ lâu nhưng lý thuyết giải tích phân thứ phát triển tương đối chậm. Một trong những nguyên nhân là do người ta chưa tìm thấy ý nghĩa hình học hay vật lý của toán tử đạo hàm phân thứ. Thật ra, hạn chế vừa nêu chỉ mang tính lý thuyết. Vai trò quan trọng của lý thuyết giải tích phân thứ là ứng dụng giải các bài toán thực tế (xem [11, 12, 44, 51]). Lý thuyết này có ưu thế hơn so với phép tính vi phân, tích phân cổ điển trong mô phỏng các quá trình có trí nhớ. Cùng với sự phát triển của máy tính điện tử và các phương pháp tính, trong bốn thập kỷ gần đây, người ta phát hiện ra ngày càng nhiều ứng dụng của giải tích phân thứ trong các ngành khoa học khác nhau từ Vật lý, Hóa học, Sinh học đến Tài chính, Khoa học xã hội,....

Một trong các cuốn sách đầu tiên viết về ứng dụng của giải tích phân thứ là [41]. Trong cuốn sách này, K. Oldham và J. Spenier trình bày rất nhiều ý tưởng, phương pháp và ứng dụng của giải tích phân thứ. Sau [41], nhiều công trình về các phương diện khác nhau của lý thuyết này được công bố. Nổi bật trong số đó là các cuốn sách của S. Samko, O. Marichev, A. Kilbas [49], M. Caputo [10], R. Gorenflo và S. Vessella [22], K. Miller và B. Ross [38], A. Carpinteri và F. Mainardi [14]. Rất gần đây có thêm các chuyên khảo đáng chú ý của K. Diethelm [19], V. Lakshmikantham, S. Leela và J. Vasundhara Devi [32], B. Bandyopadhyay và S. Kamal [9].

Có nhiều loại đạo hàm phân thứ khác nhau tùy thuộc vào cách người ta tổng quát hóa đạo hàm $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ cho trường hợp n không nguyên. Tuy nhiên, hai khái niệm được dùng phổ biến hơn cả là đạo hàm Riemann-Liouville và đạo hàm Caputo. Đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville được phát triển bởi Abel, Riemann và Liouville trong nửa đầu thế kỷ 19 (xem [18, 45]). Tuy nhiên, khi áp dụng khái niệm này để mô tả các hiện tượng thực tế thì gặp hạn chế do điều kiện ban đầu trong các bài toán giá trị ban đầu không có ý nghĩa vật lý. Đạo hàm phân thứ Caputo được M. Caputo xây dựng năm 1969 (xem [10]). Định nghĩa đạo hàm này được xây dựng dựa trên sự cải biên khái niệm đạo hàm Riemann-Liouville với mục đích ban đầu là giải bài toán nhớt. So với đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville, đạo hàm Caputo dễ áp dụng cho các bài toán thực tế hơn vì điều kiện ban đầu của các mô hình sử dụng đạo hàm Caputo có ý nghĩa vật lý (xem [19]).

Lý thuyết giải tích phân thứ ngày càng trở nên phổ biến và phát triển nhanh (xem thêm [4, 7, 8, 15, 27, 52]). Nhiều kết quả trong lý thuyết cũng như ứng dụng thực tế được tìm ra ngày càng nhiều (xem [42, 52]) và ngoài ra người đọc có thể tham khảo trong [36]. Đây là bộ sách gồm tám cuốn được các tác giả viết năm 2019, trong đó trình bày một cách hệ thống về lý thuyết giải tích phân thứ, giải số phương trình vi phân phân thứ và các ứng dụng trong Vật lý, Điều khiển, Kỹ thuật, cuộc sống và Khoa học xã hội.

Lý thuyết phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên là một hướng nghiên cứu tương đối mới được sinh ra từ lý thuyết phương trình vi phân phân thứ Caputo và lý thuyết xác suất. Nó nhấn mạnh tới khía cạnh của thế giới ta đang sống bao gồm nhiều yếu tố ngẫu nhiên. Bằng cách kết hợp các kết quả của hai ngành cơ sở trên, lý thuyết phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên nhận được những lợi thế của cả hai ngành và có thể đưa ra được mô hình toán học thích hợp hơn cho các hiện tượng tự nhiên và xã hội.

Phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên là sự mở rộng tự nhiên của phương trình vi phân phân thứ, do đó nó đã nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trên thế giới vì thực tế rằng hệ phân thứ xuất hiện trong nhiều mô hình trong Cơ học, Vật lý, Kỹ thuật điện tử, Lý thuyết điều khiển,..., chi tiết hơn chúng ta có thể tham khảo trong [19, 44] và nhiều tài liệu chuyên khảo khác. Tuy nhiên, trong sự tương phản một số lớn các công bố về phương trình vi phân phân thứ tất định, chỉ có một số ít bài báo liên quan đến phương trình vi phân ngẫu nhiên với đạo hàm phân thứ Caputo và hầu hết các bài báo này mới dừng lại ở việc thiết lập kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm hoặc nghiên cứu tính chính quy của nghiệm (xem [48, 56, 57]). Ở đây chúng tôi phân biệt hai loại nghiệm, loại nghiệm đầu tiên là nghiệm cổ điển (classical solutions) và theo sự hiểu biết của tác giả, câu hỏi về sự tồn tại và duy nhất nghiệm loại này mới được đề cập trong [56, 57]. Trong [57], tác giả chưa chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển với bậc phân thứ $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ còn trong [56] việc chứng minh định lý tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển toàn cục gặp vấn đề khi thác triển nghiệm cổ điển từ một khoảng nhỏ $[0, T_a]$ ra toàn khoảng $[0, \infty)$. Luận án này sẽ khắc phục các hạn chế trên. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra được công thức biến thiên hằng số và một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Loại nghiệm thứ hai là nghiệm nhẹ (mild solutions), sự tồn tại và duy nhất của loại nghiệm này đã được nghiên cứu trong [48] cho lớp các phương trình khá rộng. Tuy nhiên, các điều kiện đưa ra trong bài báo này khá chặt (xem [48, Định lý 4.2]). Với các điều kiện yếu hơn (xem Định lý 2.3.2 ở Mục 2.3 Chương 2), chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm nhẹ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Việc giải số phương trình vi phân và phương trình vi phân ngẫu nhiên là bài toán có nhiều ý nghĩa trong ứng dụng. Thực tế rất ít phương trình vi phân ngẫu nhiên giải được nghiệm hiển hoặc nếu tìm được nghiệm hiển thì biểu thức quá phức tạp. Vì vậy, trong nhiều thập kỷ qua, bài toán này đã thu hút rất nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trên thế giới (xem [30, 37, 39]). Tương tự như thế, việc giải số phương trình vi phân phân thứ và phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên cũng rất thú vị. Đối với phương trình vi phân phân thứ tất định, các phương pháp giải số đã được xây dựng một cách có hệ thống và khá đầy đủ (xem [19, 36]). Tuy nhiên, theo sự hiểu biết của nghiên cứu sinh việc giải số phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên mới chỉ được đề cập trong [59]. Tác giả của bài báo này đã đưa ra được lược đồ Euler cho phương trình Volterra ngẫu nhiên với nhân kỳ dị nhưng chưa đưa ra được tốc độ hội tụ hiển của lược đồ. Tiếp nối hướng nghiên cứu này và dựa theo ý tưởng của bài báo [59], chúng tôi thiết lập được lược đồ số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và đánh giá được tốc độ hội tụ hiển của lược đồ số này. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra được tốc độ hội tụ và tính ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu các chủ điểm sau trong lý thuyết của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên:

(i) Một số tính chất nghiệm của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

(ii) Giải số nghiệm của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với các mục tiêu đặt ra như trên, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau:

Nội dung 1. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Nội dung 2. Công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Nội dung 3. Một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Nội dung 4. Xây dựng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

4. Phương pháp nghiên cứu

Xuất phát từ mục tiêu của đề tài nghiên cứu, các phương pháp nghiên cứu được sử dụng như sau:

- Để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên, chúng tôi xây dựng một chuẩn có trọng số phù hợp và áp dụng Định lý điểm bất động của Banach.
- Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu được chứng minh dựa trên ước lượng khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt khi thời gian hữu hạn. Để chứng minh sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt chúng tôi dùng phương pháp chứng minh phản chứng.
- Để có được công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên, chúng tôi dùng Định lý biểu diễn Itô và công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo tất định.

- Lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và đánh giá tốc độ hội tụ của phương pháp được dựa trên các kết quả đã biết về lược đồ Euler-Maruyama cho phương trình vi phân ngẫu nhiên bậc nguyên và kỹ thuật rời rạc hóa để tránh các điểm kỳ dị của nhân.

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- *Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển, nghiệm nhẹ đối với phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Đưa ra được công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Chứng minh được sự phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Chứng minh được khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *tiến đến* 0 *không nhanh hơn tốc độ đa thức với số mũ đủ lớn. Từ đó, chúng tôi chứng minh được số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường bất kỳ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tuyến tính bị chặn luôn không âm.*

- *Xây dựng được lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *và đánh giá được tốc độ hội tụ cho lược đồ này. Đưa ra được tốc độ hội tụ và tính ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính.*

Các kết quả chính của luận án được công bố trong 03 bài báo

trên các tạp chí quốc tế có uy tín và đã được báo cáo tại:

1. Xêmina của Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

2. Xêmina của Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự.

3. Xêmina của Phòng Xác suất-Thống kê, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

4. Hội nghị Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ lần thứ XIV (4/1/2018), Học viện Kỹ thuật Quân sự.

5. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX (14-18/8/2018), Nha Trang.

6. Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 17 (18-20/4/2019), Ba Vì, Hà Nội.

7. Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ 18 (20-22/8/2020), Hòa Lạc, Hà Nội.

6. Bố cục của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, luận án có ba chương.

Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở liên quan đến giải tích ngẫu nhiên và giải tích phân thứ. Cụ thể, trong Phần 1.1 chúng tôi trình bày sơ lược về giải tích ngẫu nhiên gồm chuyển động Brown, tích phân ngẫu nhiên Itô, Định lý biểu diễn Itô, phương trình vi phân ngẫu nhiên và lược đồ số Euler-Maruyama cho phương trình vi phân ngẫu nhiên. Trong Phần 1.2, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị về giải tích phân thứ gồm tích phân phân thứ, đạo hàm phân thứ Caputo, hàm Mittag-Leffler và công thức biến thiên hằng số.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu một số vấn đề về phương trình vi phân

phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Chương này có năm phần, Phần 2.1 thảo luận về sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển. Công cụ để chứng minh kết quả này là xây dựng một chuẩn có trọng số phù hợp và áp dụng Định lý điểm bất động của Banach. Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên vào giá trị ban đầu được trình bày trong Phần 2.2. Trong Phần 2.3, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bằng cách sử dụng các kỹ thuật chứng minh tương tự trong Phần 2.1. Công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên được nghiên cứu trong Phần 2.4. Sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên được nghiên cứu trong phần cuối của chương. Kết quả này khẳng định rằng khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt tiến đến 0 không nhanh hơn tốc độ đa thức với số mũ đủ lớn. Từ đó chúng tôi chứng minh được tính không âm của các số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tuyến tính bị chặn.

Trong Chương 3, chúng tôi dành cho nghiên cứu phương pháp giải số phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Chương này gồm có ba phần, Phần 3.1 dành để mô tả về lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Phần 3.2 tập trung chứng minh tốc độ hội tụ của lược đồ số vừa đưa ra. Một ví dụ minh họa cho tốc độ hội tụ trong nghiên cứu lý thuyết được xem xét ở cuối phần này. Phần cuối của chương dành cho nghiên cứu tốc độ hội tụ và sự ổn định của lược đồ số Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính.

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên.
$\mathbb{N}^*$	Tập hợp các số tự nhiên khác 0.
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực.
$\mathbb{R}_+$	Tập hợp các số thực không âm.
$\mathbb{R}_-$	Tập hợp các số thực không dương.
$\mathbb{R}_+^*$	Tập hợp các số thực dương.
$\langle .,. \rangle$	Tích vô hướng.
$\mathbb{R}^d$	Không gian Euclide thực d chiều.
$\|\|.\|\|$	Chuẩn Euclide (độ dài).
A^{T}	Chuyển vị của véc tơ hay ma trận A.
$L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$	Không gian các biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ thỏa mãn $\mathbb{E}\|X\|^p < \infty$.
$C([0,T], \mathbb{R}^d)$	Không gian các hàm liên tục f xác định trên $[0,T]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ với chuẩn $\\|f\\| = \sup_{0 \le x \le T}\|f(x)\|$.
α	Cấp của đạo hàm phân thứ.
I_{0+}^{α}	Toán tử tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α.
${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$	Toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α.
$\exp(t)$	Hàm mũ.
$\Gamma(z)$	Hàm Gamma.
E_{α}	Hàm Mittag–Leffler một tham số.
$E_{\alpha,\beta}$	Hàm Mittag–Leffler hai tham số.

$L^p([0,T],\mathbb{R}^d)$	Không gian các hàm đo được theo nghĩa Borel $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ thỏa mãn $\int_0^T \|f(t)\|^p \, dt < \infty$.
$\mathcal{M}^p([0,T],\mathbb{R}^d)$	Không gian các quá trình ngẫu nhiên $(f(t))_{0\le t\le T}$ đo được, $\mathcal{F}_t-$tương thích, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ và thỏa mãn $\mathbb{E}\left(\int_0^T \|f(t)\|^p \, dt\right) < \infty$.
$\\|f\\|_{\mathrm{ms}}$	$:= \sqrt{\sum_{i=1}^d \mathbb{E}(\|f_i\|^2)}$ với $f = (f_1, ..., f_d)^{\mathrm{T}} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ là hàm khả tích bình phương trung bình.
$H^2([0,T],\mathbb{R}^d)$	Không gian các quá trình $(\xi(t))_{0\le t\le T}$ đo được, F_T-tương thích với $F_T := (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ và thỏa mãn $\\|\xi\\|_{H^2} := \mathrm{esssup}_{0\le t\le T} \\|\xi(t)\\|_{\mathrm{ms}} < \infty$.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này được dành để nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích ngẫu nhiên và giải tích phân thứ. Phần 1.1 trình bày các nội dung gồm chuyển động Brown, tích phân ngẫu nhiên Itô, Định lý biểu diễn Itô và phương trình vi phân ngẫu nhiên. Phần còn lại của chương tập trung tóm lược một số kiến thức của giải tích phân thứ gồm tích phân và đạo hàm phân thứ, hàm Mittag-Leffler và công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ. Những kiến thức về giải tích ngẫu nhiên có thể tìm thấy trong [1, 2, 26, 33, 37, 40] và những kiến thức về giải tích phân thứ có thể tìm thấy trong [4, 19].

1.1 Một số kiến thức về giải tích ngẫu nhiên

1.1.1 Chuyển động Brown

Năm 1828, nhà thực vật học Robert Brown người Scotland nghiên cứu sự chuyển động bất thường của các hạt phấn hoa trong nước, chuyển động đó sau này được giải thích bởi sự va chạm ngẫu nhiên của các hạt phấn hoa với các phân tử nước và ngày nay được gọi là chuyển động Brown. Để mô tả về mặt toán học chuyển động này, người ta dùng khái niệm quá trình ngẫu nhiên $W_t(\omega)$, nó được hiểu như là vị trí của hạt phấn hoa ω tại thời điểm t. Tiếp theo chúng tôi sẽ nhắc lại định nghĩa toán học cho chuyển động Brown.

Định nghĩa 1.1.1. (**Chuyển động Brown một chiều**)([33, Định nghĩa tr. 38] hoặc [26, Định nghĩa 2.1.1]). *Cho* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *là không gian xác suất với bộ lọc*

$(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$. *Quá trình ngẫu nhiên* $(W_t)_{t\geq 0}$ *được gọi là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn ứng với bộ lọc* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *nếu*

(i) W_t *là* $\mathcal{G}_t-$*đo được với mọi* $t \geq 0$.

(ii) *Với hầu chắc chắn mọi* $\omega \in \Omega$, *ánh xạ* $t \mapsto W_t(\omega)$ *liên tục.*

(iii) $W_0 = 0$ *hầu chắc chắn (viết tắt là h.c.c).*

(iv) *Với* $0 \leq s < t < \infty$, *gia số* $W_t - W_s$ *có phân phối chuẩn với giá trị trung bình bằng* 0 *và phương sai bằng* $t - s$, *tức là* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

(v) *Với* $0 \leq s < t < \infty$, *gia số* $W_t - W_s$ *độc lập với* $\mathcal{G}_s$.

Nếu $(W_t)_{t\geq 0}$ là chuyển động Brown và $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty$ thì các gia số $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, 1 \leq i \leq k$ là độc lập và chúng ta nói chuyển động Brown có *gia số độc lập*. Hơn nữa, phân bố của $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ chỉ phụ thuộc vào hiệu $t_i - t_{i-1}$ nên người ta nói chuyển động Brown có *gia số dừng*.

Bộ lọc $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ là một phần trong định nghĩa của chuyển động Brown. Tuy nhiên, nếu chúng ta cho trước một quá trình ngẫu nhiên $W = (W_t)_{t\geq 0}$ mà không có bộ lọc nhưng chúng ta biết W có gia số độc lập, dừng và $W_t = W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(0, t)$ thì $(W_t)_{t\geq 0}$ là chuyển động Brown ứng với bộ lọc $(\mathcal{G}_t^W)_{t\geq 0}$, ở đây $\mathcal{G}_t^W := \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ là bộ lọc nhỏ nhất được sinh bởi quá trình ngẫu nhiên $(W_t)_{t\geq 0}$. Tuy thế, bộ lọc $(\mathcal{G}_t^W)_{t\geq 0}$ chỉ có tính chất liên tục trái mà không có tính chất liên tục phải (xem [26, tr. 89])). Do đó, chúng ta cần mở rộng bộ lọc $(\mathcal{G}_t^W)_{t\geq 0}$ sao cho $(W_t)_{t\geq 0}$ vẫn là chuyển động Brown ứng với bộ lọc này. Cụ thể, ta định nghĩa

$$\mathcal{F}_t := \sigma\left(\mathcal{G}_t^W \cup \mathcal{N}\right),$$

ở đây

$$\mathcal{N} := \{U \subset \Omega, \exists V \in \mathcal{G}_\infty^W \text{ sao cho } U \subset V \text{ và } \mathbb{P}(V) = 0\},$$

với $\mathcal{G}_\infty^W := \sigma\left(\cup_{t\geq 0}\mathcal{G}_t^W\right)$. Người ta gọi $\mathcal{F}_t$ là sự làm rộng của sigma trường $\mathcal{G}_t^W$ qua $\mathbb{P}$ và bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ được gọi là bộ lọc được làm rộng. Bộ lọc này có tính liên tục phải và đảm bảo $(W_t)_{t\geq 0}$ vẫn là chuyển động Brown đối với nó (xem [26, tr. 89, tr. 90]). Trong suốt các phần sau của Luận án, chúng tôi luôn xét không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ được làm rộng theo cách xây dựng ở trên.

Để kết thúc phần này, chúng ta nhắc lại một vài tính chất quan trọng của chuyển động Brown như tính liên tục, tính không đâu khả vi, cụ thể ta có tính chất dưới đây.

Định lý 1.1.2. ([26, Định lý 9.18] và [33, Định lý tr. 51, tr. 53])

(i) *Với hầu hết $\omega \in \Omega$, quỹ đạo mẫu $W_\cdot(\omega)$ của chuyển động Brown liên tục Hölder địa phương cấp δ với $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ và không đâu liên tục Hölder cấp δ với $\delta > \frac{1}{2}$.*

(ii) *Với hầu hết $\omega \in \Omega$, quỹ đạo mẫu $W_\cdot(\omega)$ của chuyển động Brown là không đâu khả vi và có biến phân vô hạn trên mỗi khoảng con.*

1.1.2 Tích phân ngẫu nhiên Itô

Trong mục này chúng tôi sẽ trình bày cách xây dựng tích phân ngẫu nhiên có dạng

$$\int_0^T f(s)dW_s$$

đối với chuyển động Brown một chiều $(W_t)_{t\geq 0}$ cho lớp các quá trình ngẫu nhiên $(f(t))_{0\leq t\leq T}$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Vì với hầu hết $\omega \in \Omega$, các quỹ đạo mẫu $W_\cdot(\omega)$ của chuyển động Brown không đâu khả vi nên nó không thể hiểu như tích phân thông thường được (xem Định lý 1.1.2). Tích phân trên lần đầu tiên được định nghĩa bởi nhà toán học K. Itô người Nhật Bản năm 1949 và được gọi là *tích phân ngẫu nhiên Itô*.

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất đầy đủ với bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $(W_t)_{t\geq 0}$ là chuyển động Brown một chiều xác định trên không gian xác suất này và tương thích với bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sau đây chúng tôi giới thiệu không gian các hàm f mà ta định nghĩa $\int_0^T f(s)dW_s$.

Định nghĩa 1.1.3. ([37, Định nghĩa 1.5.1]). *Cho* $0 < T < \infty$. *Ký hiệu* $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$ *là không gian tất cả các quá trình ngẫu nhiên* $f = (f(t))_{0\le t\le T}$ *nhận giá trị thực và thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $(f(t))_{0\le t\le T}$ *là quá trình đo được, tức là hàm* $f : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ *là* $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}-$*đo được, ở đây* $\mathcal{B}$ *là* $\sigma-$*đại số Borel trên đoạn* $[0,T]$.

(ii) *Quá trình* $(f(t))_{0\le t\le T}$ *là tương thích với bộ lọc* $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, *tức là với mọi* $t\in[0,T]$ *ta có*

$$f(t)^{-1}(A) = \{\omega : f(t,\omega)\in A\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(iii) $\|f\|^2_{0,T} := \mathbb{E}\left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right) < \infty.$

Chúng ta đồng nhất f *và* $\bar{f}$ *trong* $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$ *nếu* $\|f-\bar{f}\|^2_{0,T} = 0$ *và ký hiệu là* $f = \bar{f}$.

Trước hết, chúng ta định nghĩa $\int_0^T f(s)dW_s$ cho lớp các quá trình đơn giản.

Định nghĩa 1.1.4. ([37, Định nghĩa 1.5.2]). *Quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị thực* $g = (g(t))_{0\le t\le T}$ *được gọi là quá trình đơn giản (hay quá trình bậc thang) nếu tồn tại phân hoạch* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T$ *của đoạn* $[0,T]$ *và các biến ngẫu nhiên bị chặn* $\xi_i, 0\le i\le k-1$, *sao cho* ξ_i *là* $\mathcal{F}_{t_i}-$*đo được và*

$$g(t) = \xi_0 I_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i I_{(t_i,t_{i+1}]}(t), \tag{1.1}$$

ở đây $I_{(t_i,t_{i+1}]}$ *là hàm chỉ tiêu của tập* $(t_i,t_{i+1}]$. *Ký hiệu* $\mathcal{M}_0([0,T],\mathbb{R})$ *là họ tất cả các quá trình đơn giản.*

Tiếp theo chúng ta định nghĩa tích phân Itô cho các quá trình đơn giản.

Định nghĩa 1.1.5. (**Tích phân Itô cho quá trình đơn giản**)([37, Định nghĩa 1.5.3]). *Cho* g *là một quá trình đơn giản có dạng* (1.1) *trong* $\mathcal{M}_0([0,T],\mathbb{R})$, *ta định nghĩa*

$$\int_0^T g(t)dW_t := \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \tag{1.2}$$

và được gọi là tích phân ngẫu nhiên (tích phân Itô) của quá trình đơn giản g đối với chuyển động Brown $(W_t)_{t\geq 0}$.

Bổ đề sau đưa ra một số tính chất của tích phân Itô cho quá trình đơn giản.

Bổ đề 1.1.6. ([37, Bổ đề 1.5.4 và Bổ đề 1.5.5]). *Cho $f, g \in \mathcal{M}_0([0,T],\mathbb{R}); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó, các khẳng định sau là đúng*

(i) $\mathbb{E}\left(\int_0^T g(t)dW_t\right) = 0.$

(ii) $\mathbb{E}\left|\int_0^T g(t)dW_t\right|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T |g(t)|^2 dt\right).$

(iii) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_0([0,T],\mathbb{R}).$

(iv) $\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))dW_t = \alpha \int_0^T f(t)dW_t + \beta \int_0^T g(t)dW_t.$

Ta sử dụng Bổ đề 1.1.6 để mở rộng định nghĩa tích phân ngẫu nhiên cho quá trình $f \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$. Việc mở rộng này dựa trên kết quả xấp xỉ một hàm thuộc $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$ bởi các hàm đơn giản.

Bổ đề 1.1.7. ([37, Bổ đề 1.5.6]). *Với mọi quá trình $f \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$, tồn tại dãy $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ các quá trình đơn giản sao cho*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_a^b |g_n(t) - f(t)|^2 dt\right) = 0.$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.6 và Bổ đề 1.1.7 ta suy ra $(\int_a^b g_n(t)dW_t)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy Cauchy trong $L^2(\Omega,\mathbb{R})$, nên nó tồn tại giới hạn và ta gọi giới hạn đó là tích phân ngẫu nhiên của quá trình f.

Định nghĩa 1.1.8. (**Tích phân ngẫu nhiên Itô tổng quát**) ([37, Định nghĩa 1.5.7]). *Cho quá trình $f \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$. Tích phân ngẫu nhiên Itô của f đối với chuyển động Brown $(W_t)_{t\geq 0}$ được định nghĩa bởi*

$$\int_0^T f(t)dW_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T g_n(t)dW_t \quad \text{trong } L^2(\Omega,\mathbb{R}), \tag{1.3}$$

trong đó $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy các quá trình đơn giản sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T |g_n(t) - f(t)|^2 dt\right) = 0.$$

Sau đây là một số tính chất của tích phân ngẫu nhiên Itô.

Định lý 1.1.9. ([2, Định lý 5.3.26]). *Cho $f, g \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó, các khẳng định sau là đúng*

(i) $\int_0^T f(t)dW_t$ *là* $\mathcal{F}_T-$*đo được.*

(ii) $\mathbb{E}\left(\int_0^T f(t)dW_t\right) = 0.$

(iii) $\mathbb{E}\left|\int_0^T f(t)dW_t\right|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right).$

(iv) $\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))dW_t = \alpha \int_0^T f(t)dW_t + \beta \int_0^T g(t)dW_t.$

Định lý 1.1.9(iii) còn được gọi là tính đẳng cự Itô và Định lý 1.1.9(iv) còn được gọi là tính tuyến tính.

Đối với một hàm véc tơ $F(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_d(t))^{\mathrm{T}}$, tích phân ngẫu nhiên Itô của hàm $F(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau

$$\int_0^T F(s)dW_s := \left(\int_0^T f_1(s)dW_s, \int_0^T f_2(s)dW_s, ..., \int_0^T f_d(s)dW_s\right)^{\mathrm{T}}.$$

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại Định lý biểu diễn Itô, định lý này đóng vai trò quan trọng trong chứng minh công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên được đưa ra ở Mục 2.4 Chương 2.

Cho quá trình $W = (W_t)_{t\geq 0}$ là chuyển động Brown một chiều xác định trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Xét $T > 0$ bất kỳ, $F_T := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathfrak{X}_T := L^2(\Omega, F_T, \mathbb{P})$ ký hiệu là không gian tất cả các hàm khả tích bình phương trung bình $f = (f_1, \ldots, f_d)^{\mathrm{T}} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ với

$$\|f\|_{\mathrm{ms}} := \sqrt{\sum_{i=1}^d \mathbb{E}(|f_i|^2)} = \sqrt{\mathbb{E}\|f\|^2},$$

ở đây $\mathbb{R}^d$ được trang bị chuẩn Euclide.

Định lý 1.1.10. (**Định lý biểu diễn Itô**)([26, tr. 184]hoặc [40, Định lý 4.3.3]). *Cho hàm bất kỳ $f \in \mathfrak{X}_T$. Khi đó, tồn tại duy nhất một quá trình ngẫu nhiên*

$\Xi \in \mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^d)$ *sao cho*

$$f = \mathbb{E}(f) + \int_0^T \Xi(t) dW_t. \tag{1.4}$$

1.1.3 Phương trình vi phân ngẫu nhiên

Cho $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. X_0 là biến ngẫu nhiên là $\mathcal{F}_0-$đo được, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ và thỏa mãn $\mathbb{E}|X_0|^2 < \infty$. Giả sử $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ là các hàm đo được theo nghĩa Borel. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên có dạng

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t, \quad t \in [0,T], \tag{1.5}$$

với giá trị ban đầu $X(0) = X_0$, $b \in \mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^d), \sigma \in \mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^d)$. Theo định nghĩa vi phân ngẫu nhiên thì phương trình này tương đương với phương trình tích phân ngẫu nhiên sau

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s, \quad t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại định nghĩa nghiệm của phương trình (1.5).

Định nghĩa 1.1.11. ([37, Định nghĩa 2.2.1]). *Một quá trình ngẫu nhiên $(X(t))_{t\in[0,T]}$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ được gọi là nghiệm của phương trình (1.5) với điều kiện ban đầu $X(0) = X_0$ nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) *$X(t)$ liên tục theo t và $\mathcal{F}_t-$tương thích.*

(ii) *Đẳng thức (1.6) đúng với mọi $t \in [0,T]$.*

Phương trình vi phân ngẫu nhiên có thể không tồn tại nghiệm hoặc tồn tại nghiệm nhưng không duy nhất trên toàn đoạn $[0,T]$. Định lý sau đây chỉ ra các điều kiện đảm bảo sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (1.5).

Định lý 1.1.12. (**Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm**)([1, Định lý 5.5.2]). *Giả sử tồn tại hai hằng số dương $\bar{K}$ và K sao cho*

(N1) *Điều kiện Lipschitz: Với mọi* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *và* $t \in [0, T]$ *ta có*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \leq \bar{K}\|x-y\|, \quad \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \bar{K}\|x-y\|. \tag{1.7}$$

(N2) *Điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính: Với mọi* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ *ta có*

$$\|b(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|), \quad \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|), \tag{1.8}$$

ở đây $\|x\|$ *ký hiệu là chuẩn Euclide của véc tơ* x*. Khi đó, phương trình (1.5) tồn tại duy nhất nghiệm* $X(\cdot) \in \mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^d)$*.*

Tiếp theo, chúng tôi trình bày lại lược đồ số Euler-Maruyama thường áp dụng cho phương trình (1.5). Theo Định lý 1.1.12, phương trình này có duy nhất nghiệm trên đoạn $[0, T]$. Để chứng minh định lý này người ta có thể dùng phép lặp Picard và thu được nghiệm xấp xỉ Picard $X_n(t)$ của phương trình trên. Hơn nữa, ước lượng sai số giữa nghiệm xấp xỉ $X_n(t)$ và nghiệm chính xác $X(t)$ cũng được đưa ra (xem [37, Định lý 3.3, Chương 2]). Từ kết quả này, khi cho trước $\varepsilon > 0$, ta có thể xác định được n sao cho

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_n(t) - X(t)|\right) \leq \varepsilon.$$

Do đó, $X_n(t)$ có thể được dùng làm nghiệm xấp xỉ của nghiệm phương trình (1.5). Bất lợi của nghiệm xấp xỉ Picard là ta phải tính toán $X_0(t), X_1(t), \ldots, X_{n-1}(t)$ thì mới tính được $X_n(t)$, điều này dẫn đến số lượng tính toán các tích phân ngẫu nhiên là rất lớn. Để khắc phục hạn chế này, người ta thường dùng *phương pháp xấp xỉ Caratheodory* và *phương pháp Euler* (còn được gọi là xấp xỉ Euler-Maruyama). Sau đây chúng tôi sẽ trình bày sơ lược phương pháp xấp xỉ Euler-Maruyama cho phương trình vi phân ngẫu nhiên. Ở Chương 3 chúng tôi sẽ thảo luận chi tiết về sự mở rộng của phương pháp số này cho lớp phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên.

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại định nghĩa nghiệm xấp xỉ Euler. Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, ta đặt $X_n(0) := X_0$ và với $t \in \left(\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}\right], k = 1, 2, ..., n,$

$$\begin{aligned} X_n(t) := X_n\Big(\frac{(k-1)T}{n}\Big) + \int_{\frac{(k-1)T}{n}}^t b\Big(s, X_n\Big(\frac{(k-1)T}{n}\Big)\Big)ds \\ + \int_{\frac{(k-1)T}{n}}^t \sigma\Big(s, X_n\Big(\frac{(k-1)T}{n}\Big)\Big)dW_s. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Nếu ta đặt

$$\widehat{X}_n(t) = X_0 I_{\{0\}}(t) + \sum_{k\geq 1} X_n\Big(\frac{(k-1)T}{n}\Big) I_{\left(\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}\right]}(t) \tag{1.10}$$

với $t \in [0, T]$ và $I_{\left(\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}\right]}(t)$ là hàm chỉ tiêu của tập $\left(\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}\right]$ thì từ (1.9) ta có

$$X_n(t) = X_0 + \int_0^t b(s, \hat{X}_n(s))ds + \int_0^t \sigma(s, \hat{X}_n(s))dW_s \tag{1.11}$$

Bổ đề 1.1.13. ([37, Bổ đề 7.1]). *Giả sử điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính* (N2) *trong Định lý 1.1.12 được thỏa mãn. Khi đó, với mọi số nguyên* $n \geq 1$ *ta có*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\|X_n(t)\|^2 \leq C_1, \tag{1.12}$$

ở đây $C_1 = (1 + 3\mathbb{E}\|X_0\|^2)\exp(3KT(T+1))$.

Bổ đề 1.1.14. ([37, Bổ đề 7.2]). *Giả sử điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính* (N2) *trong Định lý 1.1.12 được thỏa mãn. Khi đó, với mọi số nguyên* $n \geq 1$ *và* $0 \leq s \leq t \leq T$ *thỏa mãn* $t - s \leq 1$ *ta có*

$$\mathbb{E}\|X_n(t) - X_n(s)\|^2 \leq C_2(t-s), \tag{1.13}$$

trong đó $C_2 = 4K(1 + C_1)$ *với* C_1 *được xác định trong Bổ đề 1.1.13.*

Kết quả sau đây cho ta đánh giá được tốc độ hội tụ của lược đồ Euler-Maruyama cho phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Định lý 1.1.15. ([37, Định lý 7.3]). *Giả sử điều kiện Lipschitz* (N1) *và điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính* (N2) *trong Định lý 1.1.12 được thỏa mãn. Ký* *hiệu $X(t)$, $X_n(t)(n \in \mathbb{N}^*)$ lần lượt là nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ Euler của phương trình (1.5). Khi đó, ta có*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X_n(t)-X(t)\|^2\right) \le \frac{C_3}{n}, \tag{1.14}$$

ở đây $C_3 = 4C_2LT(T+4)\exp(4LT(T+4))$ và C_2 được xác định trong Bổ đề 1.1.14.

Trong thực hành, khi cho sai số $\varepsilon > 0$ ta có thể chọn được số nguyên $n > \frac{C_3}{\varepsilon}$ và tính $X_n(t)$ lần lượt trên các khoảng $[0, \frac{T}{n}], (\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}], \ldots$. Định lý 1.1.15 đã chỉ ra rằng nghiệm xấp xỉ $X_n(t)$ đủ gần nghiệm chính xác $X(t)$ theo nghĩa

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X_n(t)-X(t)\|^2\right) < \varepsilon.$$

1.2 Một số kiến thức về giải tích phân thứ

1.2.1 Tích phân và đạo hàm phân thứ

Mục này được dành để giới thiệu sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Các kiến thức này có thể tìm thấy trong các tài liệu [4, 8, 19].

Cho $\alpha \in (0,1], [0,T] \subset \mathbb{R}$ và $x \in L^1([0,T],\mathbb{R})$, chúng ta định nghĩa *tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp* α của hàm x là

$$I^{\alpha}_{0+}x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}x(\tau)\,d\tau \quad \text{với } t \in (0,T],$$

ở đây *hàm Gamma* $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}^*_+$ có biểu diễn

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\exp(-t)\,dt$$

(xem [19, Định nghĩa 2.1]). Dễ thấy trong định nghĩa ở trên, với $\alpha \in (0,1)$, nếu x khả tích trên đoạn $[0,T]$, tức là $\int_0^T |x(t)|\,dt < \infty$, thì tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α của x tồn tại hầu khắp nơi trên $[0,T]$. Hơn nữa, chính bản thân tích phân này cũng là một hàm khả tích. Nhận xét này là nội dung của bổ đề sau đây.

Định lý 1.2.1. *([19, Định lý 2.1]). Giả sử $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[0,T]$. Khi đó, tích phân $I_{0+}^{\alpha}x(t)$ tồn tại với hầu hết $t \in [0,T]$. Hơn nữa, $I_{0+}^{\alpha}x$ cũng là một hàm thuộc lớp $L^1([0,T],\mathbb{R})$.*

Cùng với khái niệm tích phân phân thứ, đạo hàm phân thứ là một trong hai khía cạnh quan trọng của phép tính vi phân, tích phân phân thứ. Có nhiều khái niệm đạo hàm phân thứ đã được xây dựng. Tuy nhiên, đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo được dùng rộng rãi hơn cả. Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu đạo hàm phân thứ Caputo. Vì vậy, chúng tôi nhắc lại định nghĩa của đạo hàm này.

Cho trước một số thực $\alpha \in (0,1]$ và một đoạn $[0,T] \subset \mathbb{R}$. Người ta định nghĩa *đạo hàm phân thứ Caputo cấp α* của hàm $x(t)$ là

$$^{C}D_{0+}^{\alpha}x(t) := I_{0+}^{1-\alpha}\frac{dx(t)}{dt}, \qquad t \in (0,T],$$

ở đây $\frac{dx(t)}{dt}$ là đạo hàm thông thường (xem [19, Chương 3, tr. 49]). Đối với một hàm véc tơ $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_d(t))^{\mathrm{T}}$, đạo hàm phân thứ Caputo của $x(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau

$$^{C}D_{0+}^{\alpha}x(t) := (^{C}D_{0+}^{\alpha}x_1(t),\ldots,^{C}D_{0+}^{\alpha}x_d(t))^{\mathrm{T}}.$$

Chú ý 1.2.2. (i) *Nếu $\alpha = 1$ thì đạo hàm phân thứ Caputo cấp α chính là đạo hàm thông thường.*

(ii) *Nếu x là một hàm liên tục tuyệt đối trên $[0,T]$, thì đạo hàm phân thứ Caputo của hàm này tồn tại hầu khắp nơi trên $[0,T]$ (xem [19, Định lý 3.1]).*

Giống như phép tính vi phân và tích phân cổ điển, đạo hàm phân thứ Caputo là nghịch đảo trái của toán tử tích phân phân thứ.

Định lý 1.2.3. ([19, Định lý 3.7]). *Cho $\alpha \in (0,1]$. Khi đó, với mọi $x \in C([0,T],\mathbb{R}^d)$, chúng ta có*

$$^{C}D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}x(t) = x(t),$$

với mọi $t \in [0,T]$.

1.2.2 Phương trình vi phân phân thứ Caputo

Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo bậc $\alpha \in (0, 1]$

$$ {}^C D^\alpha_{0+} x(t) = f(t, x(t)), \quad \text{với mọi } t \in (0, T], \tag{1.15} $$

với điều kiện ban đầu $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, ở đây $T > 0, f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là hàm đo được.

Định nghĩa 1.2.4. *Cho $x_0 \in \mathbb{R}^d$, hàm $\varphi(\cdot, x_0) \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$ được gọi là nghiệm của phương trình* (1.15) *với $x(0) = x_0$ trên đoạn $[0, T]$ nếu $\varphi(0, x_0) = x_0$ và*

$$ {}^C D^\alpha_{0+} \varphi(t, x_0) = f(t, \varphi(t, x_0)), \quad \textit{với mọi } t \in (0, T]. $$

Tương tự như trong lý thuyết phương trình vi phân thường, bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân phân thứ nói trên có thể chuyển thành một phương trình tích phân tương đương.

Định lý 1.2.5. ([19, Bổ đề 6.2]). *Cho $x_0 \in \mathbb{R}^d$, hàm $\varphi(\cdot, x_0) \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$ là nghiệm của phương trình* (1.15) *với giá trị ban đầu $x(0) = x_0$ khi và chỉ khi nó thỏa mãn phương trình tích phân*

$$ \varphi(t, x_0) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, \varphi(\tau, x_0)) \, d\tau, \quad \textit{với mọi } t \in [0, T]. \tag{1.16} $$

Chú ý 1.2.6. *Cho t là một thời điểm nào đó ở tương lai và t_0 là thời điểm hiện tại ($t > t_0$). Từ công thức* (1.16)*, chúng ta thấy rằng để biết được $x(t)$ không chỉ cần biết giá trị của nghiệm trong khoảng $[t_0, t)$ (từ hiện tại tới tương lai) mà còn cần phải biết thêm giá trị của nó tại hầu hết các thời điểm trên đoạn $[0, t_0)$ (toàn bộ quá khứ). Đây chính là điểm khác biệt cơ bản giữa phương trình vi phân thường và phương trình vi phân phân thứ.*

Tiếp theo, chúng ta xét phương trình tuyến tính hệ số hằng thuần nhất bậc $\alpha \in (0, 1]$ trên đoạn $[0, T]$

$$ {}^C D^\alpha_{0+} x(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{1.17} $$

ở đây $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Theo [19, Định lý 4.3], với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^d$ bài toán trên có nghiệm duy nhất $\varphi(\cdot, x_0)$ được cho bởi công thức sau

$$\varphi(t, x_0) = E_\alpha(t^\alpha A)x_0,$$

trong đó $E_\alpha : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ là hàm Mittag-Leffler một tham số. Do đó, các hàm Mittag-Leffler xuất hiện một cách tự nhiên trong lý thuyết phương trình vi phân phân thứ. Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại định nghĩa của hàm Mittag-Leffler.

Định nghĩa 1.2.7. ([19, Định nghĩa 4.1 và Định nghĩa 4.2]). *Cho $\alpha > 0$ và $\beta \in \mathbb{R}$ bất kỳ.*

- Hàm Mittag-Leffler một tham số nhận giá trị ma trận $E_\alpha : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ có biểu diễn
$$E_\alpha(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, M \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$
- Hàm Mittag-Leffler hai tham số $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi
$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{R}.$$
- Hàm Mittag-Leffler hai tham số nhận giá trị ma trận $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ được xác định bởi
$$E_{\alpha,\beta}(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, M \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

Để nghiên cứu các tính chất nghiệm của phương trình vi phân phân thứ, đặc biệt là các phương trình hệ số hằng, một trong những công cụ được sử dụng phổ biến là công thức biến thiên hằng số. Công thức này là cầu nối giữa nghiệm của một phương trình không thuần nhất với một phương trình tuyến tính hệ số hằng thuần nhất liên kết với nó. Cụ thể, xét phương trình vi phân phân thứ Caputo bậc $\alpha \in (0, 1]$

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}x(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad t \in [0, T], \tag{1.18}$$

ở đây $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là hàm liên tục Lipschitz.

Định lý 1.2.8. (**Công thức biến thiên hằng số**) ([4, Định lý 1.4.1]). *Giả sử f là hàm liên tục Lipschitz toàn cục trên $\mathbb{R}^d$. Khi đó, với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^d$, phương trình (1.18) với giá trị ban đầu $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ có duy nhất nghiệm toàn cục $\varphi(\cdot, x_0)$. Hơn nữa, nghiệm này thỏa mãn công thức biến thiên hằng số*

$$\varphi(t, x_0) = E_\alpha(t^\alpha A)x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) f(\varphi(\tau, x_0))\, d\tau, \tag{1.19}$$

với mọi $t \in [0, T]$.

Chương 2

Một số tính chất của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Bài toán quan trọng trong lý thuyết định tính của phương trình vi phân là nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm cũng như các tính chất của nghiệm. Đối với phương trình vi phân thường, người ta đã thu được nhiều kết quả về vấn đề này (xem [43, 55]). Còn đối với phương trình vi phân phân thứ Caputo, người ta cũng đạt được nhiều kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm địa phương (xem [19, Định lý 6.1 và Định lý 6.5]). Kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục của phương trình vi phân phân thứ Caputo được đưa ra trong [8, Định lý 2]. Nhiều kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm phương trình vi phân phân thứ tất định được đưa ra khá đầy đủ trong [4, 17].

Đối với phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên, đến nay vẫn chưa có nhiều công trình viết về vấn đề này (xem [48, 56, 57]). Vì vậy, chương này được dành để nghiên cứu một số vấn đề về phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Nội dung của chương gồm năm phần, trong Phần 2.1 chúng tôi trình bày định lý tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên (xem Định lý 2.1.2). Sự phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên được trình bày trong Phần 2.2 (xem Định lý 2.2.1). Trong quá trình đi tìm phương pháp nghiên cứu tính ổn định của phương trình trên, chúng tôi đã thiết lập và chứng minh được định lý tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên (xem Định lý 2.3.2). Từ kết quả này, chúng tôi chứng minh được công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên (xem Định lý 2.4.1). Một cận dưới cho sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình trên được đưa ra trong phần cuối của chương (xem Định lý 2.5.1). Nhờ có kết quả này mà chúng tôi chứng minh được số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên song tuyến tính bị chặn là không âm (xem Hệ quả 2.5.2).

Nội dung của chương này được viết dựa trên hai bài báo đã được xuất bản sau đây:

[CT1] D. T. Son, P. T. Huong, Kloeden P. E., H. T. Tuan (2018), Asymptotic separation between solutions of Caputo fractional stochastic differential equations, *Stoch. Anal. Appl.*, **36**(4), pp. 654-664, (SCIE).

[CT2] P. T. Anh, D. T. Son, P. T. Huong (2019), A variation of constant formula for Caputo fractional stochastic differential equations, *Statist. Probab. Lett.*, **145**, pp. 351–358, (SCIE).

2.1 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này, chúng tôi xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.1}$$

với $T > 0$ bất kỳ, $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được và $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Với mỗi $t \in [0, \infty)$, đặt $\mathfrak{X}_t := L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ ký hiệu là không gian tất cả các hàm khả tích bình phương trung bình $f = (f_1, \ldots, f_d)^{\mathrm{T}} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ với

$$\|f\|_{\mathrm{ms}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}(|f_i|^2)} = \sqrt{\mathbb{E}\|f\|^2},$$

ở đây $\mathbb{R}^d$ được trang bị chuẩn Euclide. Một quá trình ngẫu nhiên đo được $X : [0,\infty) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được gọi là F-tương thích nếu $X(t) \in \mathfrak{X}_t$ với mọi $t \in [0,\infty)$.

Định nghĩa 2.1.1. *Với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, một quá trình ngẫu nhiên đo được, F-tương thích X được gọi là nghiệm cổ điển của* (2.1) *với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta$ nếu $X(0) = \eta$ và với mọi $t \in (0, T]$*

$$X(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b(\tau, X(\tau))\, d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sigma(\tau, X(\tau))\, dW_\tau \right).$$

Sau đây chúng tôi phát biểu kết quả chính của mục này về sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Định lý 2.1.2. (**Sự tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Giả sử các hệ số b, σ của phương trình* (2.1) *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(H1) *Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$ ta có*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \le L\|x-y\|, \quad \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le L\|x-y\|.$$

(H2) *$\sigma(\cdot, 0)$ và $b(\cdot, 0)$ thỏa mãn*

$$\|\sigma(\cdot,0)\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{\tau\in[0,T]} \|\sigma(\tau,0)\| < \infty, \int_0^T \|b(\tau,0)\|^2\, d\tau < \infty.$$

Khi đó, phương trình (2.1) *với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$ có nghiệm toàn cục duy nhất $\varphi(\cdot, \eta)$ trên đoạn $[0, T]$.*

Để chứng minh định lý này, chúng tôi xây dựng một chuẩn có trọng số phù hợp, sau đó áp dụng Định lý điểm bất động của Banach. Cụ thể, chứng minh gồm các bước sau:

- *Bước 1*: Xây dựng không gian Banach $(H^2([0,T]), \|\cdot\|_{H^2})$.
- *Bước 2*: Đưa ra toán tử $\mathcal{T}_\eta$ xác định trên không gian này.

- *Bước 3*: Chứng minh toán tử $\mathcal{T}_\eta$ là ánh xạ co đối với chuẩn có trọng số phù hợp, phương pháp này cũng đã được dùng để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên (xem [23, Nhận xét 2.1]). Ở đây, hàm trọng số là hàm Mittag-Leffler $E_{2\alpha-1}(\cdot)$ được định nghĩa như sau
$$E_{2\alpha-1}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma((2\alpha-1)k+1)} \quad \text{với mọi } t \in \mathbb{R}.$$

Trước khi trình bày chi tiết chứng minh Định lý 2.1.2, chúng tôi cần một vài kết quả chuẩn bị. Ký hiệu không gian $H^2([0,T])$ là tất cả các quá trình

$$X : [0,T] \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

đo được, F_T-tương thích với $F_T := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ và thỏa mãn

$$\|X\|_{H^2} := \operatorname*{esssup}_{0\le t\le T} \|X(t)\|_{\mathrm{ms}} < \infty.$$

Khi đó, ta có $(H^2([0,T]), \|\cdot\|_{H^2})$ là không gian Banach. Với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, chúng tôi định nghĩa toán tử $\mathcal{T}_\eta : H^2([0,T]) \to H^2([0,T])$ bởi $\mathcal{T}_\eta\xi(0) := \eta$ và với mọi $t \in (0,T]$

$$\mathcal{T}_\eta\xi(t) := \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b(\tau,\xi(\tau))\, d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sigma(\tau,\xi(\tau))\, dW_\tau\right).$$

Bổ đề sau đây chỉ ra rằng toán tử này được xác định tốt.

Bổ đề 2.1.3. *Giả sử các hệ số b, σ của phương trình* (2.1) *thỏa mãn các điều kiện* (H1) *và* (H2). *Khi đó, với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, toán tử $\mathcal{T}_\eta$ được xác định tốt.*

Chứng minh. Lấy $\xi \in H^2([0,T])$ bất kỳ. Từ định nghĩa của toán tử $\mathcal{T}_\eta\xi$ và bất đẳng thức $\|x+y+z\|^2 \le 3(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2)$ với mọi $x,y,z \in \mathbb{R}^d$, ta có ước lượng sau với mọi $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{T}_\eta\xi(t)\right\|_{\mathrm{ms}}^2 \le\ & 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 + \tfrac{3}{\Gamma(\alpha)^2}\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b(\tau,\xi(\tau))d\tau\right\|^2\right) \\ & + \tfrac{3}{\Gamma(\alpha)^2}\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sigma(\tau,\xi(\tau))dW_\tau\right\|^2\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]), ta được

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right) d\tau\right\|^2\right)\\
\leq\;& \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} d\tau\, \mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|b\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right)\right\|^2 d\tau\right)\\
=\;& \frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|b\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right)\right\|^2 d\tau\right).
\end{aligned}$$

Nhờ điều kiện (H1), ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|b(\tau,\xi(\tau))\|^2 &\leq 2\left(\|b(\tau,\xi(\tau)) - b(\tau,0)\|^2 + \|b(\tau,0)\|^2\right)\\
&\leq 2L^2\|\xi(\tau)\|^2 + 2\|b(\tau,0)\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|b\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right)\right\|^2 d\tau\right) &\leq 2L^2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|\xi\left(\tau\right)\right\|^2 d\tau\right) + 2\int_0^t \|b(\tau,0)\|^2\, d\tau\\
&\leq 2L^2T \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(\|\xi\left(t\right)\|^2) + 2\int_0^T \|b(\tau,0)\|^2\, d\tau.
\end{aligned}$$

Kết hợp với ước lượng ở trên ta có

$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} b\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right) d\tau\right\|^2\right) \leq \frac{2L^2T^{2\alpha}}{2\alpha-1}\|\xi\|_{H^2}^2 + \frac{2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\int_0^T \|b(\tau,0)\|^2 d\tau. \tag{2.3}$$

Bây giờ, áp dụng tính chất đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sigma\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right) dW_\tau\right\|^2\right)\\
=\;& \sum_{1\leq i\leq d} \mathbb{E}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sigma_i(\tau,\xi(\tau))dW_\tau\right)^2\\
=\;& \sum_{1\leq i\leq d} \mathbb{E}\left(\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}|\sigma_i(\tau,\xi(\tau))|^2 d\tau\right)\\
=\;& \mathbb{E}\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\left\|\sigma\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right)\right\|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Do điều kiện (H1) nên ta có

$$\|\sigma(\tau,\xi(\tau))\|^2 \leq 2L^2\|\xi(\tau)\|^2 + 2\|\sigma(\tau,0)\|^2 \leq 2L^2\|\xi(\tau)\|^2 + 2\|\sigma(\cdot,0)\|_\infty^2.$$

Vì vậy, với mọi $t \in [0,T]$ ta thu được ước lượng sau

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sigma\left(\tau,\xi\left(\tau\right)\right)dW_\tau\right\|^2\right)\\
\leq\;& 2L^2\mathbb{E}\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\xi\left(\tau\right)\|^2\,d\tau +\, 2\|\sigma(\cdot,0)\|_\infty^2\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\,d\tau\\
\leq\;& 2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\|\xi\|_{H_2}^2+\frac{2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\,\|\sigma\left(\cdot,0\right)\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

Điều này cùng với (2.2), (2.3) và (H2) kéo theo $\|\mathcal{T}_\eta\xi\|_{H^2}<\infty$. Do đó, toán tử $\mathcal{T}_\eta$ được xác định tốt. □

Kết quả sau đây là bổ đề kỹ thuật dùng để ước lượng cho toán tử $\mathcal{T}_\eta$ và để phục vụ cho chứng minh các kết quả trong phần tiếp theo.

Bổ đề 2.1.4. *Với $\alpha>\frac{1}{2}$ bất kỳ và $\gamma>0$ ta có bất đẳng thức sau đây là đúng*

$$\frac{\gamma}{\Gamma\left(2\alpha-1\right)}\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}E_{2\alpha-1}\left(\gamma\tau^{2\alpha-1}\right)d\tau\leq E_{2\alpha-1}\left(\gamma t^{2\alpha-1}\right).$$

Chứng minh. Lấy $\gamma>0$ bất kỳ. Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo tuyến tính có dạng sau

$$^{C}D_{0+}^{2\alpha-1}x(t)=\gamma x(t). \tag{2.4}$$

Như chúng ta đã biết hàm Mittag-Leffler $E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})$ là nghiệm của phương trình (2.4) (xem [19, tr. 135] và Mục 1.2.2 ở Chương 1). Do đó, đẳng thức sau đây là đúng

$$E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})=1+\frac{\gamma}{\Gamma(2\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}E_{2\alpha-1}(\gamma\tau^{2\alpha-1})\,d\tau.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày chi tiết chứng minh Định lý 2.1.2.

Chứng minh Định lý 2.1.2. Chọn và cố định hằng số dương γ sao cho

$$\gamma>\frac{3L^2(T+1)\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2}. \tag{2.5}$$

Trên không gian $H^2([0,T])$, chúng tôi định nghĩa chuẩn có trọng số $\|\cdot\|_\gamma$ như sau

$$\|X\|_\gamma := \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \sqrt{\frac{\mathbb{E}(\|X(t)\|^2)}{E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})}} \qquad \text{với mọi } \; X \in H^2([0,T]). \tag{2.6}$$

Vì hàm Mittag-Leffler $E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})$ là hàm liên tục trên đoạn $[0,T]$ và nhận giá trị dương trên đoạn $[0,T]$ khi $\alpha \in (\frac{1}{2},1)$ nên tồn tại $m = \min_{t\in[0,T]} E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1}) > 0$ và $M = \max_{t\in[0,T]} E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1}) > 0$. Do đó, hai chuẩn $\|\cdot\|_{H^2}$ và $\|\cdot\|_\gamma$ là tương đương. Do đó, $(H^2([0,T]), \|\cdot\|_\gamma)$ cũng là không gian Banach. Ta chọn và cố định $\eta \in \mathfrak{X}_0$. Nhờ Bổ đề 2.1.3, toán tử $\mathcal{T}_\eta$ được xác định tốt. Bây giờ chúng tôi sẽ chứng minh ánh xạ $\mathcal{T}_\eta$ là co đối với chuẩn $\|\cdot\|_\gamma$. Để làm được điều này, ta lấy $\xi, \widehat{\xi} \in H^2([0,T])$ bất kỳ. Từ định nghĩa toán tử $\mathcal{T}_\eta$ và bất đẳng thức $\|x+y\|^2 \le 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d$, chúng ta có được bất đẳng thức sau đúng với mọi $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\|\mathcal{T}_\eta\xi(t) - \mathcal{T}_\eta\widehat{\xi}(t)\right\|^2\right)\\
\le\;& \frac{2}{\Gamma(\alpha)^2}\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\big(b(\tau,\xi(t)) - b(\tau,\widehat{\xi}(t))\big)d\tau\right\|^2\right)\\
&+\frac{2}{\Gamma(\alpha)^2}\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\big(\sigma(\tau,\xi(t)) - \sigma(\tau,\widehat{\xi}(t))\big)dW_\tau\right\|^2\right).
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]) và (H1), ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\big(b(\tau,\xi(\tau)) - b(\tau,\widehat{\xi}(\tau))\big)d\tau\right\|^2\right)\\
\le\;& L^2 t\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\mathbb{E}(\|\xi(\tau) - \widehat{\xi}(\tau)\|^2)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9) và (H1) ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\big(\sigma(\tau,\xi(\tau)) - \sigma(\tau,\widehat{\xi}(\tau))\big)dW_\tau\right\|^2\right)\\
=\;& \mathbb{E}\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\sigma(\tau,\xi(\tau)) - \sigma(\tau,\widehat{\xi}(\tau))\|^2\, d\tau\\
\le\;& L^2\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\mathbb{E}(\|\xi(\tau) - \widehat{\xi}(\tau)\|^2)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Do đó, với mọi $t \in [0, T]$ ta có

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\left\|\mathcal{T}_\eta \xi(t) - \mathcal{T}_\eta \widehat{\xi}(t)\right\|^2\right) \\ \leq \;& \frac{2L^2(t+1)}{\Gamma(\alpha)^2} \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} \mathbb{E}(\|\xi(\tau) - \widehat{\xi}(\tau)\|^2)\, d\tau. \end{aligned}$$

Điều này cùng với định nghĩa của $\|\cdot\|_\gamma$ như trong (2.12) kéo theo rằng

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbb{E}\left(\left\|\mathcal{T}_\eta \xi(t) - \mathcal{T}_\eta \widehat{\xi}(t)\right\|^2\right)}{E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})} \\ \leq \;& \frac{2L^2(t+1)}{\Gamma(\alpha)^2} \frac{\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} E_{2\alpha-1}(\gamma \tau^{2\alpha-1})\, d\tau}{E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})} \|\xi - \widehat{\xi}\|_\gamma^2. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.1.4, với mọi $t \in [0, T]$ ta có

$$\frac{\mathbb{E}\left(\left\|\mathcal{T}_\eta \xi(t) - \mathcal{T}_\eta \widehat{\xi}(t)\right\|^2\right)}{E_{2\alpha-1}(\gamma t^{2\alpha-1})} \leq \frac{2\Gamma(2\alpha-1)L^2(T+1)}{\Gamma(\alpha)^2 \gamma} \|\xi - \widehat{\xi}\|_\gamma^2.$$

Do đó,

$$\|\mathcal{T}_\eta \xi - \mathcal{T}_\eta \widehat{\xi}\|_\gamma \leq \kappa \|\xi - \widehat{\xi}\|_\gamma, \qquad \text{ở đây } \kappa := \sqrt{\frac{2\Gamma(2\alpha-1)L^2(T+1)}{\Gamma(\alpha)^2 \gamma}}.$$

Nhờ (2.5) nên ta có $\kappa < 1$. Vì vậy, $\mathcal{T}_\eta$ là một ánh xạ co trên $(H^2([0,T]), \|\cdot\|_\gamma)$. Áp dụng Định lý điểm bất động của Banach (xem [3, Định lý 13] hoặc [55, tr. 59]) tồn tại một điểm bất động duy nhất của ánh xạ $\mathcal{T}_\eta$ trong $H^2([0,T])$. Điểm bất động này cũng là nghiệm duy nhất của phương trình (2.1) với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta$. Vậy định lý được chứng minh xong. □

Chú ý 2.1.5. *Các điều kiện* (H1), (H2) *trong Định lý 2.1.2 là sự mở rộng tự nhiên các điều kiện trong định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên (xem Định lý 1.1.12 ở Chương 1).*

Để kết thúc mục này chúng tôi đưa ra một vài bình luận về một số bài báo viết về vấn đề này.

Chú ý 2.1.6. (i) *Theo sự hiểu biết của chúng tôi, có lẽ công trình đầu tiên liên quan đến lĩnh vực nghiên cứu này là [57], ở đây Z. Wang xét phương trình*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha_1} b(t,\tau,X(\tau))\, d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha_2} \sigma(t,\tau,X(\tau))\, dW_\tau, \quad (2.7)$$

trong đó, $X(0) \in \mathbb{R}^d, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m, b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *là các hàm đo được theo nghĩa Borel và* $\alpha_1 \in (0, \frac{1}{2}), \alpha_2 \in (0, \frac{1}{4}]$. *Với các điều kiện thích hợp cho hệ số* b, σ *(yếu hơn điều kiện Lipschitz toàn cục), tác giả bài báo đã chứng minh được rằng phương trình* (2.7) *tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục. Ngoài ra, tác giả còn chứng minh được tính chính quy của nghiệm phương trình* (2.7) *với một số điều kiện thích hợp (xem [57, Định lý 4.1, tr. 1070]). Tuy nhiên, Z. Wang chưa đề cập đến trường hợp* $\alpha_2 \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ *tương ứng với bậc phân thứ* $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ *khi chứng minh định lý trên.*

(ii) *Tiếp theo hướng nghiên cứu này, năm 2016 Y. Wang và các cộng sự cũng chứng minh thành công định lý tồn tại và duy nhất nghiệm địa phương cho phương trình* (2.1) *nhưng lại gặp vấn đề trong chứng minh tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục. Cụ thể, với* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, *các tác giả xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên trên không gian Banach* X *có dạng*

$${}^C D^\alpha_{0+} x(t) = b(t, x(t)) + \sigma(t, x(t)) \frac{dW_t}{dt}, \quad (2.8)$$

ở đây $t \in [0, T]$, $b, \sigma : [0, T] \times L^2(\Omega; X) \to L^2(\Omega; X)$ *là các hàm đo được thỏa mãn các điều kiện*

(a) *Tồn tại một hằng số* $L > 0$ *sao cho với mọi* $t \in [0, T]$ *và* $x, y \in L^2(\Omega; X)$

$$\mathbb{E}(\|b(t,x) - b(t,y)\|^2) + \mathbb{E}(\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2) \leq L\mathbb{E}(\|x-y\|^2).$$

(b) *Các hàm* b, σ *bị chặn, tức là với* $x_0 \in L^2(\Omega; X)$ *và* $a > 0$, *tồn tại hằng số* $M > 0$ *sao cho*

$$\mathbb{E}(\|b(t,x)\|^2) \leq M^2, \quad \mathbb{E}(\|\sigma(t,x)\|^2) \leq M^2$$

với mọi $(t, x) \in R_0 := \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, \mathbb{E}(\|x - x_0\|^2) \leq a^2\}$.

Bằng phương pháp chứng minh tương tự trong hai bài báo [13, 31], các tác giả của [56] đã chứng minh thành công sự tồn tại và duy nhất nghiệm địa phương trên một khoảng nhỏ $[0, T_a]$, ở đây T_a là tham số phụ thuộc vào a, được xác định trong [56, Định lý 3.3, tr. 209] bởi biểu thức

$$T_a = \min\left(T, \left(\frac{a^2\Gamma^2(\alpha+1)}{4M^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}, \left(\frac{a^2\Gamma^2(\alpha)(2\alpha-1)}{4M^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}}\right), \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Để giải quyết bài toán tồn tại nghiệm toàn cục, các tác giả đã dùng phương pháp xấp xỉ liên tiếp và kéo dài nghiệm từ một khoảng nhỏ $[0, T_a]$ ra toàn khoảng $[0, \infty)$ (xem [56, Định lý 3.4, tr. 209]). Tuy nhiên, phương pháp này dường như không thể áp dụng cho các phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên. Chính xác hơn, do sự phụ thuộc quá khứ của nghiệm phương trình vi phân phân thứ nên nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) & = b(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))\frac{dW_t}{dt}, \quad t \in [T^*, T^* + \delta), \\ x(T^*) & = x^* \in L^2(\Omega; X), \end{cases}$$

và nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) & = b(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))\frac{dW_t}{dt}, \quad t \in [0, T^* + \delta), \\ x(0) & = x_0 \in L^2(\Omega; X) \end{cases}$$

là không trùng nhau bằng cách dịch chuyển thời gian.

2.2 Sự phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này chúng tôi sẽ nghiên cứu tính phụ thuộc liên tục của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên vào điều kiện ban đầu. Cụ thể, chúng tôi xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.9}$$

với $T > 0$ bất kỳ, $b, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là đo được và $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Định lý 2.2.1. (**Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu**). *Giả sử các hệ số b, σ của phương trình* (2.9) *thỏa mãn các điều kiện*

(H1) *Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T]$ ta có*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \quad \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq L\|x-y\|.$$

(H2) *$\sigma(\cdot,0)$ và $b(\cdot,0)$ thỏa mãn*

$$\|\sigma(\cdot,0)\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{\tau\in[0,T]} \|\sigma(\tau,0)\| < \infty, \int_0^T \|b(\tau,0)\|^2 \, d\tau < \infty.$$

Khi đó, trên đoạn $[0,T]$ nghiệm $\varphi(\cdot,\eta)$ của phương trình (2.9) *phụ thuộc liên tục vào η, tức là*

$$\lim_{\zeta\to\eta} \|\varphi(t,\zeta) - \varphi(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}} = 0.$$

Chứng minh. Chọn và cố định $T > 0$, cho $\eta, \zeta \in \mathfrak{X}_0$. Vì $\varphi(\cdot,\zeta), \varphi(\cdot,\eta)$ là nghiệm của phương trình (2.9) nên ta có

$$\begin{aligned} \varphi(t,\zeta) - \varphi(t,\eta) &= \zeta - \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (b(\tau,\varphi(\tau,\zeta)) - b(\tau,\varphi(\tau,\eta))) \, d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\sigma(\tau,\varphi(\tau,\zeta)) - \sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))) \, dW_\tau. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\|x+y+z\|^2 \leq 3(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2)$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}^d$, chúng ta suy ra bất đẳng thức sau đúng với mọi $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\|\varphi(t,\zeta) - \varphi(t,\eta)\|^2 \\ = \; & 3\mathbb{E}\|\zeta-\eta\|^2 + \frac{3}{\Gamma(\alpha)^2} \mathbb{E}\left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (b(\tau,\varphi(\tau,\zeta)) - b(\tau,\varphi(\tau,\eta))) \, d\tau \right\|^2 \\ + \; & \frac{3}{\Gamma(\alpha)^2} \mathbb{E}\left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\sigma(\tau,\varphi(\tau,\zeta)) - \sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))) \, dW_\tau \right\|^2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]) và (H1), ta đạt được

$$\mathbb{E}\left\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (b(\tau,\varphi(\tau,\zeta)) - b(\tau,\varphi(\tau,\eta))) \, d\tau \right\|^2$$

$$\leq \; L^2 t \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} \mathbb{E}\|\varphi(\tau,\zeta) - \varphi(\tau,\eta)\|^2 \, d\tau.$$

Mặt khác, áp dụng tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9) và (H1) ta suy ra

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big\| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\sigma(\tau,\varphi(\tau,\zeta)) - \sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))) \, dW_\tau \Big\|^2 \\ \leq \; & L^2 \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} \mathbb{E}\|\varphi(\tau,\zeta) - \varphi(\tau,\eta)\|^2 \, d\tau. \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $t \in [0, T]$ ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\varphi(t,\zeta) - \varphi(t,\eta)\|^2 \; \leq \; & 3\mathbb{E}\|\zeta - \eta\|^2 \\ & + \frac{3L^2(t+1)}{\Gamma(\alpha)^2} \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} \mathbb{E}\|\varphi(\tau,\zeta) - \varphi(\tau,\eta)\|^2 \, d\tau. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho phương trình vi phân phân thứ (xem [24, Bổ đề 7.1.1] hoặc [58, Hệ quả 2]) ta suy ra

$$\|\varphi(t,\zeta) - \varphi(t,\eta)\|_{\text{ms}}^2 \leq 3\|\eta - \zeta\|_{\text{ms}}^2 E_{2\alpha-1}\left(\frac{(3T+3)L^2\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2} t^{2\alpha-1} \right),$$

ở đây $E_{2\alpha-1}(\cdot)$ là hàm Mittag-Leffler với tham số $2\alpha - 1$. Do đó, ta chứng minh được

$$\lim_{\zeta \to \eta} \|\varphi(t,\zeta) - \varphi(t,\eta)\|_{\text{ms}} = 0.$$

□

Chú ý 2.2.2. *Bài toán về tính đặt chỉnh của phương trình vi phân, phương trình vi phân ngẫu nhiên là một bài toán quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng. Nó đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm và nghiên cứu. Trong luận án này chúng tôi mới nghiên cứu hai vấn đề: một là sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình, hai là tính phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu. Chúng tôi đang tiếp tục nghiên cứu tính liên tục của nghiệm cổ điển theo thời gian và bậc phân thứ α của phương trình để hoàn thiện bài toán đặt chỉnh.*

2.3 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng sau

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = AX(t) + b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.10}$$

ở đây $T > 0$ bất kỳ, $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ và $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là các hàm đo được thỏa mãn các điều kiện

(H1) Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$ ta có

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

(H2) $\sigma(\cdot, 0)$ và $b(\cdot, 0)$ thỏa mãn

$$\|\sigma(\cdot, 0)\|_{\infty} := \operatorname*{esssup}_{\tau\in[0,T]} \|\sigma(\tau, 0)\| < \infty, \int_0^T \|b(\tau, 0)\|^2\, d\tau < \infty.$$

Bây giờ chúng tôi nhắc lại khái niệm nghiệm nhẹ của phương trình (2.10).

Định nghĩa 2.3.1. **(Nghiệm nhẹ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên)** ([48]). *Một quá trình ngẫu nhiên đo được, F-tương thích Y được gọi là nghiệm nhẹ của phương trình* (2.10) *với điều kiện ban đầu $Y(0) = \eta$ nếu $Y(0) = \eta$ và đẳng thức sau đúng với $t \in (0, T]$*

$$\begin{aligned} Y(t) \;&=\; E_{\alpha}(t^{\alpha}A)\eta + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^{\alpha}A) b(\tau, Y(\tau))\, d\tau \\ &\quad + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^{\alpha}A) \sigma(\tau, Y(\tau))\, dW_{\tau}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ của phương trình (2.10). Để đạt được kết quả này, chúng tôi yêu cầu rằng các hệ số b, σ của phương trình thỏa mãn các điều kiện (H1), (H2) ở trên. Kỹ thuật chính để chứng minh kết quả đó là xây dựng một chuẩn có trọng số phù hợp (so sánh với Định lý 2.1.2).

Định lý 2.3.2. (**Sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ toàn cục**). *Giả thiết các hệ số b, σ của phương trình* (2.10) *thỏa mãn các điều kiện* (H1) *và* (H2). *Khi đó, với $\eta \in \mathfrak{X}_0$ bất kỳ, tồn tại duy nhất nghiệm nhẹ Y của phương trình* (2.10) *thỏa mãn $Y(0) = \eta$ trên toàn đoạn $[0, T]$, ký hiệu là $\psi(\cdot, \eta)$.*

Chứng minh. Ký hiệu không gian $H^2([0, T], \mathbb{R}^d)$ là tất cả các quá trình ξ đo được, F_T-tương thích với $F_T := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ và thỏa mãn

$$\|\xi\|_{H^2} := \operatorname*{esssup}_{0\le t\le T} \|\xi(t)\|_{\mathrm{ms}} < \infty.$$

Khi đó, ta có $(H^2([0, T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^2})$ là không gian Banach. Đặt

$$H^2_\eta([0, T], \mathbb{R}^d) := \{\xi \in H^2([0, T], \mathbb{R}^d) : \xi(0) = \eta\}.$$

Định nghĩa toán tử

$$\mathcal{J}_\eta : H^2_\eta([0, T], \mathbb{R}^d) \to H^2_\eta([0, T], \mathbb{R}^d)$$

bởi $\mathcal{J}_\eta Y(0) := \eta$ và với mọi $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\eta Y(t) = \;& E_\alpha(t^\alpha A)\eta + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) b(\tau, Y(\tau))\, d\tau \\ & + \textstyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\sigma(\tau, Y(\tau))\, dW_\tau. \end{aligned}$$

Khi đó, bằng cách chứng minh tương tự Bổ đề 2.1.3 ta có $\mathcal{J}_\eta$ được xác định tốt. Để hoàn thành chứng minh, ta cần chỉ ra rằng $\mathcal{J}_\eta$ là ánh xạ co đối với metric phù hợp trên $H^2_\eta([0, T], \mathbb{R}^d)$. Muốn vậy, ta trang bị cho $H^2([0, T], \mathbb{R}^d)$ một chuẩn có trọng số $\|\cdot\|_{\gamma_1}$, ở đây $\gamma_1 > 0$, được xác định như sau

$$\|\xi\|_{\gamma_1} := \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \sqrt{\frac{\mathbb{E}(\|\xi(t)\|^2)}{E_{2\alpha-1}(\gamma_1 t^{2\alpha-1})}} \qquad \text{với mọi } \xi \in H^2([0, T], \mathbb{R}^d). \tag{2.12}$$

Vì $(H^2([0, T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^2})$ là không gian Banach và hai chuẩn $\|\cdot\|_{H^2}, \|\cdot\|_{\gamma_1}$ là tương đương nên $(H^2([0, T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\gamma_1})$ cũng là không gian Banach. Do hàm số $E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0, T]$ nên tồn tại $M_T := \max_{t\in[0,T]} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\| > 0$. Chọn và cố định hằng số dương γ_1 sao cho

$$2L^2 M_T^2 (T+1) \frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\gamma_1} < 1. \tag{2.13}$$

Bây giờ, do định nghĩa của $\mathcal{J}_\eta$, (H1), M_T và tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta có

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{J}_\eta X(t)-\mathcal{J}_\eta Y(t)\|_{\mathrm{ms}}^2\\
\leq\ & 2L^2M_T^2\left\|\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|X(\tau)-Y(\tau)\|\,d\tau\right\|_{\mathrm{ms}}^2\\
&+2L^2M_T^2\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-2}\|X(\tau)-Y(\tau)\|_{\mathrm{ms}}^2\,d\tau.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]), ta đạt được

$$\|\mathcal{J}_\eta X(t)-\mathcal{J}_\eta Y(t)\|_{\mathrm{ms}}^2\leq 2L^2M_T^2(T+1)\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-2}\|X(\tau)-Y(\tau)\|_{\mathrm{ms}}^2\,d\tau.$$

Do đó, nhờ định nghĩa của $\|\cdot\|_{\gamma_1}$ ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{\|\mathcal{J}_\eta X(t)-\mathcal{J}_\eta Y(t)\|_{\mathrm{ms}}^2}{E_{2\alpha-1}(\gamma_1 t^{2\alpha-1})}\\
\leq\ & 2L^2M_T^2(T+1)\frac{\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-2}E_{2\alpha-1}(\gamma_1\tau^{2\alpha-1})\,d\tau}{E_{2\alpha-1}(\gamma_1 t^{2\alpha-1})}\|X-Y\|_{\gamma_1}^2.
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.1.4, với mọi $t>0$ ta có

$$\frac{\gamma_1}{\Gamma(2\alpha-1)}\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-2}E_{2\alpha-1}\left(\gamma_1\tau^{2\alpha-1}\right)d\tau\leq E_{2\alpha-1}\left(\gamma_1 t^{2\alpha-1}\right).$$

Vì vậy,

$$\|\mathcal{J}_\eta X-\mathcal{J}_\eta Y\|_{\gamma_1}\leq\sqrt{2L^2M_T^2(T+1)\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\gamma_1}}\|X-Y\|_{\gamma_1}.$$

điều này cùng với (2.13) suy ra rằng $\mathcal{J}_\eta$ là ánh xạ co trên $H_\eta^2([0,T],\mathbb{R}^d)$. Theo Định lý điểm bất động của Banach (xem [3, Định lý 13] hoặc [55, tr. 59]), $\mathcal{J}_\eta$ có duy nhất điểm bất động và định lý được chứng minh xong. □

Chú ý 2.3.3. *Kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm nhẹ đối với lớp các hệ phương trình rộng hơn đã được chứng minh trong [48]. Tuy nhiên, giả thiết cho các hệ số của các hệ này là mạnh hơn* (H1), (H2).

2.4 Công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này, chúng tôi xây dựng công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$ trên đoạn $[0,T]$ có dạng sau

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = AX(t) + b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.14} $$

ở đây $T > 0$ bất kỳ, $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ và $b,\ \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ là các hàm đo được thỏa mãn các điều kiện

(H1) Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$ ta có

$$ \|b(t, x) - b(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq L\|x - y\|. $$

(H2) $\sigma(\cdot, 0)$ và $b(\cdot, 0)$ thỏa mãn

$$ \|\sigma(\cdot, 0)\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{\tau\in[0,T]} \|\sigma(\tau, 0)\| < \infty, \int_0^T \|b(\tau, 0)\|^2\, d\tau < \infty. $$

Theo Định nghĩa 2.1.1, nghiệm cổ điển của phương trình (2.14) với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$ là một quá trình ngẫu nhiên đo được, F-tương thích X thỏa mãn $X(0) = \eta$ và đẳng thức sau đúng với mọi $t \in (0, T]$

$$ \begin{aligned} X(t) \;&=\; \eta + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1}(AX(\tau) + b(\tau, X(\tau)))\, d\tau \\ &\quad + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \textstyle\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1}\sigma(\tau, X(\tau))\, dW_\tau. \end{aligned} \tag{2.15} $$

Theo Định lý 2.1.2, với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0$, phương trình (2.14) tồn tại duy nhất nghiệm cổ điển, ký hiệu bởi $\varphi(\cdot, \eta)$. Định lý sau đây đưa ra công thức biến thiên hằng số cho phương trình (2.14), đó là một biểu diễn đặc biệt của nghiệm cổ điển $\varphi(\cdot, \eta)$.

Định lý 2.4.1. (**Công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Cho $\eta \in \mathfrak{X}_0$ bất kỳ và $\varphi(\cdot, \eta)$ là nghiệm cổ điển của phương trình* (2.14). *Khi đó, đẳng thức*

$$ \begin{aligned} \varphi(t, \eta) = \;& E_\alpha(t^\alpha A)\eta + \textstyle\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t - \tau)^\alpha A) b(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, d\tau \\ & + \textstyle\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t - \tau)^\alpha A)\sigma(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, dW_\tau \end{aligned} \tag{2.16} $$

đúng với mọi $t \in [0, T]$.

Chú ý 2.4.2. (i) *Nếu không có nhiễu trong phương trình* (2.14)*, tức là* $\sigma(t, X(t)) \equiv 0$*, khi đó* (2.16) *trở thành công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ tất định (xem Định lý 1.2.8).*
(ii) *Ta có* $E_1(M) = E_{1,1}(M) = e^M$ *với* $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$*. Cho* $\alpha \to 1$, (2.16) *trở thành dạng sau (một cách hình thức)*

$$\varphi(t,\eta) \;=\; e^{tA}\eta + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau, \varphi(\tau,\eta))\, d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))\, dW_\tau.$$

Đây là công thức biến thiên hằng số cho nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$dX(t) = (AX(t) + b(t, X(t)))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dW_t$$

(xem [37, Định lý 3.1]).

Như một ứng dụng của Định lý 2.4.1, hệ quả sau đây đưa ra công thức nghiệm tường minh của phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên tuyến tính không thuần nhất có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = AX(t) + b(t) + \sigma(t)\,\frac{dW_t}{dt}, \quad X(0) = \eta. \tag{2.17}$$

Hệ quả 2.4.3. *Giả sử* $b \in L^2([0,T], \mathbb{R}^d), \sigma \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^d)$*, ở đây* $T > 0$*. Khi đó, nghiệm cổ điển của phương trình* (2.17) *trên đoạn* $[0,T]$ *được cho bởi*

$$\begin{aligned} X(t) \;&=\; E_\alpha(t^\alpha A)\eta + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A) b(\tau)\, d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\sigma(\tau)\, dW_\tau. \end{aligned}$$

Nhờ kết quả của Định lý 2.3.2 nên muốn chứng minh Định lý 2.4.1 chúng tôi chỉ cần chứng minh rằng

$$\varphi(t,\eta) = \psi(t,\eta) \qquad \text{với mọi } \eta \in \mathfrak{X}_0, t \in [0,T], \tag{2.18}$$

ở đây $\psi(\cdot, \eta)$ là nghiệm nhẹ của phương trình (2.14). Để rõ ràng hơn, chúng tôi sẽ trình bày tóm tắt ý tưởng chứng minh định lý này. Trước tiên, chúng tôi áp dụng Định lý biểu diễn Itô cho hàm $f \in \mathfrak{X}_T$ bất kỳ (xem Định lý 1.1.10) suy ra tồn tại duy nhất một quá trình ngẫu nhiên $\Xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ sao cho

$$f = \mathbb{E}f + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau.$$

Do vậy, để chứng minh (2.18) điều kiện đủ là chứng minh được đẳng thức

$$\left\langle \varphi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle = \left\langle \psi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle \tag{2.19}$$

đúng với mọi $C \in \mathbb{R}^d$ và $\Xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$. Để làm điều này, chúng tôi thiết lập một ước lượng trong Mệnh đề 2.4.6 cho

$$\left| \left\langle \varphi(t,\eta) - \psi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle \right|.$$

Trước khi khẳng định và chứng minh ước lượng này, chúng tôi cần chuẩn bị kết quả về ước lượng các thành phần của hạng tử trên, tức là ta cần ước lượng

$$\left\| \mathbb{E}(\varphi(t,\eta) - \psi(t,\eta))\Big(c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau\Big) \right\| \quad \text{ở đây } c \in \mathbb{R}, \xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}).$$

Tiếp theo chúng tôi định nghĩa các hàm $\chi_{\xi,\eta,c}, \kappa_{\xi,\eta,c}, \widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}, \widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c} : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ bởi

$$\chi_{\xi,\eta,c}(t) := \mathbb{E}\varphi(t,\eta)\left(c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau\right), \tag{2.20}$$

$$\kappa_{\xi,\eta,c}(t) := \mathbb{E}b(t,\varphi(t,\eta))\left(c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau\right), \tag{2.21}$$

$$\widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}(t) := \mathbb{E}\psi(t,\eta)\left(c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau\right), \tag{2.22}$$

$$\widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c}(t) := \mathbb{E}b(t,\psi(t,\eta))\left(c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau\right). \tag{2.23}$$

Chú ý 2.4.4. *Trong chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển và nghiệm nhẹ, ta có*

$$\varphi(\cdot,\eta), \psi(\cdot,\eta) \in H^2([0,T],\mathbb{R}^d).$$

Do đó, $\chi_{\xi,\eta,c}, \kappa_{\xi,\eta,c}, \widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}, \widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c}$ *là đo được và bị chặn trên* $[0,T]$.

Bổ đề 2.4.5. *Với mọi $t \in [0,T]$, khẳng định sau đây là đúng*

$$\begin{aligned}
\chi_{\xi,\eta,c}(t) &= c\, E_\alpha(t^\alpha A)\mathbb{E}\eta \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)^\alpha E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\big(\kappa_{\xi,\eta,c}(t) + \mathbb{E}\xi(\tau)\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))\big)d\tau, \quad (2.24)\\
\widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}(\tau) &= c\, E_\alpha(t^\alpha A)\mathbb{E}\eta \\
&\quad + \int_0^t (t-\tau)^\alpha E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\big(\widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c}(\tau) + \mathbb{E}\xi(\tau)\sigma(\tau,\psi(\tau,\eta))\big)d\tau. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Chứng minh. Vì $\varphi(t,\eta)$ là nghiệm cổ điển của phương trình (2.14) nên

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\eta) = \eta \;&+\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(A\varphi(\tau,\eta) + b(\tau,\varphi(\tau,\eta)))\, d\tau \\
&+\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))\, dW_\tau.
\end{aligned}$$

Lấy tích vô hướng hai vế của đẳng thức trên với $c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau$ và sau đó lấy kỳ vọng hai vế ta được

$$\begin{aligned}
\chi_{\xi,\eta,c}(t) &= c\,\mathbb{E}\eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(A\chi_{\xi,\eta,c}(\tau) + \kappa_{\xi,\eta,c}(\tau))\, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\langle \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))\, dW_\tau, \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle.
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta có

$$\begin{aligned}
\chi_{\xi,\eta,c}(t) &= c\,\mathbb{E}\eta \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\big(A\chi_{\xi,\eta,c}(\tau) + \kappa_{\xi,\eta,c}(\tau) + \mathbb{E}\xi(\tau)\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta))\big)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Nói cách khác, $\chi_{\xi,\eta,c}(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân phân thứ Caputo

$$^{C}D^\alpha_{0+}x(t) = Ax(t) + \kappa_{\xi,\eta,c}(t) + \mathbb{E}\xi(t)\sigma(t,\varphi(t,\eta)), \qquad x(0) = c\,\mathbb{E}\eta.$$

Khi đó, nhờ Chú ý 2.4.4 dẫn đến $\chi_{\xi,\eta,c}$ đo được và bị chặn trên đoạn $[0,T]$. Theo công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo (xem Định lý 1.2.8), ta suy ra đẳng thức (2.24) là đúng.

Tiếp theo, vì $\psi(t,\eta)$ là nghiệm nhẹ của phương trình (2.14) nên ta có

$$\psi(t,\eta) = E_\alpha(t^\alpha A)\eta + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)b(\tau,\psi(\tau,\eta))\, d\tau$$

$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\sigma(\tau,\psi(\tau,\eta))\, dW_\tau.$$

Lấy tích vô hướng hai vế của đẳng thức trên với $c + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau$ và sau đó lấy kỳ vọng hai vế ta đạt được

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}_{\xi,\eta,c}(t) &= c\, E_\alpha(t^\alpha A)\mathbb{E}\eta + \int_0^t (t-\tau)^\alpha E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\widehat{\kappa}_{\xi,\eta,c}(\tau)\, d\tau \\ &+ \left\langle \int_0^t (t-\tau)^\alpha E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\sigma(\tau,\psi(\tau,\eta))\, dW_\tau, \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle.\end{aligned}$$

Do đó, nhờ tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta suy ra đẳng thức (2.25) là đúng. □

Mệnh đề 2.4.6. *Cho* $M_T := \max_{t\in[0,T]} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\|$. *Khi đó, với* $C \in \mathbb{R}^d$ *bất kỳ và* $\Xi \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^d)$ *ta có*

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \varphi(t,\eta) - \psi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle\right|^2 \\ &\le 2dM_T^2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\left\|C + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau\right\|_{\mathrm{ms}}^2 \int_0^t \|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2\, d\tau \\ &\quad +2dM_T^2L^2\left\|C + \int_0^T \xi(\tau)\, dW_\tau\right\|_{\mathrm{ms}}^2 \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2\, d\tau.\end{aligned}$$

Chứng minh. Lấy $C = (c_1,\dots,c_d)^{\mathrm{T}}$ và $\Xi = (\xi_1,\dots,\xi_d)^{\mathrm{T}}$, ở đây $\xi_i \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$, $c_i \in \mathbb{R}$. Khi đó,

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \varphi(t,\eta) - \psi(t,\eta), C + \int_0^T \Xi(\tau)\, dW_\tau \right\rangle\right|^2 \\ &\le d\sum_{i=1}^d \left|\left\langle \varphi_i(t,\eta) - \psi_i(t,\eta), c_i + \int_0^T \xi_i(\tau)\, dW_\tau \right\rangle\right|^2 \\ &\le d\sum_{i=1}^d \left\|\mathbb{E}(\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta))\left(c_i + \int_0^T \xi_i(\tau)\, dW_\tau\right)\right\|^2 \\ &= d\sum_{i=1}^d \|\chi_{\xi_i,\eta,c_i}(t) - \widehat{\chi}_{\xi_i,\eta,c_i}(t)\|^2. \qquad (2.26)\end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi ước lượng $\|\chi_{\xi_i,\eta,c_i}(t) - \widehat{\chi}_{\xi_i,\eta,c_i}(t)\|$. Nhờ Bổ đề 2.4.5, ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\chi_{\xi_i,\eta,c_i}(t) - \widehat{\chi}_{\xi_i,\eta,c_i}(t)\\
= &\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\big(\kappa_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau) - \widehat{\kappa}_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau)\big)\, d\tau\\
&+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\mathbb{E}\xi_i(\tau)\big(\sigma(\tau,\varphi(\tau,\eta)) - \sigma(\tau,\psi(\tau,\eta))\big)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\|\chi_{\xi_i,\eta,c_i}(t) - \widehat{\chi}_{\xi_i,\eta,c_i}(t)\| \leq\ & M_T \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\kappa_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau) - \widehat{\kappa}_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau)\|\, d\tau\\
&+ M_T L \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\xi_i(\tau)\|_{\rm ms} \|\varphi(\tau,\eta) - \psi(\tau,\eta)\|_{\rm ms}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Vì vậy, áp dụng bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]), ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\|\chi_{\xi_i,\eta,c_i}(t) - \widehat{\chi}_{\xi_i,\eta,c_i}(t)\|\\
\leq\ & M_T \left(\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\kappa_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau) - \widehat{\kappa}_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau)\|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+ M_T L \left(\int_0^t \|\xi_i(\tau)\|_{\rm ms}^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} \|\varphi(\tau,\eta) - \psi(\tau,\eta)\|_{\rm ms}^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leq\ & M_T \sqrt{\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}} \left(\int_0^t \|\kappa_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau) - \widehat{\kappa}_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau)\|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&+ M_T L \left(\int_0^t \|\xi_i(\tau)\|_{\rm ms}^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2} \|\varphi(\tau,\eta) - \psi(\tau,\eta)\|_{\rm ms}^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo định nghĩa của κ và $\widehat{\kappa}$ ta có ước lượng sau với mọi $\tau \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\left\|\kappa_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau) - \widehat{\kappa}_{\xi_i,\eta,c_i}(\tau)\right\|^2\\
=\ & \sum_{j=1}^d \left|\left\langle b_j(\tau,\varphi(\tau,\eta)) - b_j(\tau,\psi(\tau,\eta)), \left(c_i + \int_0^T \xi_i(\tau)\, dW_\tau\right)\right\rangle\right|^2\\
\leq\ & L^2 \|\varphi(\tau,\eta) - \psi(\tau,\eta)\|_{\rm ms}^2 \left\|c_i + \int_0^T \xi_i(\tau)\, dW_\tau\right\|_{\rm ms}^2,
\end{aligned}$$

ở đây, chúng tôi dùng điều kiện (H1) để đạt được bất đẳng thức ở dòng cuối cùng. Do đó,

$$\|\chi_{\xi_i,\eta,c_i} - \widehat{\chi}_{\xi_i,\eta,c_i}\|^2$$

$$\leq \;\; 2M_T^2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\left\|c_i+\int_0^T \xi_i(\tau)\,dW_\tau\right\|_{\text{ms}}^2\int_0^t \|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau$$

$$+2M_T^2L^2\int_0^t \|\xi_i(\tau)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau.$$

Điều này cùng với (2.26) dẫn tới

$$\left|\left\langle \varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta), C+\int_0^T \Xi(\tau)\,dW_\tau\right\rangle\right|^2$$

$$\leq \;\; 2dM_T^2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\left\|C+\int_0^T \xi(\tau)\,dW_\tau\right\|_{\text{ms}}^2\int_0^t \|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau$$

$$+2dM_T^2L^2\int_0^t \|\xi(\tau)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau.$$

Hơn nữa, do tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta suy ra

$$\left\|C+\int_0^T \xi(\tau)\,dW_\tau\right\|_{\text{ms}}^2 = \|C\|^2+\int_0^T \|\xi(\tau)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau \geq \int_0^t \|\xi(\tau)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau,$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Chứng minh Định lý 2.4.1. Đặt $T^* := \inf\{t\in[0,T] : \|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}} > 0\}$. Khi đó, để hoàn thành chứng minh ta cần chỉ ra $T^*=T$. Giả sử ngược lại, tức là $T^*<T$. Chọn và cố định $\delta>0$ bất kỳ thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$2dM_T^2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\delta+2dM_T^2L^2\frac{\delta^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}<1. \tag{2.27}$$

Để dẫn đến mâu thuẫn, chúng tôi chỉ ra rằng $\|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}}=0$ với mọi $t\in[T^*,T^*+\delta]$. Muốn vậy, ta chọn và cố định $t\in[T^*,T^*+\delta]$ bất kỳ. Áp dụng Định lý biểu diễn Itô (xem Định lý 1.1.10), tồn tại duy nhất $C_t\in\mathbb{R}^d$ và $\xi_t^*\in\mathcal{M}^2([0,t],\mathbb{R}^d)$ sao cho

$$\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)=C_t+\int_0^t \xi_t^*(\tau)\,dW_\tau.$$

Chúng tôi mở rộng ξ_t^* trên toàn bộ khoảng [0,T] bằng cách đặt $\xi_t^*(\tau)=0$ với mọi $\tau\in(t,T]$. Với một ξ_t^* như vậy, ta có

$$\left\|C_t+\int_0^T \xi_t^*(\tau)\,dW_\tau\right\|_{\text{ms}}^2 = \|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}}^2.$$

Bây giờ, áp dụng Mệnh đề 2.4.6 cho $C = C_t, \Xi = \xi_t^*$ ta đạt được

$$\begin{aligned}\|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}}^2 \ \le\ & 2dM_T^2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\int_{T^*}^t \|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\text{ms}}^2\, d\tau\\ &+2dM_T^2L^2\int_{T^*}^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\psi(\tau,\eta)\|_{\text{ms}}^2\, d\tau.\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}&\operatorname*{esssup}_{t\in[T^*,T^*+\delta]} \|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}}^2\\ \le\ & 2dM_T^2L^2\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\,\delta\ \operatorname*{esssup}_{t\in[T^*,T^*+\delta]} \|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}}^2\\ &+2dM_T^2L^2\frac{\delta^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\ \operatorname*{esssup}_{t\in[T^*,T^*+\delta]} \|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}}^2.\end{aligned}$$

Bằng cách chọn δ như trong (2.27), ta suy ra

$$\operatorname*{esssup}_{t\in[T^*,T^*+\delta]} \|\varphi(t,\eta)-\psi(t,\eta)\|_{\text{ms}} = 0.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn và chứng minh được hoàn thành. □

2.5 Cận dưới cho sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong mục này, chúng tôi sẽ dành thời gian để chứng nghiên cứu khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D_{0+}^{\alpha}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.28}$$

với $T > 0$ bất kỳ, $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ và b, σ : $[0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ đo được thỏa mãn các điều kiện

(H1) Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]$ ta có

$$\|b(t,x)-b(t,y)\| \le L\|x-y\|, \quad \|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\| \le L\|x-y\|.$$

(H2) $\sigma(\cdot,0)$ và $b(\cdot,0)$ thỏa mãn

$$\|\sigma(\cdot,0)\|_\infty := \operatorname*{esssup}_{\tau\in[0,T]} \|\sigma(\tau,0)\| < \infty, \int_0^T \|b(\tau,0)\|^2\, d\tau < \infty.$$

Kết quả chính của mục này về sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 2.5.1. (**Sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Cho* $\eta,\zeta \in \mathfrak{X}_0$ *sao cho* $\eta \neq \zeta$ *và* $\varphi(\cdot,\zeta),\varphi(\cdot,\eta)$ *là hai nghiệm cổ điển của phương trình* (2.28). *Khi đó, với mọi* $\epsilon > 0$ *ta có*

$$\limsup_{t\to\infty} t^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\epsilon}\|\varphi(t,\eta)-\varphi(t,\zeta)\|_{\mathrm{ms}} = \infty.$$

Chứng minh. Ta chứng minh định lý này bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại hằng số dương $\lambda > \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ sao cho

$$\limsup_{t\to\infty}\ t^{\lambda}\|\varphi(t,\eta)-\varphi(t,\zeta)\|_{\mathrm{ms}} < \infty, \tag{2.29}$$

với $\eta,\zeta\in\mathfrak{X}_0, \eta\neq\zeta$. Khi đó, tồn tại các hằng số $T>0$ và $K>0$ sao cho

$$\|\varphi(t,\eta)-\varphi(t,\zeta)\|^2_{\mathrm{ms}} \le Kt^{-2\lambda} \qquad \text{với mọi } t\ge T. \tag{2.30}$$

Do tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9) và giả thiết (H1) nên

$$\begin{aligned}\|\eta-\zeta\|^2_{\mathrm{ms}} \leqslant\ & 3\mathbb{E}\left(\|\varphi(t,\eta)-\varphi(t,\zeta)\|^2\right)\\ &+\frac{3L^2}{\Gamma(\alpha)^2}\mathbb{E}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|d\tau\right)^2\\ &+\frac{3L^2}{\Gamma(\alpha)^2}\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|^2_{\mathrm{ms}}d\tau.\end{aligned}$$

Nhờ ước lượng (2.30) ta suy ra

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left(\|\varphi(t,\eta)-\varphi(t,\zeta)\|^2\right) = 0.$$

Do đó, để chỉ ra sự mâu thuẫn chúng ta cần chứng minh

$$\lim_{t\to\infty} I_1(t) = 0, \quad \text{ở đây } I_1(t) := \mathbb{E}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|\,d\tau\right)^2 \tag{2.31}$$

và

$$\lim_{t\to\infty} I_2(t) = 0, \quad \text{ở đây } I_2(t) := \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau. \tag{2.32}$$

Để chứng minh (2.31), ta chọn và cố định $\delta \in \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{1-\alpha}{2}\right)$. Chú ý rằng ta luôn chọn được δ vì $\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{1-\alpha}{2}$ (tương đương với $\lambda > \frac{2\alpha}{1-\alpha}$). Với $t > \max\{T^{1/\delta}, 1\}$, ta có

$$\begin{aligned} I_1(t) &\le 2\mathbb{E}\left(\int_0^{t^\delta} (t-\tau)^{\alpha-1}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|\,d\tau\right)^2 \\ &\quad +2\mathbb{E}\left(\int_{t^\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|\,d\tau\right)^2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]), ta được

$$\begin{aligned} I_1(t) &\le 2\int_0^{t^\delta} (t-\tau)^{2\alpha-2}\,d\tau \int_0^{t^\delta} \|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau \\ &\quad +2\int_{t^\delta}^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\,d\tau \int_{t^\delta}^t \|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\int_0^{t^\delta} (t-\tau)^{2\alpha-2}\,d\tau \le \frac{t^\delta}{(t-t^\delta)^{2-2\alpha}}, \int_{t^\delta}^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\,d\tau \le \frac{(t-t^\delta)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.$$

Kết hợp điều này với (2.30) dẫn đến

$$\begin{aligned} I_1(t) &\le \frac{2t^{2\delta}\text{esssup}_{\tau\in[0,T]}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|_{\text{ms}}}{(t-t^\delta)^{2-2\alpha}} + \frac{2K(t-t^\delta)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\int_{t^\delta}^t \tau^{-2\lambda}\,d\tau \\ &\le \frac{2t^{2\delta}\text{esssup}_{\tau\in[0,T]}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|_{\text{ms}}}{(t-t^\delta)^{2-2\alpha}} + \frac{2K(t-t^\delta)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)t^{2\delta\lambda}}. \end{aligned}$$

Nhờ định nghĩa của δ, ta có $2\delta < 2-2\alpha$ và $2\alpha < 2\delta\lambda$. Vì vậy, khi cho $t\to\infty$ trong bất đẳng thức ở trên ta suy ra $\lim_{t\to\infty} I_1(t) = 0$ và do đó (2.31) được chứng minh.

Để chứng minh (2.32), ta lấy $t \ge T$ bất kỳ. Bằng cách dùng ước lượng (2.30) ta đạt được

$$I_2(t) \le \int_0^T (t-\tau)^{2\alpha-2}\|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|_{\text{ms}}^2\,d\tau + K\int_T^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\tau^{-2\lambda}\,d\tau$$

$$\leq \quad \frac{T}{(t-T)^{2-2\alpha}} \operatorname*{esssup}_{\tau\in[0,T]} \|\varphi(\tau,\eta)-\varphi(\tau,\zeta)\|^2_{\mathrm{ms}} + K\int_T^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\tau^{-2\lambda}\, d\tau.$$

Vì vậy,

$$\limsup_{t\to\infty} I_2(t) \leq K \limsup_{t\to\infty} \int_T^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\tau^{-2\lambda}\, d\tau. \tag{2.33}$$

Mặt khác, với $t \geq 2T$ ta có

$$\begin{aligned}
\int_T^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\tau^{-2\lambda}\, d\tau &= \int_T^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{2\alpha-2}\tau^{-2\lambda}\, d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\tau^{-2\lambda}\, d\tau \\
&\leq \frac{2^{2-2\alpha}}{t^{2-2\alpha}} \int_T^{\frac{t}{2}} \tau^{-2\lambda}\, d\tau + \left(\frac{t}{2}\right)^{-2\lambda} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{2\alpha-2}\, d\tau \\
&\leq \frac{2^{2-2\alpha}T^{-2\lambda+1}}{(2\lambda-1)t^{2-2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha-1}\left(\frac{t}{2}\right)^{2\alpha-1-2\lambda}.
\end{aligned}$$

Điều này cùng với (2.33) và do $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\lambda > \frac{2\alpha}{1-\alpha} > \alpha - \frac{1}{2}$, dẫn tới $\lim_{t\to\infty} I_2(t) = 0$. Định lý được chứng minh. □

Một kết quả tương tự như trong Định lý 2.5.1 cũng đã được chứng minh cho phương trình vi phân phân thứ Caputo tất định (xem [4, Định lý 2.1.2], [17]). Ngoài ra, gần đây hướng nghiên cứu này cũng được quan tâm cho phương trình sai phân phân thứ Caputo (xem [5, Định lý 5]). Ở trong các công trình này, các tác giả cũng chứng minh được khoảng cách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình phân thứ hội tụ đến 0 không nhanh hơn tốc độ đa thức với số mũ đủ lớn.

Để kết thúc phần này, chúng tôi đưa ra một ứng dụng của Định lý 2.5.1 liên quan đến số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường bất kỳ của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tuyến tính bị chặn. Cụ thể, chúng ta xét phương trình sau

$${}^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = A(t)X(t) + B(t)X(t)\frac{dW_t}{dt}, \tag{2.34}$$

trong đó $A, B : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ đo được và thỏa mãn

$$\operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \|A(t)\| < \infty, \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} \|B(t)\| < \infty.$$

Theo Định lý 2.1.2, với mỗi $\eta \in \mathfrak{X}_0 \setminus \{0\}$, phương trình (2.34) tồn tại nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện ban đầu $X(0) = \eta$, được ký hiệu bởi $\Phi(\cdot, \eta)$. *Số mũ Lyapunov bình phương trung bình* của nghiệm không tầm thường $\Phi(\cdot, \eta)$ được định nghĩa bởi

$$\lambda_{\text{ms}}(\Phi(\cdot, \eta)) := \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t, \eta)\|_{\text{ms}}$$

(xem [41]). Trong hệ quả sau đây, chúng tôi chỉ ra rằng số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường bất kỳ là không âm.

Hệ quả 2.5.2. (**Tính không âm của số mũ Lyapunov bình phương trung bình**). *Số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường phương trình* (2.34) *luôn không âm, tức là*

$$\lambda_{\text{ms}}(\Phi(\cdot, \eta)) \geq 0 \quad \textit{với mọi } \eta \in \mathfrak{X}_0 \setminus \{0\}.$$

Chứng minh. Cho $\eta \in \mathfrak{X}_0 \setminus \{0\}, \epsilon > 0$ bất kỳ. Theo Định lý 2.5.1 ta có

$$\limsup_{t\to\infty} t^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\epsilon} \|\Phi(t, \eta)\|_{\text{ms}} = \infty.$$

Do đó, tồn tại $T > 0$ sao cho

$$\|\Phi(t, \eta)\|_{\text{ms}} \geq t^{-\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\epsilon\right)} \qquad \text{với mọi } t \geq T.$$

Theo định nghĩa số mũ Lyapunov bình phương trung bình ta có

$$\lambda_{\text{ms}}(\Phi(\cdot, \eta)) \geq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \left(t^{-\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\epsilon\right)} \right) = 0.$$

Hệ quả được chứng minh xong. □

Kết quả tương tự hệ quả này cũng đã được chứng minh đối với phương trình vi phân phân thứ tất định (xem [38]). Theo kết quả ở trên chúng ta thấy việc sử dụng phương pháp thứ nhất của Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của phương trình (2.28) là không hiển nhiên.

Trong lý thuyết phương trình vi phân phân thứ, hàm Mittag-Leffler một tham số đóng vai trò tương tự như hàm mũ đối với phương trình vi phân thường. Điều này gợi ý cho chúng ta sử dụng hàm ngược của hàm Mittag-Leffler thực một tham số để mở rộng khái niệm số mũ Lyapunov cổ điển cho nghiệm của phương trình phân thứ. Sau đó người ta dùng số mũ Lyapunov phân thứ (dựa trên sự so sánh dáng điệu tiệm cận của các nghiệm với hàm Mittag-Leffler một tham số) để nghiên cứu tính ổn định cho nghiệm tầm thường của phương trình vi phân phân thứ tất định (xem [4]).

Kết luận của chương 2

Trong chương này, chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển, nghiệm nhẹ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Đồng thời, chúng tôi cũng chứng minh công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Trong Phần 2.2, chúng tôi đã ước lượng được khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình (2.28) khi thời gian hữu hạn. Từ đó suy ra tính liên tục Lipschitz của nghiệm theo điều kiện ban đầu. Cũng trong chương này, chúng tôi đã thiết lập được một cận dưới cho sự phân tách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Kết quả này khẳng định rằng khoảng cách giữa hai nghiệm phân biệt lớn hơn $t^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}-\epsilon}$ khi $t \to \infty$ với $\epsilon > 0$ bất kỳ. Nhờ có kết quả này chúng tôi chứng minh được số mũ Lyapunov bình phương trung bình của nghiệm không tầm thường phương trình (2.34) luôn không âm trong phần cuối của chương.

Để kết thúc phần này, chúng tôi sẽ đưa ra một vài bình luận về các bài báo viết về hướng nghiên cứu trên. Đầu tiên là bài [57], ở đây tác giả mới chỉ chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển với bậc phân thứ $\alpha \in [\frac{3}{4}, 1)$. Tiếp theo, trong [48] các tác giả nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất của nghiệm nhẹ cho lớp các phương trình khá rộng. Tuy nhiên, các điều kiện đưa ra trong bài báo này chặt hơn điều kiện (H1) và (H2)(xem [48, Định lý 4.2]). Với các điều kiện (H1) và (H2) (xem Định lý 2.3.2 Chương 2), chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm nhẹ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Gần đây nhất, trong [56] các tác giả đã chứng minh thành công sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển trên một khoảng nhỏ $[0, T_a]$ nhưng việc thác triển nghiệm cổ điển từ một khoảng nhỏ $[0, T_a]$ ra toàn khoảng $[0, \infty)$ dường như không thể áp dụng cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Các vấn đề này đã được khắc phục trong Định lý 2.1.2 và Định lý 2.3.2. Vì vậy, những kết quả thu được của chương này đã làm phong phú thêm lý thuyết định tính phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Chương 3

Lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Trong chương này, chúng tôi tập trung nghiên cứu về giải số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng sau

$$^{C}D_{0+}^{\alpha}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}. \tag{3.1}$$

Theo kết quả ở Chương 2, với một số giả thiết phù hợp của các hệ số chúng tôi đã chứng minh được phương trình (3.1) luôn có duy nhất nghiệm ứng với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta$. Tuy nhiên, trong thực tế chỉ một số ít phương trình vi phân ngẫu nhiên có thể tìm được công thức tường minh của nghiệm chính xác, vì vậy việc tìm nghiệm xấp xỉ của (3.1) là một vấn đề đáng quan tâm.

Mục đích chính của chương này là để giải quyết vấn đề trên, nội dung cụ thể được sắp xếp gồm ba phần, trong Phần 3.1 chúng tôi xây dựng một lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình (3.1). Việc nghiên cứu tốc độ hội tụ cho lược đồ vừa đưa ra được tiến hành trong Phần 3.2. Ngoài ra, ví dụ minh họa cho tốc độ hội tụ trong nghiên cứu lý thuyết cũng được trình bày trong phần này. Cuối cùng chúng tôi thảo luận về tốc độ hội tụ và sự ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính.

Nội dung của Chương 3 được viết dựa trên 01 bài báo đã được xuất bản sau đây:

[CT3] D. T. Son, P. T. Huong, Kloeden P. E., V. A. My (2020), Euler-Maruyama scheme for Caputo fractional stochastic differential equations, *Journal*

of Computational and Applied Mathematics, **380**,
https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112989, (SCIE).

3.1 Lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên

Cho $T > 0$ bất kỳ và xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = b(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{3.2}$$

ở đây $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ đo được và thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(H3) *Tính liên tục Lipschitz toàn cục trong* $\mathbb{R}^d$ *của* b *và* σ: Tồn tại $L > 0$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$,

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

(H4) *Tính liên tục Hölder trong đoạn* $[0, T]$ *của* b *và* σ: Tồn tại $L_1, L_2 > 0$ và $\beta, \gamma \in [0, 1]$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}^d$, $t, s \in [0, T]$ ta có

$$\|b(t, x) - b(s, x)\| \leq L_1|t - s|^{\beta}, \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(s, x)\| \leq L_2|t - s|^{\gamma}.$$

Chú ý 3.1.1. *Dễ dàng chứng minh được từ các điều kiện* (H3) *và* (H4) *ta có tính chất sau*

(H5) Tăng trưởng không quá tuyến tính: Tồn tại $K > 0$ *sao cho với* $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d$ *ta có*

$$\|b(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|), \quad \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + \|x\|).$$

Như chúng tôi đã định nghĩa trong Phần 2.1, nghiệm của phương trình (3.2) trên đoạn $[0, T]$ với điều kiện ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$ có dạng

$$X(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{b(s, X(s))}{(t - s)^{1-\alpha}}\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\sigma(s, X(s))}{(t - s)^{1-\alpha}}\,dW_s, \tag{3.3}$$

Theo Định lý 2.1.2, với mỗi điều kiện ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$ phương trình (3.2) có nghiệm duy nhất trên đoạn $[0, T]$ được ký hiệu bởi $X(t, \eta)$. Chú ý rằng, đối với sự tồn tại và duy nhất nghiệm chúng ta chỉ cần điều kiện (H3) và (H5) là đủ.

Mục tiêu của chúng tôi trong phần này là giải số phương trình (3.2). Nhận thấy nhân của (3.3), hàm $(t-s)^{\alpha-1}$, trở thành vô hạn khi $s = t$. Điều này dẫn đến một số khó khăn hiển nhiên khi rời rạc hóa phương trình (3.2). Lưu ý khi xét phương trình vi phân ngẫu nhiên (phương trình (3.2) với $\alpha = 1$) ta không gặp vấn đề này (xem lược đồ số Euler (1.9) ở Chương 1). Quay lại vấn đề, khi $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, để tránh các điểm kỳ dị, chúng tôi giới thiệu lược đồ rời rạc hóa dưới đây và được gọi là lược đồ kiểu Euler-Maruyama cho hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, nghiệm xấp xỉ $X^{(n)}(\cdot, \eta)$ được xác định bởi $X^{(n)}(0, \eta) := \eta$ và với $t \in (0, T]$ ta đặt

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t, \eta) := \eta \quad &+ \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s), \eta))}{(t-s)^{1-\alpha}} \, ds \\ &+ \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s), \eta))}{(\rho_n(t) - \tau_n(s))^{1-\alpha}} \, dW_s, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ở đây $\tau_n(s) = \frac{kT}{n} =: \tau_k^{(n)}$ và $\rho_n(s) = \frac{(k+1)T}{n} =: \rho_k^{(n)}$ với $s \in (\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}]$.

Phương trình này có thể được giải từng bước trên mỗi khoảng $\left(\frac{Tk}{n}, \frac{T(k+1)}{n}\right]$, với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

3.2 Tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama

3.2.1 Tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama

Trong mục này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả chính của chương là đánh giá khoảng cách bình phương trung bình giữa nghiệm số $X^{(n)}(t, \eta)$ và nghiệm chính xác $X(t, \eta)$ của phương trình (3.2). Kết quả này được thể hiện trong định lý sau đây.

Định lý 3.2.1. (**Tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên**). *Giả thiết rằng các hệ số b, σ của phương trình* (3.2) *thỏa mãn các điều kiện* (H3) *và* (H4)*. Khi đó, tồn tại một hằng số C chỉ phụ thuộc vào $T, L, L_1, L_2, \alpha, \beta, \gamma$ sao cho*

$$\sup_{0\le t\le T} \|X^{(n)}(t,\eta) - X(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \le \frac{C}{n^{2\kappa}}, \tag{3.5}$$

ở đây $\kappa := \min\left\{\beta, \gamma, \alpha - \frac{1}{2}\right\}$.

Chú ý 3.2.2. (i) *Khi các hệ số b, σ không phụ thuộc vào thời gian thì tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình* (3.2) *là* $\alpha - \frac{1}{2}$.

(ii) *Khi $\alpha = 1$, tức là phương trình* (3.2) *trở thành phương trình vi phân ngẫu nhiên thì tốc độ hội tụ của lược đồ trong Định lý 3.2.1 trùng với tốc độ hội tụ mà chúng ta đã biết cho lược đồ Euler-Maruyama cổ điển (xem [30]).*

(iii) *Rõ ràng luôn tồn tại mối quan hệ giữa kết quả trong chương này với các kết quả đã được đưa ra về lược đồ Euler cho phương trình Volterra ngẫu nhiên tổng quát với nhân kỳ dị (xem [59]). Vì các nhân trong hệ mà chúng tôi nghiên cứu là hiển nên tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama nhận được là hiển. Lưu ý rằng tốc độ hội tụ trong [59] là không hiển hoặc chưa tối ưu.*

Bằng phương pháp chứng minh tương tự như trong Định lý 1.1.15 cho phương trình vi phân ngẫu nhiên, trước khi chứng minh Định lý 3.2.1, chúng tôi cần hai bổ đề chuẩn bị. Trong bổ đề đầu tiên, chúng tôi sẽ chỉ ra một cận trên cho $\sup_{0\le t\le T} \|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}$ (so sánh với Bổ đề 1.1.13).

Bổ đề 3.2.3. *Nếu các hệ số b, σ của phương trình* (3.2) *thỏa mãn điều kiện* (H5) *thì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có*

$$\sup_{0\le t\le T} \|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \le C_1,$$

ở đây

$$C_1 := (1 + 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2) E_{2\alpha-1}\left(\frac{(6T+6)K^2\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma^2(\alpha)} T^{2\alpha-1}\right). \tag{3.6}$$

Chứng minh. Chúng tôi sẽ chứng minh bổ đề này qua hai bước.

Bước 1: Chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp quy nạp theo k

$$\sup_{0\le t\le \frac{kT}{n}} \|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 < \infty, k = 0,1,...,n. \tag{3.7}$$

- Với $k = 0$ ta có $X^{(n)}(0,\eta) = \eta$ nên

$$\|X^{(n)}(0,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 = \|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 < \infty.$$

Do đó, bất đẳng thức (3.7) đúng với $k = 0$.

- Với $k = 1$ ta có

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t,\eta) := \eta \ &+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{b(0, X^{(n)}(0,\eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds \\ &+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma(0, X^{(n)}(0,\eta))}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\, dW_s. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\|x+y+z\|^2 \le 3(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2)$ với mọi $x,y,z \in \mathbb{R}^d$, chúng ta đạt được

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\|X^{(n)}(t,\eta)\|^2\right) \ &\le \ 3\mathbb{E}\|\eta\|^2 + \frac{3}{\Gamma^2(\alpha)}\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \frac{b(0,X^{(n)}(0,\eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds\right\|^2\right) \\ &+ \frac{3}{\Gamma^2(\alpha)}\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \frac{\sigma(0,X^{(n)}(0,\eta))}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\, dW_s\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]) và tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9) dẫn đến

$$\begin{aligned} \|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \ &\le \ 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 + \frac{3t}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{\mathbb{E}\|b(0,X^{(n)}(0,\eta))\|^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds \\ &+ \frac{3}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{\mathbb{E}\|\sigma(0,X^{(n)}(0,\eta))\|^2}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{2-2\alpha}}\, ds. \end{aligned}$$

Điều này cùng với ước lượng $|\rho_n(t)-\tau_n(s)| \ge |t-s|$ và điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính (H5) ta suy ra

$$\|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \ \le \ 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 + \frac{3t}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{2K^2(1+\mathbb{E}\|X^{(n)}(0,\eta)\|^2)}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds$$

$$+\frac{3}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t \frac{2K^2(1+\mathbb{E}\|X^{(n)}(0,\eta)\|^2)}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds$$

$$= 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 + \frac{(6t+6)K^2}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t \frac{1+\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds.$$

Vì $\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 < \infty$ nên ta có

$$\|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \le 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 + \frac{(6t+6)K^2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}(1+\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2) < \infty. \tag{3.8}$$

Do đó, bất đẳng thức (3.7) đúng với $k=1$.

- Giả sử bất đẳng thức (3.7) đúng với k ($k>1$), tức là

$$\sup_{0\le t\le \frac{kT}{n}} \|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 < \infty.$$

Khi đó, ta đạt được

$$\left\|X^{(n)}\Big(\frac{iT}{n},\eta\Big)\right\|_{\mathrm{ms}}^2 < \infty, i=0,1,...,k. \tag{3.9}$$

- Ta cần chứng minh bất đẳng thức (3.7) đúng với $k+1$. Thật vậy, theo (3.4) với $t\in\left(\frac{Tk}{n},\frac{T(k+1)}{n}\right]$ ta có

$$\begin{aligned}
&X^{(n)}(t,\eta)\\
&= \eta + \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\frac{iT}{n}}^{\frac{(i+1)T}{n}} \frac{b\Big(\frac{iT}{n},X^{(n)}\Big(\frac{iT}{n},\eta\Big)\Big)}{(t-s)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\,ds\\
&+ \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\frac{iT}{n}}^{\frac{(i+1)T}{n}} \frac{\sigma\Big(\frac{iT}{n},X^{(n)}\Big(\frac{iT}{n},\eta\Big)\Big)}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dW_s\\
&+ \int_{\frac{kT}{n}}^{t} \frac{b\Big(\frac{kT}{n},X^{(n)}\Big(\frac{kT}{n},\eta\Big)\Big)}{(t-s)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\,ds + \int_{\frac{kT}{n}}^{t} \frac{\sigma\Big(\frac{kT}{n},X^{(n)}\Big(\frac{kT}{n},\eta\Big)\Big)}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dW_s.
\end{aligned}$$

Bằng cách chứng minh tương tự (3.8) ta được

$$\begin{aligned}
&\|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2\\
&\le \frac{(2k+3)2K^2}{\Gamma^2(\alpha)}\Big(1+\frac{T}{n}\Big)\sum_{i=0}^{k-1}\int_{\frac{iT}{n}}^{\frac{(i+1)T}{n}} \frac{1+\left\|X^{(n)}\Big(\frac{iT}{n},\eta\Big)\right\|_{\mathrm{ms}}^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds
\end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{(2k+3)2K^2}{\Gamma^2(\alpha)}\left(1+\frac{T}{n}\right)\int_{\frac{kT}{n}}^{t}\frac{1+\left\|X^{(n)}\left(\frac{kT}{n},\eta\right)\right\|_{\mathrm{ms}}^{2}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds$$
$$+ \quad (2k+3)\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2.$$

Điều này cùng với (3.9) dẫn đến $\|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 < \infty$. Do đó, bất đẳng thức (3.7) đúng với $k+1$. Theo phương pháp quy nạp toán học ta suy ra $\sup_{0\le t\le T}\|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 < \infty$.

Bước 2: Chứng minh

$$\sup_{0\le t\le T}\|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \le C_1.$$

Áp dụng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama (3.4) cho hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và phương pháp chứng minh tương tự (3.8) ta được

$$\begin{aligned}
\|X^{(n)}(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 &\le 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 + \frac{3t}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t \frac{2K^2(1+\mathbb{E}\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta)\|^2)}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds \\
&\quad + \frac{3}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t \frac{2K^2(1+\mathbb{E}\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta)\|^2)}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds \\
&= 3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2 + \frac{(6t+6)K^2}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t \frac{1+\mathbb{E}\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta)\|^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds.
\end{aligned}$$

Đặt $m_t := 1+\sup_{0\le s\le t}\|X^{(n)}(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2$. Khi đó, ta có $m_t<\infty$ và ước lượng

$$m_t \le (1+3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2) + \frac{(6T+6)K^2}{\Gamma(\alpha)^2}\int_0^t \frac{m_s}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho phương trình vi phân phân thứ (xem [24, Bổ đề 7.1.1] hoặc [58, Hệ quả 2]) ta suy ra

$$m_t \le (1+3\|\eta\|_{\mathrm{ms}}^2)E_{2\alpha-1}\left(\frac{(6T+6)K^2\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma^2(\alpha)}t^{2\alpha-1}\right),$$

ở đây $E_{2\alpha-1}(\cdot)$ là hàm Mittag-Leffler với tham số $2\alpha-1$.

Bổ đề được chứng minh xong. □

Tiếp theo chúng tôi sẽ thiết lập một cận trên cho $\|X^{(n)}(t,\eta)-X^{(n)}(\widetilde{t},\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2$ thông qua $|t-\widetilde{t}\,|^{2\alpha-1}$ và $\frac{1}{n^{2\alpha-1}}$ trong bổ đề dưới đây (so sánh với Bổ đề 1.1.14).

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử rằng các hệ số b, σ của phương trình* (3.2) *thỏa mãn điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính* (H5). *Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $t, \widetilde{t} \in [0, T]$ nghiệm xấp xỉ Euler-Maruyama có tính chất*

$$\|X^{(n)}(t,\eta) - X^{(n)}(\widetilde{t},\eta)\|_{\text{ms}}^2 \leq \frac{C_2}{n^{2\alpha-1}} + C_3|t-\widetilde{t}|^{2\alpha-1},$$

ở đây

$$C_2 := \frac{8K^2(1+C_1)\,T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}, \quad C_3 := \frac{8(T+2)K^2(1+C_1)}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}, \tag{3.10}$$

với C_1 được xác định trong Bổ đề 3.2.3.

Chứng minh. Chọn và cố định $t, \widetilde{t} \in [0, T]$ với $t > \widetilde{t}$. Theo lược đồ số kiểu Euler-Maruyama (3.4) cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên, ta có

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha)\left(X^{(n)}(t,\eta) - X^{(n)}(\widetilde{t},\eta)\right)\\
=\;& \int_{\widetilde{t}}^{t} \frac{b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds + \int_{\widetilde{t}}^{t} \frac{\sigma(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\,dW_s\\
&+\int_0^{\widetilde{t}} \Big(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(\widetilde{t}-s)^{1-\alpha}}\Big) b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\,ds\\
&+\int_0^{\widetilde{t}} \Big(\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}} - \frac{1}{(\rho_n(\widetilde{t})-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\Big) \sigma(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\,dW_s.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\|x+y+z+w\|^2 \leq 4(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + \|w\|^2)$ với mọi $x, y, z, w \in \mathbb{R}^d$ và tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9) ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma^2(\alpha)}{4}\|X^{(n)}(t,\eta) - X^{(n)}(\widetilde{t},\eta)\|_{\text{ms}}^2\\
\leq\;& \mathbb{E}\left(\left\|\int_{\widetilde{t}}^{t} \frac{b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds\right\|^2\right) + \int_{\widetilde{t}}^{t} \frac{\|\sigma(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|_{\text{ms}}^2}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{2-2\alpha}}\,ds\\
&+\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^{\widetilde{t}} \Big(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(\widetilde{t}-s)^{1-\alpha}}\Big) b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\,ds\right\|^2\right)\\
&+\int_0^{\widetilde{t}} \Big(\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}} - \frac{1}{(\rho_n(\widetilde{t})-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\Big)^2 \|\sigma(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|_{\text{ms}}^2\,ds.
\end{aligned}$$

Nhờ bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]) và đánh giá $|\rho_n(t) - \tau_n(s)| \geq |t-s|$, chúng ta có

$$\frac{\Gamma^2(\alpha)}{4}\|X^{(n)}(t,\eta) - X^{(n)}(\widetilde{t},\eta)\|_{\text{ms}}^2$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & (t-\widetilde{t})\int_{\widetilde{t}}^{t}\frac{\|b(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|^2_{\rm ms}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds+\int_{\widetilde{t}}^{t}\frac{\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|^2_{\rm ms}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds\\
&+\widetilde{t}\int_0^{\widetilde{t}}\Big(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\,\widetilde{t}-s)^{1-\alpha}}\Big)^2\|b(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|^2_{\rm ms}\,ds\\
&+\int_0^{\widetilde{t}}\Big(\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\Big)^2\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|^2_{\rm ms}\,ds.
\end{aligned}$$

Do điều kiện tăng trưởng không quá tuyến tính (H5) và Bổ đề 3.2.3 dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma^2(\alpha)}{8K^2(1+C_1)}\|X^{(n)}(t,\eta)-X^{(n)}(\,\widetilde{t},\eta)\|^2_{\rm ms}\\
\leq\ & \int_{\widetilde{t}}^{t}\frac{t-\widetilde{t}+1}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds+\widetilde{t}\int_0^{\widetilde{t}}\Big(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\,\widetilde{t}-s)^{1-\alpha}}\Big)^2ds\\
&+\int_0^{\widetilde{t}}\Big(\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}\Big)^2ds.
\end{aligned}$$

Điều này cùng với hai bất đẳng thức

$$\Big(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\,\widetilde{t}-s)^{1-\alpha}}\Big)^2<\frac{1}{(\,\widetilde{t}-s)^{2-2\alpha}}-\frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}},$$

và

$$\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-\tau_n(s))^{2-2\alpha}}-\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{2-2\alpha}}\leq\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-s)^{2-2\alpha}}-\frac{1}{(\rho_n(t)-s)^{2-2\alpha}}$$

suy ra rằng

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma^2(\alpha)}{8K^2(1+C_1)}\|X^{(n)}(t,\eta)-X^{(n)}(\,\widetilde{t},\eta)\|^2_{\rm ms}\\
\leq\ & \int_{\widetilde{t}}^{t}\frac{t-\widetilde{t}+1}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds+\int_0^{\widetilde{t}}\left(\frac{\widetilde{t}}{(\,\widetilde{t}-s)^{2-2\alpha}}-\frac{\widetilde{t}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\right)ds\\
&+\int_0^{\widetilde{t}}\left(\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-s)^{2-2\alpha}}-\frac{1}{(\rho_n(t)-s)^{2-2\alpha}}\right)ds. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Bằng cách tính toán trực tiếp ta ước lượng được

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{t}}^{t}\frac{t-\widetilde{t}+1}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds+\int_0^{\widetilde{t}}\left(\frac{\widetilde{t}}{(\,\widetilde{t}-s)^{2-2\alpha}}-\frac{\widetilde{t}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\right)ds\\
=\ & -(t-\widetilde{t}+1)\frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\Big|_{\widetilde{t}}^{t}+\widetilde{t}\left(-\frac{(\,\widetilde{t}-s)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}+\frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right)\Big|_0^{\widetilde{t}}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \frac{(t+1)(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}. \tag{3.12}$$

Hơn nữa, ta cũng có

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\widetilde{t}} \left(\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-s)^{2-2\alpha}} - \frac{1}{(\rho_n(t)-s)^{2-2\alpha}} \right) ds \\
&= \left(-\frac{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-s)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{(\rho_n(t)-s)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \right)\Bigg|_0^{\widetilde{t}} \\
&\leq \frac{(\rho_n(t)-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1} - (\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Vì $0 < 2\alpha - 1 < 1$ và dùng bất đẳng thức $|x+y|^{2\alpha-1} \leq |x|^{2\alpha-1} + |y|^{2\alpha-1}$, chúng ta đạt được

$$\int_0^{\widetilde{t}} \left(\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-s)^{2-2\alpha}} - \frac{1}{(\rho_n(t)-s)^{2-2\alpha}} \right) ds \leq \frac{(\rho_n(t)-\rho_n(\,\widetilde{t}\,))^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.$$

Theo định nghĩa ρ_n, chúng ta cũng có $\rho_n(t) - \rho_n(\,\widetilde{t}\,) \leq t - \widetilde{t} + \frac{T}{n}$. Do đó,

$$\int_0^{\widetilde{t}} \left(\frac{1}{(\rho_n(\,\widetilde{t}\,)-s)^{2-2\alpha}} - \frac{1}{(\rho_n(t)-s)^{2-2\alpha}} \right) ds \leq \frac{(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1} + \frac{T^{2\alpha-1}}{n^{2\alpha-1}}}{2\alpha-1}.$$

Điều này cùng với (3.11) và (3.12) cho ta ước lượng

$$\|X^{(n)}(t,\eta) - X^{(n)}(\,\widetilde{t},\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \quad \leq \quad \frac{8K^2(1+C_1)}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\frac{(T+2)(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)n^{2\alpha-1}} \right).$$

Bổ đề được chứng minh xong. □

Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày chi tiết chứng minh Định lý 3.2.1.

Chứng minh Định lý 3.2.1. Chọn và cố định $\eta \in \mathfrak{X}_0$. Theo công thức nghiệm dạng tích phân (3.3) và lược đồ số kiểu Euler-Maruyama (3.4) cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên (3.2), ta có

$$\begin{aligned}
&X^{(n)}(t,\eta) - X(t,\eta) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta)) - b(s, X(s,\eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\sigma(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s),\eta)) - \sigma(s, X(s,\eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, dW_s
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left(\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}-\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}\right)\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\,dW_s.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\|x+y+z\|^2 \le 3(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2)$ với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}^d$, bất đẳng thức Hölder (xem [37, tr. 5]) và tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), chúng ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma^2(\alpha)}{3}\|X^{(n)}(t,\eta)-X(t,\eta)\|^2_{\mathrm{ms}}\\
&\le t\int_0^t \frac{\|b(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))-b(s,X(s,\eta))\|^2_{\mathrm{ms}}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds\\
&+\int_0^t \frac{\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))-\sigma(s,X(s,\eta))\|^2_{\mathrm{ms}}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds\\
&+\int_0^t \left(\frac{\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|_{\mathrm{ms}}}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}-\frac{\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|_{\mathrm{ms}}}{(t-s)^{1-\alpha}}\right)^2 ds. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Hơn nữa, nhờ các điều kiện (H3) và (H4) ta dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned}
&\|b(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))-b(s,X(s,\eta))\|^2_{\mathrm{ms}}\\
\le\;& 2L^2\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta)-X(s,\eta)\|^2_{\mathrm{ms}}+2L_1^2|\tau_n(s)-s|^{2\beta}, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))-\sigma(s,X(s,\eta))\|^2_{\mathrm{ms}}\\
\le\;& 2L^2\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta)-X(s,\eta)\|^2_{\mathrm{ms}}+2L_2^2|\tau_n(s)-s|^{2\gamma}. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Bằng cách sử dụng điều kiện (H5), Bổ đề 3.2.3 và bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}-\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}\right)^2 &\le \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}}-\frac{1}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{2-2\alpha}}\\
&\le \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}}-\frac{1}{(\frac{2T}{n}+t-s)^{2-2\alpha}},
\end{aligned}$$

ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\frac{\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|_{\mathrm{ms}}}{(\rho_n(t)-\tau_n(s))^{1-\alpha}}-\frac{\|\sigma(\tau_n(s),X^{(n)}(\tau_n(s),\eta))\|_{\mathrm{ms}}}{(t-s)^{1-\alpha}}\right)^2 ds\\
\le\;& 2K^2(1+C_1)\int_0^t \left(\frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}}-\frac{1}{(\frac{2T}{n}+t-s)^{2-2\alpha}}\right) ds
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2K^2(1+C_1)(2T)^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)} \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

Ước lượng này cùng với (3.13), (3.14) và (3.15) dẫn tới đánh giá sau

$$\begin{aligned}
&\|X^{(n)}(t,\eta) - X(t,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \\
\leq\ & \frac{6L^2(t+1)}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta) - X(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} ds \\
&+ \frac{6L_1^2 t}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{|\tau_n(s)-s|^{2\beta}}{(t-s)^{2-2\alpha}} ds + \frac{6L_2^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{|\tau_n(s)-s|^{2\gamma}}{(t-s)^{2-2\alpha}} ds \\
&+ \frac{6K^2(1+C_1)(2T)^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \frac{1}{n^{2\alpha-1}}. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Theo định nghĩa τ_n, ta có $|\tau_n(s) - s| \leq \frac{T}{n}$ với $s \in [0,T]$. Do đó, bằng cách tính toán trực tiếp ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\frac{6L_1^2 t}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{|\tau_n(s)-s|^{2\beta}}{(t-s)^{2-2\alpha}} ds + \frac{6L_2^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{|\tau_n(s)-s|^{2\gamma}}{(t-s)^{2-2\alpha}} ds \\
\leq\ & \frac{6L_1^2 T^{2\alpha+2\beta}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \frac{1}{n^{2\beta}} + \frac{6L_2^2 T^{2\alpha+2\gamma-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \frac{1}{n^{2\gamma}}. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Mặt khác, nhờ Bổ đề 3.2.4 dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta) - X(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \\
\leq\ & 2\|X^{(n)}(\tau_n(s),\eta) - X^{(n)}(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 + 2\|X^{(n)}(s,\eta) - X(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \\
\leq\ & \frac{2C_2}{n^{2\alpha-1}} + 2C_3|\tau_n(s)-s|^{2\alpha-1} + 2\|X^{(n)}(s,\eta) - X(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \\
\leq\ & \frac{2C_2 + 2T^{2\alpha-1}C_3}{n^{2\alpha-1}} + 2\|X^{(n)}(s,\eta) - X(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2,
\end{aligned}$$

ở đây C_2 và C_3 được định nghĩa trong (3.10). Điều này cùng với (3.16) và (3.17) chỉ ra rằng

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq s\leq t} \|X^{(n)}(s,\eta) - X(s,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2 \\
\leq\ & \frac{12L^2(T+1)}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \frac{\sup_{0\leq r\leq s} \|X^{(n)}(r,\eta) - X(r,\eta)\|_{\mathrm{ms}}^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} ds \\
&+ D_1 \frac{1}{n^{2\beta}} + D_2 \frac{1}{n^{2\gamma}} + D_3 \frac{1}{n^{2\alpha-1}},
\end{aligned}$$

ở đây $D_1 := \frac{6L_1^2 T^{2\alpha+2\beta}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}$, $D_2 := \frac{6L_2^2 T^{2\alpha+2\gamma-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}$ và

$$D_3 := \frac{6K^2(1+C_1)(2T)^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} + (2C_2 + 2T^{2\alpha-1}C_3)\frac{6L^2(T+1)}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho phương trình vi phân phân thứ (xem [24, Bổ đề 7.1.1] hoặc [58, Hệ quả 2]) ta đạt được

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T} \|X^{(n)}(t,\eta) - X(t,\eta)\|_{\text{ms}}^2 \\ \le\ & \left(\frac{D_1}{n^{2\beta}} + \frac{D_2}{n^{2\gamma}} + \frac{D_3}{n^{2\alpha-1}}\right) E_{2\alpha-1}\left(\frac{12L^2(T+1)T^{2\alpha-1}\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma^2(\alpha)}\right).\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức (3.19) đúng với

$$C := (D_1 + D_2 + D_3)E_{2\alpha-1}\left(\frac{12L^2(T+1)T^{2\alpha-1}\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma^2(\alpha)}\right).$$

Chứng minh Định lý 3.2.1 được hoàn thành. □

Kết quả chính của chương này có thể được mở rộng cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tổng quát hơn với hệ số σ nhận giá trị véc tơ. Cụ thể, xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0,T]$ có dạng

$$^{C}D_{0+}^{\alpha}X(t) = b(t, X(t)) + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(t, X(t))\,\frac{dW_t^i}{dt}, \tag{3.18}$$

ở đây b và $\sigma_i, i = 1, \dots N$, là đo được và thỏa mãn các giả thiết (H3) và (H4) với cùng các hằng số β, γ. Dạng tích phân tương ứng của phương trình (3.18) với điều kiện giá trị ban đầu $X(0) = \eta \in \mathfrak{X}_0$ là

$$X(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{b(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \frac{\sigma_i(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\,dW_s^i.$$

Bây giờ, chúng tôi áp dụng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama (3.4) trong Mục 3.1 cho phương trình này như sau:

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, nghiệm xấp xỉ $X^{(n)}(\cdot, \eta)$ được xác định bởi $X^{(n)}(0,\eta) := \eta$ và với $t \in (0, T]$ ta đặt

$$X^{(n)}(t,\eta) := \eta \ + \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{b(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s), \eta))}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds$$

$$+ \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\sigma_i(\tau_n(s), X^{(n)}(\tau_n(s), \eta))}{(\rho_n(t) - \tau_n(s))^{1-\alpha}} \, dW_s^i,$$

ở đây $\tau_n(s) = \frac{kT}{n} =: \tau_k^{(n)}$ và $\rho_n(s) = \frac{(k+1)T}{n} =: \rho_k^{(n)}$ với $s \in (\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}]$. Bằng kỹ thuật chứng minh tương tự Định lý 3.2.1, chúng tôi thu được kết quả sau đây.

Định lý 3.2.5. *Giả sử b và $\sigma_i, i = 1, \ldots N$, là các hàm đo được và thỏa mãn các giả thiết* (H3) *và* (H4). *Khi đó, tồn tại một hằng số C không phụ thuộc vào n sao cho*

$$\sup_{0 \le t \le T} \|X^{(n)}(t, \eta) - X(t, \eta)\|_{\text{ms}}^2 \le \frac{C}{n^{2\kappa}}, \tag{3.19}$$

ở đây $\kappa := \min\left\{\beta, \gamma, \alpha - \frac{1}{2}\right\}$.

3.2.2 Ví dụ

Trong mục này, chúng tôi sẽ nghiên cứu một số ví dụ minh họa cho kết quả lý thuyết đã đưa ra ở trên. Trước tiên, chúng tôi nghiên cứu phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên đơn giản với nhiễu cộng tính. Đối với phương trình này, chúng tôi có công thức hiển của nghiệm và nghiệm số bằng cách dùng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama đã giới thiệu ở Phần 3.1. Khi đó bằng cách tính toán trực tiếp tích phân chúng tôi đạt được tốc độ hội tụ là $\alpha - \frac{1}{2}$ (xem Ví dụ 3.2.6). Mặt khác, theo đánh giá tốc độ hội tụ trong Định lý 3.2.1 ở Phần 3.2 ta có tốc độ hội tụ trong trường hợp này là $\alpha - \frac{1}{2}$. Do đó, chúng tôi có thể khẳng định tốc độ hội tụ trong nghiên cứu lý thuyết đối với ví dụ này là tối ưu. Lưu ý rằng đối với phương trình vi phân ngẫu nhiên với nhiễu cộng tính thì tốc độ hội tụ của lược đồ Euler-Maruyama có thể bằng 1 (xem [39]). Vì vậy, tốc độ hội tụ mà chúng tôi tìm ra trong Ví dụ 3.2.6 dưới đây là một khía cạnh mới trong tính toán số của phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên.

Ví dụ 3.2.6. *Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, 1]$ có dạng*

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} X(t) = 1 \, \frac{dW_t}{dt}.$$

	$\alpha = 0.75$		$\alpha = 0.6$		$\alpha = 0.9$	
	e_n	tốc độ	e_n	tốc độ	e_n	tốc độ
$n = 1024$	0.0072	0.25	0.3032	0.1	1.03 e-04	0.4
$n = 2048$	0.0051	0.25	0.2639	0.1	0.59 e-04	0.4
$n = 4096$	0.0036	0.25	0.2297	0.1	0.34 e-04	0.4
tốc độ hội tụ lý thuyết	$\alpha - \frac{1}{2} = 0.25$		$\alpha - \frac{1}{2} = 0.1$		$\alpha - \frac{1}{2} = 0.4$	

Bảng 3.1: Tốc độ hội tụ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên tuyến tính một chiều

Khi đó, nghiệm chính xác của phương trình này với điều kiện ban đầu $X(0) = 0$ *được cho bởi công thức*

$$X(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{(1-s)^{1-\alpha}} \, dW_s.$$

Đồng thời, bằng cách dùng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama (3.4) *cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên ta có nghiệm số* $X^{(n)}(1)$ *được xác định bởi công thức*

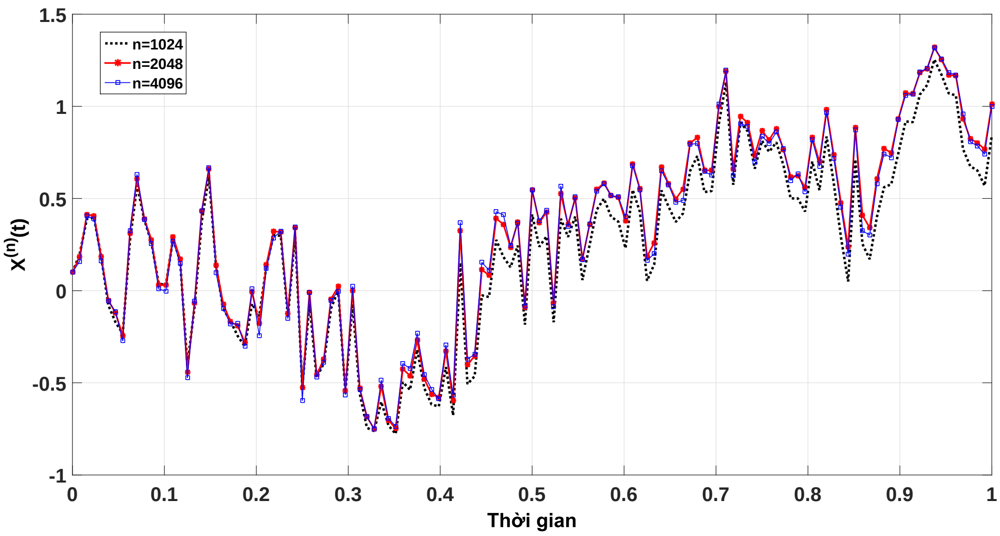
$$X^{(n)}(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{(1-\tau_n(s))^{1-\alpha}} \, dW_s.$$

Áp dụng tính chất đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta đạt được

$$\|X(1) - X^{(n)}(1)\|_{\mathrm{ms}}^2 = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{1}{(1-s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1-\tau_n(s))^{1-\alpha}} \right)^2 ds.$$

Bằng cách đặt $e_n = \|X(1) - X^{(n)}(1)\|_{\mathrm{ms}}^2$, *tốc độ hội tụ của lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình này sẽ được ước lượng bởi đại lượng* $\log_2 \frac{\sqrt{e_n}}{\sqrt{e_{2n}}}$ *với các giá trị n đủ lớn. Các kết quả tính toán được thể hiện trong Bảng 3.1 nói lên rằng tốc độ hội tụ là* $\alpha - \frac{1}{2}$ *với các giá trị khác nhau của* α, *tức là* $\sqrt{e_n} \sim n^{\alpha - \frac{1}{2}}$ *khi* $n \to \infty$.

Tiếp theo, để trực quan sự hội tụ của lược đồ Euler-Maruyama (3.4), chúng tôi xét ví dụ sau.



Hình 3.1: Mô phỏng nghiệm xấp xỉ của phương trình (3.20)

Ví dụ 3.2.7. *Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều bậc* $\alpha = \frac{3}{4}$ *trên đoạn* $[0, 1]$ *có dạng*

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = \cos(X(t)) + \sin(X(t))\frac{dW_t}{dt}. \tag{3.20}$$

Dễ thấy các hệ số của phương trình (3.20) *thỏa mãn các điều kiện* (H3) *và* (H4) *của Định lý 3.2.1. Do đó, chúng ta có thể xây dựng được lược đồ Euler-Maruyama* (3.4) *cho phương trình này.*

Quá trình tính mô phỏng nghiệm xấp xỉ $X^{(n)}(t)$ *được thực hiện như sau: Trước tiên, chúng tôi sinh ngẫu nhiên một chuyển động Brown. Sau đó, chúng tôi dùng lược đồ Euler-Maruyama* (3.4) *để tính xấp xỉ nghiệm với* $n, 2n, 4n$ *điểm chia với* $n = 1024$*. Kết quả của quá trình này được thể hiện trong Hình 3.1.*

Từ kết quả trên, về mặt trực quan ta thấy lược đồ Euler-Maruyama (3.4) *cho phương trình* (3.20) *là hội tụ.*

3.3 Lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính

3.3.1 Lược đồ Euler-Maruyama mũ

Xét phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính bậc $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$^{C}D^{\alpha}_{0+}X(t) = \lambda X(t) + \mu X(t)\,\frac{dW_t}{dt}, \tag{3.21}$$

với $T > 0$ bất kỳ và $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ là chuyển động Brown một chiều tiêu chuẩn trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ được trang bị bộ lọc $F := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Bài toán xác định λ, μ sao cho phương trình (3.21) ổn định tiệm cận là không tầm thường vì phương trình này không có công thức nghiệm hiển. Gần đây, vấn đề này đã được nghiên cứu trong [54, Mệnh đề 11]. Ở công trình này, tác giả bài báo đã chỉ ra rằng phương trình (3.21) ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu

$$\lambda < 0 \quad \text{và} \quad \mu^2 \int_0^\infty s^{2\alpha-2}\left(E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha)\right)^2\, ds < 1. \tag{3.22}$$

Công cụ chính để chứng minh kết quả trên là sử dụng công thức biến thiên hằng số được đưa ra trong Định lý 2.4.1, tức là dạng tích phân của phương trình (3.21) được cho bởi

$$X(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)X(0) + \mu \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)X(s)\,dW_s. \tag{3.23}$$

Dựa trên lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân ngẫu nhiên, chúng tôi xây dựng lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình (3.21) như sau: với bước chia $h > 0$ cố định, *lược đồ Euler-Maruyama mũ* cho phương trình tích phân trên được xác định bởi $\widehat{X}_h(0) := X(0) \in \mathfrak{X}_0$ và với $t \in (0, T]$ ta đặt

$$\widehat{X}_h(t) := E_\alpha(\lambda t^\alpha)X(0) + \mu \int_0^t (t-\tau_h(s))^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)\widehat{X}_h(\tau_h(s))\,dW_s, \tag{3.24}$$

ở đây $\tau_h : (0, \infty) \to [0, \infty)$ được định nghĩa bởi

$$\tau_h(s) = kh \qquad \text{với } s \in (kh, (k+1)h], k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.25}$$

3.3.2 Tốc độ hội tụ và sự ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ

Trong mục này chúng tôi quan tâm đến tốc độ hội tụ và sự ổn định của phương pháp số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính (3.21). Nếu như phương trình vi phân ngẫu nhiên một chiều tuyến tính có nghiệm hiển thì phương trình (3.21) lại không có nghiệm hiển. Vì vậy, sẽ rất khó để đạt được kết quả tương tự như trong [47] về tính ổn định của phương pháp số cho phương trình (3.21).

Định lý dưới đây khẳng định kết quả về tốc độ hội tụ và sự ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ ở trên cho phương trình (3.21).

Định lý 3.3.1. (**Tốc độ hội tụ và sự ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ**). *(i) Với $T > 0$ bất kỳ, tồn tại hằng số C chỉ phụ thuộc vào T, λ và μ sao cho*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\widehat{X}_h(t) - X(t)\|_{\mathrm{ms}} \leq Ch^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

(ii) Giả sử điều kiện (3.22) *đúng. Với bước chia $h > 0$ bất kỳ, tồn tại $K > 0$ sao cho nghiệm $\widehat{X}_h$ của phương trình* (3.24) *thỏa mãn*

$$\|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}} \leq K\|X(0)\|_{\mathrm{ms}} \qquad \text{với mọi } t \geq 0$$

và hơn nữa với $\delta \in (0, \alpha)$ bất kỳ, ta có $\lim_{t\to\infty} t^\delta \|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}} = 0$. Từ đó suy ra nghiệm số vẫn ổn định tiệm cận.

Trước khi chứng minh Định lý 3.3.1, chúng tôi cần bốn bổ đề chuẩn bị. Bổ đề 3.3.2 và Bổ đề 3.3.3 được dùng trong chứng minh phần (i) của Định lý 3.3.1 và không cần đặt điều kiện lên λ, μ. Trong khi đó, Bổ đề 3.3.4 và Bổ đề 3.3.5 là để chuẩn bị cho chứng minh phần (ii) Định lý 3.3.1 và do đó chúng tôi cần giả thiết λ, μ thỏa mãn điều kiện (3.22).

Trước tiên, chúng tôi đưa ra một cận trên cho $\sup_{0\leq t\leq T} \|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}}$ trong Bổ đề 3.3.2 sau đây.

Bổ đề 3.3.2. *Đặt* $M_1 := \max_{0\le t\le T}(E_\alpha(\lambda t^\alpha))^2, M_2 := \max_{0\le t\le T}(E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha))^2$ *và*

$$C_4 := M_1 E_{2\alpha-1}\left(\mu^2 M_2 \Gamma(2\alpha-1)T^{2\alpha-1}\right)\|X(0)\|^2_{\text{ms}}. \tag{3.26}$$

Khi đó, với mọi $h>0$ *ta có*

$$\sup_{0\le t\le T}\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}} \le C_4.$$

Chứng minh. Chúng tôi sẽ chứng minh bổ đề này qua hai bước.

Bước 1: Bằng phương pháp chứng minh tương tự bước 1 trong Bổ đề 3.2.3 chúng tôi chứng minh được

$$\sup_{0\le t\le \frac{kT}{n}}\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}} < \infty, k=0,1,...,n. \tag{3.27}$$

Bước 2: Chứng minh

$$\sup_{0\le t\le T}\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}} \le C_4.$$

Nhờ (3.24), ta đạt được

$$(\widehat{X}_h(t))^2 = \left((E_\alpha(\lambda t^\alpha))\,X(0) + \mu\int_0^t \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\widehat{X}_h(\tau_h(s))\,dW_s\right)^2.$$

Lấy kỳ vọng hai vế của đẳng thức trên và dùng tính chất đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9) dẫn đến

$$\begin{aligned}\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}} &= (E_\alpha(\lambda t^\alpha))^2\,\|X(0)\|^2_{\text{ms}}\\ &\quad+\mu^2\int_0^t \frac{\left(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)\right)^2}{(t-\tau_h(s))^{2-2\alpha}}\|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}\,ds.\end{aligned}$$

Vì $\tau_h(s)\le s$ và hàm $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}_-$ (xem [50]), ta suy ra

$$\begin{aligned}\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}} &\le (E_\alpha(\lambda t^\alpha))^2\,\|X(0)\|^2_{\text{ms}}\\ &\quad+\mu^2\int_0^t \frac{\left(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\right)^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}\,ds\\ &\le M_1\|X(0)\|^2_{\text{ms}} + \mu^2 M_2\int_0^t \frac{\sup_{0\le r\le s}\|\widehat{X}_h(r)\|^2_{\text{ms}}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds.\end{aligned}$$

Đặt $m_t := \sup_{0\le s\le t}\|\widehat{X}_h(s)\|^2_{\text{ms}}$. Khi đó, ta có $m_t<\infty$ và

$$m_t \le M_1\|X(0)\|^2_{\text{ms}} + \mu^2 M_2\int_0^t \frac{m_s}{(t-s)^{2-2\alpha}}\,ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho phương trình vi phân phân thứ (xem [24, Bổ đề 7.1.1] hoặc [58, Hệ quả 2]) ta đạt được

$$m_t \le M_1\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2 E_{2\alpha-1}\left(\mu^2 M_2\Gamma(2\alpha-1)t^{2\alpha-1}\right).$$

Bổ đề được chứng minh. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập một cận trên cho $\|\widehat{X}_h(t)-\widehat{X}_h(\,\widetilde{t}\,)\|_{\mathrm{ms}}^2$ qua $|t-\widetilde{t}\,|^{2\alpha-1}$.

Bổ đề 3.3.3. *Đặt*

$$M_3 := \left(\max_{x\in[0,T^\alpha]}\partial_x E_\alpha(\lambda x)\right)^2, M_4 := \left(\max_{x\in[0,T^\alpha]}\partial_x E_{\alpha,\alpha}(\lambda x)\right)^2$$

và

$$C_5 := 4M_3T\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2 + \frac{8\mu^2M_2C_4+4\mu^2M_4C_4T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, \tag{3.28}$$

ở đây C_4 được cho trong (3.26)*. Khi đó, với mọi $h>0$ và $t,\widetilde{t}\in[0,T]$ ta có*

$$\|\widehat{X}_h(t)-\widehat{X}_h(\,\widetilde{t}\,)\|_{\mathrm{ms}}^2 \le C_5|t-\widetilde{t}\,|^{2\alpha-1}.$$

Chứng minh. Chọn và cố định $t,\widetilde{t}\in[0,T]$ với $t>\widetilde{t}$. Nhờ (3.24), ta có

$$\begin{aligned}
&\widehat{X}_h(t)-\widehat{X}_h(\,\widetilde{t}\,)\\
=\ &(E_\alpha(\lambda t^\alpha)-E_\alpha(\lambda(\,\widetilde{t}\,)^\alpha))X(0)+\mu\int_{\widetilde{t}}^t \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\widehat{X}_h(\tau_h(s))\,dW_s\\
&+\mu\int_0^{\widetilde{t}}\Big(\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}}-\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)}{(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\Big)\widehat{X}_h(\tau_h(s))\,dW_s\\
&+\mu\int_0^{\widetilde{t}}\Big(\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)}{(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{1-\alpha}}-\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^\alpha)}{(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\Big)\widehat{X}_h(\tau_h(s))\,dW_s.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\|x+y+z+w\|^2 \le 4(\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\|w\|^2)$ với mọi $x,y,z,w\in\mathbb{R}^d$ và tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{X}_h(t)-\widehat{X}_h(\,\widetilde{t}\,)\|_{\mathrm{ms}}^2\\
\le\ &4|E_\alpha(\lambda t^\alpha)-E_\alpha(\lambda\widetilde{t}^\alpha)|^2\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2
\end{aligned}$$

$$+4\mu^2 \int_{\widetilde{t}}^{t} \frac{\Big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^{\alpha})\Big)^2}{(t-\tau_h(s))^{2-2\alpha}} \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|_{\text{ms}}^2\, ds$$

$$+4\mu^2 \int_0^{\widetilde{t}} \Big(\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^{\alpha})}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}} - \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^{\alpha})}{(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\Big)^2 \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|_{\text{ms}}^2\, ds$$

$$+4\mu^2 \int_0^{\widetilde{t}} \Big(\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^{\alpha})}{(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{1-\alpha}} - \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{\alpha})}{(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\Big)^2 \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|_{\text{ms}}^2\, ds.$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình, Bổ đề 3.3.2 và ước lượng

$$\Big(\frac{1}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}} - \frac{1}{(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\Big)^2 \le \frac{1}{(\,\widetilde{t}-s)^{2-2\alpha}} - \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}},$$

chúng ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{X}_h(t)-\widehat{X}_h(\,\widetilde{t}\,)\|_{\text{ms}}^2\\
\le\ & 4M_3|t^{\alpha}-(\,\widetilde{t}\,)^{\alpha}|^2\|X(0)\|_{\text{ms}}^2 + \int_{\widetilde{t}}^{t} \frac{4\mu^2 M_2 C_4}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds\\
&+4\mu^2 M_2 C_4 \int_0^{\widetilde{t}} \Big(\frac{1}{(\,\widetilde{t}-s)^{2-2\alpha}} - \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}}\Big)\, ds\\
&+4\mu^2 C_4 \int_0^{\widetilde{t}} \frac{M_4\Big((t-\tau_h(s))^{\alpha}-(\,\widetilde{t}-\tau_h(s))^{\alpha}\Big)^2}{(\,\widetilde{t}-s)^{2-2\alpha}}\, ds.
\end{aligned}$$

Vì $0<\alpha<1$ nên $|x+y|^{\alpha} \le |x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}$ với mọi $x, y > 0$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{X}_h(t)-\widehat{X}_h(\,\widetilde{t}\,)\|_{\text{ms}}^2\\
\le\ & 4M_3(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha}\|X(0)\|_{\text{ms}}^2 + \frac{4\mu^2 M_2 C_4}{2\alpha-1}(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1}\\
&+\frac{4\mu^2 M_2 C_4}{2\alpha-1}(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1} + \frac{4\mu^2 M_4 C_4(\,\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha}\\
\le\ & \Big(4M_3 T\|X(0)\|_{\text{ms}}^2 + \frac{8\mu^2 M_2 C_4 + 4\mu^2 M_4 C_4 T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\Big)(t-\widetilde{t}\,)^{2\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh xong. □

Để chứng minh Định lý 3.3.1(ii), chúng tôi nhắc lại kết quả sau đây cho hàm Mittag-Leffler.

Bổ đề 3.3.4. *Giả sử* $\lambda > 0$. *Khi đó, tồn tại* $M(\lambda, \alpha)$ *phụ thuộc vào* λ *và* α *sao cho*

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) \le \frac{M(\lambda,\alpha)}{\max\{1, t^\alpha\}}, \quad E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \le \frac{M(\lambda,\alpha)}{\max\{1, t^{2\alpha}\}} \qquad \text{với mọi } t \ge 0. \tag{3.29}$$

Chứng minh. Xem [44, Định lý 1.4] hoặc [16, Định lý 2]. □

Tiếp theo chúng tôi cần bổ đề bổ trợ sau đây.

Bổ đề 3.3.5. *Giả sử* $\mu^2 \int_0^\infty \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha))^2}{s^{2-2\alpha}}\, ds < 1$. *Đặt* $\delta \in (0, \alpha)$ *bất kỳ. Khi đó, ta có*

$$\limsup_{t\to\infty} \mu^2 \int_0^t \frac{\big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\big)^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t^{2\delta}\}}{\max\{1, s^{2\delta}\}}\, ds < 1.$$

Chứng minh. Vì $\mu^2 \int_0^\infty \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha))^2}{s^{2-2\alpha}}\, ds < 1$ nên tồn tại $\eta \in (0,1)$ sao cho

$$\frac{\mu^2}{\eta^{2\delta}} \int_0^\infty \frac{\big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha)\big)^2}{s^{2-2\alpha}}\, ds < 1.$$

Chọn và cố định một η thỏa mãn bất đẳng thức ở trên. Khi đó,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \mu^2 \int_{\eta t}^t \frac{\big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\big)^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t^{2\delta}\}}{\max\{1, s^{2\delta}\}}\, ds \\
\le\ & \limsup_{t\to\infty} \frac{\mu^2}{\eta^{2\delta}} \int_{\eta t}^t \frac{\big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\big)^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds \\
<\ & \frac{\mu^2}{\eta^{2\delta}} \int_0^\infty \frac{\big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda u^\alpha)\big)^2}{u^{2-2\alpha}}\, ds < 1.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Mặt khác, nhờ Bổ đề 3.3.4 ta suy ra

$$\int_0^{\eta t} \frac{\big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\big)^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t^{2\delta}\}}{\max\{1, s^{2\delta}\}}\, ds \le M(\alpha,\lambda)^2 \int_0^{\eta t} \frac{\max\{1, t^{2\delta}\}}{(t-s)^{2+2\alpha}}\, ds.$$

Bằng cách ước lượng trực tiếp ta đạt được

$$\limsup_{t\to\infty} t^{2\delta} \int_0^{\eta t} \frac{1}{(t-s)^{2+2\alpha}}\, ds \le \limsup_{t\to\infty} t^{2\delta} \frac{\eta t}{(t-\eta t)^{2+2\alpha}} = 0.$$

Điều này dẫn đến

$$\limsup_{t\to\infty} \int_0^{\eta t} \frac{\big(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\big)^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t^{2\delta}\}}{\max\{1, s^{2\delta}\}}\, ds = 0.$$

Kết hợp kết quả này với (3.30) ta có điều phải chứng minh. □

Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày chi tiết chứng minh Định lý 3.3.1.

Chứng minh Định lý 3.3.1. (i) Nhờ (3.23) và (3.24) ta có

$$\begin{aligned}
&\widehat{X}_h(t) - X(t)\\
=\ & \mu\int_0^t \Big(\frac{1}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big) E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)\widehat{X}_h(\tau_h(s))\, dW_s\\
&+\mu\int_0^t \Big(\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)}{(t-s)^{1-\alpha}} - \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big)\widehat{X}_h(\tau_h(s))\, dW_s\\
&+\mu\int_0^t \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)}{(t-s)^{1-\alpha}}(\widehat{X}_h(\tau_h(s)) - X(s))\, dW_s.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\|x+y+z\|^2 \leq 3(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2)$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ và tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{X}_h(t) - X(t)\|^2_{\text{ms}}\\
\leq\ & 3\mu^2\int_0^t \Big(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\Big)^2 |E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)|^2 \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}\, ds\\
&+3\mu^2\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}}\Big|E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha) - E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\Big|^2 \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}\, ds\\
&+3\mu^2\int_0^t \frac{|E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)|^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\|\widehat{X}_h(\tau_h(s)) - X(s)\|^2_{\text{ms}}\, ds.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, do $t - \tau_n(s) \leq t + h - s$ và bất đẳng thức

$$\Big(\frac{1}{(t-\tau_n(s))^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big)^2 \leq \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}} - \frac{1}{(t-\tau_n(s))^{2-2\alpha}},$$

ta suy ra

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Big(\frac{1}{(t-\tau_n(s))^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big)^2 ds &\leq \int_0^t \Big(\frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}} - \frac{1}{(h+t-s)^{2-2\alpha}}\Big) ds\\
&\leq \frac{h^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$3\mu^2\int_0^t \Big(\frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-\tau_h(s))^{1-\alpha}}\Big)^2 |E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha)|^2 \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}\, ds$$

$$\leq \frac{3\mu^2 M_2 C_4}{2\alpha - 1} h^{2\alpha-1}. \tag{3.31}$$

Áp dụng Định lý giá trị trung bình và Bổ đề 3.3.2 dẫn đến

$$\begin{aligned}
& 3\mu^2 \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2-2\alpha}} \Big| E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha) - E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha) \Big|^2 \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\mathrm{ms}}\, ds \\
\leq\ & 3\mu^2 M_4 C_4 \int_0^t \frac{|(t-\tau_h(s))^\alpha - (t-s)^\alpha|^2}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds \\
\leq\ & 3\mu^2 M_4 C_4 \int_0^t \frac{|s-\tau_h(s)|^{2\alpha}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds \leq \frac{3\mu^2 M_4 C_4 T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} h^{2\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Hơn nữa, nhờ Bổ đề 3.3.3

$$\begin{aligned}
\|\widehat{X}_h(\tau_h(s)) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}} &\leq 2\|\widehat{X}_h(\tau_h(s)) - \widehat{X}_h(s)\|^2_{\mathrm{ms}} + 2\|\widehat{X}_h(s) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}} \\
&\leq 2C_5|\tau_h(s) - s|^{2\alpha-1} + 2\|\widehat{X}_h(s) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}} \\
&\leq 2C_5 h^{2\alpha-1} + 2\|\widehat{X}_h(s) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}}.
\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}
& 3\mu^2 \int_0^t \frac{|E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)|^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \|\widehat{X}_h(\tau_h(s)) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}}\, ds \\
\leq\ & 3\mu^2 M_2 \left(\int_0^t \frac{2C_5 h^{2\alpha-1}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds + \int_0^t \frac{2\|\widehat{X}_h(s) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds \right) \\
\leq\ & \frac{3\mu^2 M_2 C_5 T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} h^{2\alpha-1} + 6\mu^2 M_2 \int_0^t \frac{\|\widehat{X}_h(s) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds.
\end{aligned}$$

Điều này cùng với (3.31) và (3.32) suy ra rằng

$$\begin{aligned}
\|\widehat{X}_h(t) - X(t)\|^2_{\mathrm{ms}} \leq\ & \left(\frac{3\mu^2 M_2 C_4}{2\alpha-1} + \frac{3\mu^2 M_4 C_4 T^{2\alpha-1} h}{2\alpha-1} + \frac{3\mu^2 M_2 C_5 T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \right) \\
& \times h^{2\alpha-1} + 6\mu^2 M_2 \int_0^t \frac{\|\widehat{X}_h(s) - X(s)\|^2_{\mathrm{ms}}}{(t-s)^{2-2\alpha}}\, ds.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho phương trình vi phân phân thứ (xem [24, Bổ đề 7.1.1] hoặc [58, Hệ quả 2]) ta đạt được

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\widehat{X}_h(t) - X(t)\|^2_{\mathrm{ms}} \leq C h^{2\alpha-1},$$

ở đây

$$C := \left(\frac{3\mu^2 M_2 C_4}{2\alpha-1} + \frac{3\mu^2 M_4 C_4 T^{2\alpha}}{2\alpha-1} + \frac{3\mu^2 M_2 C_5 T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right) E_{2\alpha-1}(6\mu^2 M_2 \Gamma(2\alpha-1) T^{2\alpha-1}).$$

Do đó (i) được chứng minh.

(ii) Nhờ (3.24) và tính đẳng cự Itô (xem Định lý 1.1.9), ta đạt được

$$\begin{aligned}\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}} &= (E_\alpha(\lambda t^\alpha))^2 \|X(0)\|^2_{\text{ms}} \\ &+\mu^2 \int_0^t \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau_h(s))^\alpha))^2}{(t-\tau_h(s))^{2-2\alpha}} \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}\, ds.\end{aligned}$$

Vì $\tau_h(s) \le s$ và hàm $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}_-$ (xem [50]), ta suy ra

$$\begin{aligned}\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}} &\le (E_\alpha(\lambda t^\alpha))^2 \|X(0)\|^2_{\text{ms}} \\ &+\mu^2 \int_0^t \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha))^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}\, ds.\end{aligned}$$

Nhờ Bổ đề 3.3.4 nên tồn tại $M(\alpha,\lambda) > 0$ sao cho với mọi $X(0) \neq 0$

$$\frac{\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}}}{\|X(0)\|^2_{\text{ms}}} \le \frac{M(\alpha,\lambda)}{\max\{1, t^{2\alpha}\}} + \mu^2 \int_0^t \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha))^2}{(t-s)^{2-2\alpha}} \frac{\|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|^2_{\text{ms}}}{\|X(0)\|^2_{\text{ms}}}\, ds. \tag{3.33}$$

Đặt

$$K := \frac{M(\alpha,\lambda)}{1-\mu^2 \int_0^\infty \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha))^2}{s^{2-2\alpha}}\, ds}. \tag{3.34}$$

Do (3.22) nên ta có $K > 0$. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp chứng minh phản chứng

$$\sup_{t\ge 0} \frac{\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}}}{\|X(0)\|^2_{\text{ms}}} < K,$$

tức là, tồn tại $T > 0$ là thời điểm đầu tiên thỏa mãn $\frac{\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}}}{\|X(0)\|^2_{\text{ms}}} \ge K$. Vì vậy, ta có

$$\frac{\|\widehat{X}_h(T)\|^2_{\text{ms}}}{\|X(0)\|^2_{\text{ms}}} = K, \quad \frac{\|\widehat{X}_h(t)\|^2_{\text{ms}}}{\|X(0)\|^2_{\text{ms}}} < K \quad \text{với } t \in [0,T). \tag{3.35}$$

Trong (3.33), thay $t = T$ ta được

$$\begin{aligned}K &\le M(\alpha,\lambda) + \mu^2 K \int_0^T \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(T-s)^\alpha))^2}{(T-s)^{2-2\alpha}}\, ds \\ &< M(\alpha,\lambda) + \mu^2 K \int_0^\infty \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda u^\alpha))^2}{u^{2-2\alpha}}\, du.\end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của K trong đẳng thức (3.34).

Lấy $\delta \in (0, \alpha)$ bất kỳ và do đó để hoàn thành chứng minh ta cần chỉ ra rằng $\lim_{t\to\infty} t^{\delta} \|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}} = 0$. Thực tế nếu ta chọn và cố định $\widehat{\delta} \in (\delta, \alpha)$ bất kỳ thì điều này tương đương với

$$\limsup_{t\to\infty} t^{2\widehat{\delta}} \frac{\|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}}^2}{\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2} < \infty. \tag{3.36}$$

Giả sử (3.36) sai. Khi đó, tồn tại một dãy tăng $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ tới ∞ sao cho $\gamma_n := \max\{1, t_n^{2\widehat{\delta}}\} \frac{\|\widehat{X}_h(t_n)\|_{\mathrm{ms}}^2}{\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2}$ thỏa mãn

$$\gamma_n = \max\left\{ \max\{1, t^{2\widehat{\delta}}\} \frac{\|\widehat{X}_h(t)\|_{\mathrm{ms}}^2}{\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2} : t \in [0, t_n] \right\} \quad \text{với } n \in \mathbb{N} \tag{3.37}$$

và $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$. Bằng cách thay $t = t_n$ trong (3.33), ta đạt được

$$\frac{\|\widehat{X}_h(t_n)\|_{\mathrm{ms}}^2}{\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2} \le \frac{M(\alpha, \lambda)}{\max\{1, t_n^{2\alpha}\}} + \mu^2 \int_0^{t_n} \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_n - s)^{\alpha}))^2}{(t_n - s)^{2-2\alpha}} \frac{\|\widehat{X}_h(\tau_h(s))\|_{\mathrm{ms}}^2}{\|X(0)\|_{\mathrm{ms}}^2} \, ds.$$

Điều này cùng với (3.37) suy ra rằng

$$\gamma_n \le \frac{M(\alpha, \lambda) \max\{1, t_n^{2\widehat{\delta}}\}}{\max\{1, t_n^{2\alpha}\}} + \gamma_n \mu^2 \int_0^{t_n} \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_n - s)^{\alpha}))^2}{(t_n - s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t_n^{2\widehat{\delta}}\}}{\max\{1, s^{2\widehat{\delta}}\}} \, ds.$$

Do đó,

$$\gamma_n \left(1 - \mu^2 \int_0^{t_n} \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_n - s)^{\alpha}))^2}{(t_n - s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t_n^{2\widehat{\delta}}\}}{\max\{1, s^{2\widehat{\delta}}\}} \, ds \right) \le \frac{M(\alpha, \lambda) \max\{1, t_n^{2\widehat{\delta}}\}}{\max\{1, t_n^{2\alpha}\}}. \tag{3.38}$$

Vì $\widehat{\delta} < \alpha$ nên dẫn đến

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M(\alpha, \lambda) \max\{1, t_n^{2\widehat{\delta}}\}}{\max\{1, t_n^{2\alpha}\}} = 0. \tag{3.39}$$

Hơn nữa, nhờ Bổ đề 3.3.5 và $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$ nên

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n \left(1 - \mu^2 \int_0^{t_n} \frac{(E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t_n - s)^{\alpha}))^2}{(t_n - s)^{2-2\alpha}} \frac{\max\{1, t_n^{2\widehat{\delta}}\}}{\max\{1, s^{2\widehat{\delta}}\}} \, ds \right) = \infty.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn với (3.38) và (3.39) nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Kết luận của chương 3

Trong chương này, chúng tôi xây dựng lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên (xem Phần 3.1). Trong Phần 3.2, chúng tôi chỉ rõ được tốc độ hội tụ cho lược đồ số kiểu Euler-Maruyama vừa đưa ra. Qua ví dụ được xét ở cuối Phần 3.2, chúng tôi đã chứng minh được tốc độ hội tụ tìm ra trong nghiên cứu lý thuyết đối với ví dụ này là tối ưu. Ngoài ra, chúng tôi còn đánh giá được tốc độ hội tụ và tính ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính trong phần cuối của chương.

Để kết thúc phần này, chúng tôi sẽ đưa ra một vài bình luận về các bài báo viết về hướng nghiên cứu trên. Theo sự hiểu biết của chúng tôi, việc giải số phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên mới chỉ được đề cập trong [59]. Tác giả của bài báo này đã đưa ra được lược đồ Euler cho phương trình Volterra ngẫu nhiên tổng quát với nhân kỳ dị nhưng chưa đưa ra được tốc độ hội tụ hiển của lược đồ cũng như chưa nghiên cứu được tính ổn định của lược đồ này. Vì vậy, những kết quả thu được của chương này đã làm phong phú thêm lý thuyết định lượng phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên.

Kết luận

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu một số vấn đề về phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- *Chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển, nghiệm nhẹ đối với phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Chứng minh được sự phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của nghiệm cổ điển phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Xây dựng được công thức biến thiên hằng số cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Chứng minh được khoảng cách tiệm cận giữa hai nghiệm phân biệt của phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên là lớn hơn* $t^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}-\varepsilon}$ *khi* $t \to \infty$ *với mọi* $\epsilon > 0$.

- *Xây dựng được lược đồ số kiểu Euler-Maruyama cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên và đánh giá được tốc độ hội tụ của lược đồ này. Đưa ra được tốc độ hội tụ và tính ổn định của lược đồ Euler-Maruyama mũ cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên một chiều tuyến tính.*

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề về phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên cần được nghiên cứu thêm trong thời gian tới, chúng tôi dự định sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

- *Tính ổn định của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *dựa trên các phương pháp nghiên cứu trong [4, 6, 17, 28].*

- *Tính chính quy của nghiệm phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Nghiên cứu nghiệm của phương trình vi phân phân thứ ngẫu nhiên với đạo hàm "substantial" phân thứ Caputo. Cụ thể xét phương trình có dạng*

  $$X(t) = \eta + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{e^{-\widetilde{\beta}(t-s)} b(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{e^{-\widetilde{\beta}(t-s)} \sigma(s, X(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\, dW_s.$$

  Chi tiết hơn về phương trình này chúng ta có thể tham khảo trong [20, 34].

- *Nghiên cứu mở rộng các kết quả trong* L^p *với* $p > 2$ *cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

- *Xây dựng các lược đồ số khác cho phương trình vi phân phân thứ Caputo ngẫu nhiên bậc* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *và nghiên cứu tốc độ hội tụ cũng như tính ổn định của các lược đồ số đó.*

Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án

[CT1] D. T. Son, P. T. Huong, Kloeden P. E., H. T. Tuan (2018), Asymptotic separation between solutions of Caputo fractional stochastic differential equations, *Stoch. Anal. Appl.*, **36**(4), pp. 654-664, (SCIE).

[CT2] P. T. Anh, D. T. Son, P. T. Huong (2019), A variation of constant formula for Caputo fractional stochastic differential equations, *Statist. Probab. Lett.*, **145**, pp. 351–358, (SCIE).

[CT3] D. T. Son, P. T. Huong, Kloeden P. E., V. A. My (2020), Euler-Maruyama scheme for Caputo fractional stochastic differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **380**, https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112989, (SCIE).

Bảng thuật ngữ

Tiếng Việt	**Tiếng Anh**
chuyển động Brown, 13	Brownian motion
công thức biến thiên hằng số, 26, 41	variation of constant formula
đạo hàm Caputo, 23	Caputo derivarive
điều kiện Lipschitz, 20, 21, 58	Lipschitz condition
định lý tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục, 29, 39	global existence and uniqueness theorem
hàm Gamma, 22	Gamma function
hàm Mittag-Leffler, 25	Mittag-Leffler function
nghiệm cổ điển, 28	classical solution
nghiệm nhẹ, 39	mild solution
nghiệm toàn cục, 29, 40	glocal solution
số mũ Lyapunov cổ điển, 54	Lyapunov exponent
số mũ Lyapunov bình phương trung bình, 53	mean square Lyapunov exponent
tích phân ngẫu nhiên Itô, 15, 16, 17, 18	Itô's stochastic integral
tích phân Riemann–Liouville, 22	Riemann–Liouville integral
tốc độ hội tụ, 21, 59, 69, 73	convergence rate
xấp xỉ Euler-Maruyama, 20, 57, 69	Euler-Maruyama's approximation.
xấp xỉ Euler-Maruyama mũ, 73	exponential Euler-Maruyama's approximation.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Duy Tiến (2001), *Các mô hình xác suất và ứng dụng (phần III Giải tích ngẫu nhiên)*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] Đặng Hùng Thắng (2012), *Xác suất nâng cao*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và giải tích hàm*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Hoàng Thế Tuấn (2017), *Về một số vấn đề định tính của hệ phương trình vi phân phân thứ*, Luận án tiến sĩ, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Tiếng Anh

[5] P. T. Anh, Babiarz A., Czornik A., Niezabitowski M., Siegmund S. (2019), Asymptotic properties of discrete linear fractional equations, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, **67**(4), pp. 749–759.

[6] Arnold L. (1974), *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, A Wiley-interscience Publication.

[7] Babiarz A., Czornik A., Klamka J., Niezabitowski M. (2017), *Theory and Applications of Non-integer Order Systems*, Lecture Notes in Electrical Engineering **407**, Springer International Publishing, Berlin.

[8] Băleanu D., Mustafa O. G. (2010), On the global existence of solutions to a class of fractional differential equations, *Computer and Mathematics with Applications*, **17**(59), pp. 1583-1841.

[9] Bandyopadhyay B., Kamal S. (2015), *Stabilization and Control of Fractional Order Systems: A Sliding Mode Approach*, Lecture Notes in Electrical Engineering, **317**, Springer International Publishing, Switzerland.

[10] Caputo M. (1969), *Elasticità e Dissipazione,* Zanichelli, Bologna.

[11] Caputo M., Mainardi M. (1971), Linear model of dissipation in Anelastic Solids, *Rivista Del Nuovo Cimento*, **1**(2), pp. 161-198.

[12] Caputo M., Mainardi M. (1971), A new dissipation model based on memory mechanism, *Pure and Applied Geophysics*, **91**, pp. 134-147.

[13] Caraballo T., Morillas F., Valero J. (2014), On differential equations with delay in Banach spaces and attractors for retarted lattice dynamical systems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **32**(1), pp. 51-77.

[14] Carpinteri A., Mainardi F. (eds) (1997), *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, Vienna-New York.

[15] N. D. Cong, H. T. Tuan (2017), Generation of nonlocal fractional dynamical systems by fractional differential equations, *Journal of Integral Equations and Applications*, **29**(4), pp. 585-608.

[16] N. D. Cong, D. T. Son, H. T. Tuan (2018), Asymptotic stability of linear fractional systems with constant coefficients and small time dependent perturbations, *Vietnam Journal of Mathematics*, **46**, pp. 665–680.

[17] N. D. Cong, H. T. Tuan, H. Trinh (2020), On asymptotic properties of solutions to fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **484**(2), pp. 123759.

[18] David S. A., Linares J. L, Pallone E. M. J. A. (2011), Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications, *Revista Brasileira de Fisica*, **33**(4), pp. 4302(1)-4302(7).

[19] Diethelm K. (2010), *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Lecture Notes in Mathematics, **2004**, Springer-Verlag, Berlin.

[20] Friedrich R., Jenko F., Baule A., Eule S. (2006), Anomalous diffusion of inertial, weakly damped particles, *Phys. Rev. Lett*, **96**, Art. No. 230601.

[21] Garci′a-Sandoval J. P. (2019), On representation and interpretation of fractional calculus and fractional order systems, *Fractional Calculus* & *Applied Analysis*, **22**(2), pp. 522-537.

[22] Gorenflo R., Vessella S. (1991), *Abel Intergral Equations: Analysis and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, **1461**, Springer-Verlag, Berlin.

[23] Han X., Kloeden P. E. (2017), *Random Ordinary Differential Equations and their Numerical Solution*, New York, Springer.

[24] Henry D. (1981), *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **840**, Springer-Verlag, New York/Berlin.

[25] Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L. (2004), *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Academic Press an imprint of Elsevier.

[26] Karatzas I., Shreve S. E., (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, Inc.

[27] T. D. Ke, C. T. Kinh (2014), Generalized Cauchy problem involving a class of degenerate fractional differential equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical analysis*, **21**(6), pp. 449-472.

[28] Khasminskii R. (2012), *Stochastic Stability of Differential Equations*, Springer.

[29] Klafter J., Lim S. C., Metzler R. (2011), *Fractional Dynamics: Recent Advances*, World Scientific, Singapore.

[30] Kloeden P. E., Platen E. (1992), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Applications of Mathematics (New York), **23**, Springer-Verlag, Berlin.

[31] Lakshmikantham V., Vatsala A. S. (2008), Basic theory of fractional differential equations, *Nonlinear Anal. TMA.*, **69**, pp. 2677-2682.

[32] Lakshmikantham V., Leela S., Devi J. V. (2009), *Theory of Fractional Dynamical Systems*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge.

[33] Lawrence C. E. (2013), *An Introduction to Stochastic Differential Equations Version 1.2*, https://math.berkeley.edu/∼evans/SDE.course.pdf.

[34] Liu L., Caraballo T., Kloeden P. E. (2019), The asymptotic behaviour of fractional lattice systems with variable delay, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **22**(3), pp. 681-698.

[35] Machado J. A. T., Kiryakova V., Mainardi F. (2011), Recent history of fractional calculus, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, **16**, pp. 1140-1153.

[36] Machado J. A. T. (2019), *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, CPI books GmbH, Leck.

[37] Mao X. (2011), *Stochastic Differential Equations and Applications*, Woodhead publishing.

[38] Miller K. S., Ross B. (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley Sons Inc., New York.

[39] Milstein G. N., Tretyakov M. V. (2004), *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[40] Oksendal B. (2000), *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, Springer-Verlag.

[41] Oldham K. B., Spanier J. (1974), *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York.

[42] Ortigueira M. D., Machado J. T. M., Ostalezyk P. (2018), Fractional signals and systems, *Bull. Pol. Ac: Tech*, **66**(4), pp. 385-388.

[43] Perko L. (2001), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer.

[44] Podlubny I. (1999), *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, To Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, Inc., San Diego, CA.

[45] Podlubny I., Magin R. L., Trymorush I. (2017), Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus, *Fractional Calculus* & *Applied Analysis*, **20**(5), pp. 1068-1075.

[46] Ross B. (1977), The development of fractional calculus 1695-1900, *Historia Mathematica*, **4**, pp. 75-89.

[47] Saito Y., Mitsui T. (1996), Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **33**(6), pp. 2254-2267.

[48] Sakthivel R., Revathi P., Ren Y. (2013), Existence of solutions for nonlinear fractional stochastic differential equations, *Nonlinear Anal. TMA*, **81**, pp. 70–86.

[49] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. (1993), *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers.

[50] Schneider W. R. (1996), Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions, *Expo. Math.*, **14**, pp. 3–16.

[51] Sierociuk D., Dzieliński A., Sarwas G., Petras I., Podlubny I., Skovranek T. (1990), *Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences, **371**.

[52] Sierociuk D., Malesza W. (2018), Fractional variable order anti-windup control strategy, *Bull. Pol. Ac: Tech*, **66**(4), pp. 427-432.

[53] Tejado I., Pe′rez E., Vale′rio D. (2019), Fractional calculus in economic growth modelling of the group of seven, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **22**(1), pp. 139-157.

[54] H. T. Tuan (2020), On the asymptotic behavior of solutions to time-fractional elliptic equations driven a multiplicative white noise, *arXiv:2002.06054*.

[55] Walter W. (1998), *Ordinary Differential Equations*, Springer.

[56] Wang Y., Yejuan X., Kloeden P. E. (2016), Asymptotic behavior of stochastic lattice systems with a Caputo fractional time derivative, *Nonlinear Anal*, **135**, pp. 205-222.

[57] Wang Z. (2008), Existence and uniqueness of solutions to stochastic Volterra equations with singular kernels and non-Lipschitz coefficients, *Statistics and Probability Letters*, **78**, pp. 1062-1071.

[58] Ye H., Gao J., Ding Y. (2007), A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **328**, pp. 1075-1081.

[59] Zhang X. (2008), Euler schemes and large deviations for stochastic Volterra equations with singular kernels, *Journal of Differential Equations*, **244**, pp. 2226-2250.